Technische Universität Braunschweig

Institut für Theoretische Informatik

Dr. Jürgen Koslowski

Algebraische Automatentheorie

Blatt 0, 2018-10-16

Definition

1. Unter einem *Magma* $\langle X, \cdot \rangle$ versteht man eine Menge X zusammen mit einer (totalen!) binären Operation $X \times X \xrightarrow{\cdot} X$ ohne weitere Bedingungen. [Vorsicht, terminologisches Chaos: Dieses Konzept wurde zeitweise (ab 1937, Hausmann und Ore) als „Gruppoid" bezeichet (engl. *groupoid*), sehr zum Leidwesen von Heinrich Brandt, der 1927 diesen Begriff im Fall einer partiellen assoziativen(!) Operation mit gewissen Zusatzeigenschaften eingeführt hatte, siehe nLab. Der Begriff „Magma" geht auf Serre (1965) zurück und wurde ab 1970 auch von Bourbaki verwendet. Heutzutage versteht man unter einem "groupoid" eine Kategorie, in der jeder Morphismus invertierbar ist. Ist die Kategorie darüberhinaus auch zusammenhängend, so handelt es sich um ein Gruppoid im Sinne Brandts.]
2. Ist die binäre Operation $\cdot$ eines Magmas assoziativ, so spricht man von einer *Halbgruppe* (engl. *semigroup*).
3. Eine Halbgruppe $\langle X, \cdot \rangle$ mit einem bzgl. $\cdot$ neutralen Element e heißt *Monoid*.
4. Verfügt ein Magma / eine Halbgruppe / ein Monoid über ein *absorbierendes Element* 0, d.h., $0 \cdot a = 0 = a \cdot 0$ für alle $a \in X$, so spricht man von einem *Magma mit 0*, bzw. einer *Halbgruppe mit 0*, bzw. einem *Monoid mit 0*.
5. Schließlich wird ein Monoid $\langle X, \cdot, e \rangle$, in dem jedes Element $a \in X$ ein linksseitiges Inverses a^{-1} mit $a^{-1} \cdot a = e$ besitzt, *Gruppe* genannt.

Aufgabe 1 [18 Punkte]

Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) [3 punkte] Das neutrale Element eines Monoids ist eindeutig bestimmt.

(b) [4 punkte] Besitzt in einem Monoid $\langle X, \cdot, e \rangle$ ein Element $b \in X$ sowohl ein links-inverses Element $a \in X$ als auch ein rechtsinversen Element $c \in X$, d.h., $a \cdot b = e = b \cdot c$, so gilt $a = c$. Weiterin ist ein derartiges Inverses Element eindeutig bestimmt.

(c) [3 punkte] Jedes Element $a \in X$ einer Gruppe besitzt auch ein rechtsinverses Element und dieses stimmt mit a^{-1} überein.

(d) [3 punkte] Existiert ein absorbierendes Element eines Magmas, so ist dieses eindeutig bestimmt. Eine Gruppe kann kein absorbierendes Element enthalten.

(e) [5 punkte] Ein Element $a \in X$ eines Magmas heißt *idempotent*, sofern gilt $a \cdot a = a$. Ein Magma / eine Halbgruppe / ein Monoid / eine Gruppe kann höchstens ein idempotentes Element enthalten.

Aufgabe 2 [15 Punkte]

Die Mengen X und Y mögen die Struktur eines Magmas / einer Halbgruppe / eines Monoids / einer Gruppe tragen. Eine Abbildung $X \xrightarrow{h} Y$ heißt *Homomorphismus* (des entsprechenden Typs), wenn sie "die Struktur erhält", d.h.

- $h(a \cdot b) = h(a) \cdot h(b)$ für alle $a, b \in X$ im Falle eines Magmas oder einer Halbgruppe;
- ggf. zusätzlich $h(0_X) = 0_Y$ im Falle eines Magmas mit 0;
- zusätzlich $h(e_X) = e_Y$ im Falle eines Monoids oder einer Gruppe;
- zusätzlich $h\left(a^{-1}\right) = (h(a))^{-1}$ im Falle einer Gruppe

Welche dieser Forderungen sind redundant? Genauer: erhält ein Magma-Homomorphismus

- zwischen Magmas mit 0 automatisch die 0?
- zwischen Monoiden automatisch das neutrale Element?
- zwischen Gruppen automatisch das neutrale Element sowie die Inversen?

Geben Sie ggf. Gegenbeispiele an.

Aufgabe 3 [16 Punkte]

(a) [8 punkte] Wir betrachten eine Abbildung $X \xrightarrow{f} M$ von einer Menge X in die Trägermenge M eines Monoids $\langle M, \cdot, e \rangle$. Zeigen oder widerlegen Sie: Es existiert genau ein Monoid-Homomorphismus $X^* \xrightarrow{\hat{f}} M$, der f erweitert, d.h., auf $X \subseteq X^*$ mit f übereinstimmt.

(b) [3 punkte] Kann es ein ähnliches Ergebnis für Halbgruppen geben, und was wäre dann das Gegenstück zum freien Monoid X^*?

(c) [5 punkte] Kann es ein ähnliches Ergebnis für Magmas geben, und was wäre dann das Gegenstück zum freien Monoid X^*?

Abgabe: Donnerstag, 2018-10-25, 13:15