

Übungen zur Vorlesung
Bäume, Ordnungen und Anwendungen
Blatt 10

Juniorprof. Dr. Roland Meyer

Abgabe bis 14.01.2014 um 14h

Aufgabe 10.1 (Abstrakte Interpretation)Betrachten Sie das folgende Programm, das die *Hailstone-Folge* berechnet:

```

while  $[x \neq 1]^1$  do
  if  $[\text{even}(x)]^2$  then
     $[x := \lfloor x/2 \rfloor]^3$ 
  else
     $[x := 3x + 1]^4$ 

```

Wir wollen das Transitionssystem dieses Programm auf der abstrakten Domäne $\mathbb{P}(\{\text{odd}, \text{even}\})$ bestimmen.

- a) Geben Sie zuerst sichere Approximationen für die Funktionen $x \mapsto \lfloor x/2 \rfloor$, $x \mapsto 3x+1$ sowie die Prädikate $\text{even}(x)$ und $x \neq 1$ an.
- b) Geben Sie das abstrakte Transitionssystem des Programms an. Nutzen Sie als Startwert $\{\text{odd}\}$.

Aufgabe 10.2 (Sichere Approximation)Betrachten Sie die Extraktionsfunktion $\beta : \mathbb{Z} \rightarrow \{0, \dots, 3\} \times \{0, \dots, 6\}$ mit $z \mapsto (z \bmod 4, z \bmod 7)$. Geben Sie sichere Approximationen für die Funktion $f(z) = 3z + 1$ und das Prädikat even an.**Aufgabe 10.3** (Prädikatenabstraktion)In der Vorlesung wurde als abstrakte Domäne zu einer Menge von Prädikaten $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ die Menge $\text{Abs}(P) = \{\bigwedge Q \dots \mid Q \subseteq P \cup \neg P\}$ eingeführt. Als Ordnung wurde die logische Folgerung verwendet. Das Problem ist, der Join für diesen Verband schwer zu berechnen ist. Stattdessen verwendet man man in der Praxis die Menge

$$\text{Tri}(P) := T_1 \times \dots \times T_n$$

der *Trivektoren*, wobei $T_i := \{\{p_i\}, \{\neg p_i\}, \{p_i, \neg p_i\}\}$ für $1 \leq i \leq n$ ist. Die Ordnung ist hierbei die komponentenweise Inklusion.*Zur Erläuterung:* Wir können uns einen Trivektor $t = (t_1, \dots, t_n)$ als Konjunktion von Literalen p_i , $\neg p_i$ oder Formeln $p_i \vee \neg p_i$ vorstellen. So gesehen ist t eine Formel ähnlich den Cubes aus $\text{Abs}(P)$ und jeder erfüllbare Cube q ist logisch äquivalent zu einem Trivektor.

- a) Zeigen Sie, dass $(\text{Tri}(P) \cup \{\text{false}\}, \subseteq^n)$ ein vollständiger Verband ist.
- b) Geben Sie zwei Cubes q_1, q_2 und zwei entsprechende Trivektoren t_1, t_2 an, so dass der Join $q_1 \sqcup q_2$ präziser ist als $t_1 \sqcup t_2$.

Abgabe bis 14.01.2014 um 14h im Kasten neben Raum 34-401.4