Logik
Aufgabenblatt 2 (Abgabe)

Prof. Dr. Roland Meyer
Sebastian Muskalla

TU Kaiserslautern

Sommersemester 2016

Ausgabe: 27. April — Abgabe: 02. Mai

Werfen Sie Ihre Lösung bis Montag, 2. Mai, um 14:00 in die Abgabekästen im 4. Stock von Gebäude 34. Geben Sie nach Möglichkeit zu dritt ab.

Aufgabe 1: Strukturelle Induktion

Die **Tiefe** $t(A)$ einer aussagenlogischen Formel A ist wie folgt definiert.

- Ist A eine atomare Formel, so ist $t(A) = 0$.
- Ist $A \equiv (B * C)$ für einen binären Junktor $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, so gilt

$$t(A) = \max\{t(B), t(C)\} + 1.$$

- Ist $A \equiv \neg(B)$, so definieren wir $t(A) = t(B) + 1$.

Außerdem sei $|A|$ die Länge der Formel A, d.h. die Anzahl der Zeichen in A (Klammern und Junktoren zählen also mit).

Beweisen Sie mit struktureller Induktion **über den Aufbau** der aussagenlogischen Formeln, dass in jeder vollständig geklammerten aussagenlogischen Formel A

a) $|A| \leq 5k + 1$, wobei k die Anzahl der Junktorenvorkommen $(\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow)$ in A ist.

b) $|A| \leq 4 \cdot 2^{t(A)} - 3$.

Aufgabe 2: Semantik von Formeln

a) Sei φ eine Bewertung mit $\varphi(p) = 1$ und $\varphi(q) = \varphi(r) = 0$. Berechnen Sie

$$\varphi(\neg(p \wedge q) \rightarrow r)$$

schrittweise anhand der Definition der Auswertung von Bewertungen.

b) Beweisen oder widerlegen Sie, dass $q \rightarrow (r \rightarrow (p \vee q))$ eine Tautologie ist.

c) Beweisen oder widerlegen Sie, dass $q \rightarrow p \models p \rightarrow q$.

d) Beweisen oder widerlegen Sie, dass $\neg p \vee \neg q \models\mathrel{\mkern-3mu}\dashv \neg(p \wedge q)$.