

**Aufgabe 1: Gentzen & Tableaux revisited**

a) Zeigen Sie

$$\vdash_G [r \wedge (p \vee q)] \rightarrow [(\neg(r \wedge p)) \rightarrow (r \wedge q)]$$

im Gentzen-Kalkül.

b) Zeigen Sie mit der Tableaux-Methode, dass die folgende Formel eine Tautologie ist:

$$[((\neg p \vee q) \wedge (\neg p \wedge r)) \wedge (\neg q)] \rightarrow [(\neg p \vee q) \wedge (p \rightarrow r)] .$$

**Aufgabe 2: Königs Lemma**

Das **Ballspiel nach Smullyan** wird von einer Person gespielt und verläuft nach folgenden Regeln: Es steht ein Behältnis zur Verfügung, das unbegrenzt viele Bälle fassen kann. Ferner gibt es einen unbegrenzten Vorrat an Bällen, von denen jeder mit einer natürlichen Zahl beschriftet ist. Am Anfang enthält das Behältnis einen Ball. Es kann nun in jedem Schritt des Spiels ein Ball aus dem Behältnis entnommen werden und dafür beliebig (aber endlich) viele Bälle eingefüllt werden, deren Beschriftung allerdings kleiner sein muss als die des entnommenen Balls. Das Spiel ist zu Ende, wenn kein Schritt mehr möglich ist, d.h. wenn das Behältnis leer ist.

Zeigen Sie, dass jedes Spiel nach endlich vielen Schritten zum Ende kommt.

**Aufgabe 3: Resolutionskalkül**

a) Zeigen Sie per Resolution, dass

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow \neg(\neg r \wedge p)$$

eine Tautologie ist.

**Hinweis:** Der Resolutionskalkül kann nur auf Formeln in KNF angewandt werden.

- b) Seien  $K_1, K_2$  Klauseln und  $L$  ein Literal mit  $L \in K_1$  und  $\neg L \in K_2$ . Außerdem sei  $R$  die Resolvente von  $K_1$  und  $K_2$  nach  $L$ . Zeigen Sie, dass  $\{K_1, K_2\} \models R$ .
- c) Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass der Resolutionskalkül nicht vollständig ist. Das heißt, geben Sie eine Formel  $A$  in KNF und eine Klausel  $K$  an, so dass  $A \models K$  gilt, aber nicht  $A \vdash_{Res} K$ .

#### Aufgabe 4: Davis-Putnam-Verfahren

- a) Bestimmen Sie mittels des Davis-Putnam-Verfahrens, ob die folgende Formel erfüllbar ist:

$$\neg p \wedge (\neg t \vee q \vee p) \wedge (\neg s \vee \neg q) \wedge (s \vee \neg q \vee t) \wedge (r \vee \neg p) \wedge \neg r \wedge (\neg s \vee \neg q \vee s)$$

Verwenden Sie dabei die Unit-Regel immer wenn dies möglich ist. Die anderen Regeln dürfen Sie nach Belieben verwenden.

- b) Warum ist es notwendig, dass die bearbeitete Formel im Davis-Putnam-Verfahren in Negationsnormalform ist? (An welcher Stelle gibt das Verfahren sonst falsche Antworten?)
- c) Sei  $F = \{K_1, \dots, K_n\}$  eine Formel in KNF in Mengenschreibweise. Außerdem sei  $K_i \subseteq K_j$ . Zeigen Sie, dass dann  $F \models F'$ , wobei  $F' = F \setminus \{K_j\}$ . (Damit haben Sie die Korrektheit der Subsumptionsregel bewiesen.)