Ausgabe: 01. Juni | Abgabe: 10. Juni

Aufgabe 1: Modellierung: Syntax der Prädikatenlogik

Drücken Sie die folgenden Aussagen in Prädikatenlogik erster Stufe aus. Spezifizieren Sie dabei die verwendeten Funktions- und Prädikatssymbole und ihre Stelligkeit. Geben Sie die intendierte Bedeutung der Symbole an oder wählen Sie aussagekräftige Namen. Dabei soll sich möglichst viel Struktur der Aussage in der Struktur der Formel wiederfinden: Die Aussage „Alle Vögel sind schon da" soll also nicht mit der Formel ausgedrückt, die nur aus dem nullstelligen Prädikat $\mathsf{alleV\ddot{o}gelSindSchonDa}$ besteht, sondern z.B. mit

$$\forall x\colon \big(\mathsf{istVogel}(x) \to \mathsf{schonDa}(x)\big)\ ,$$

wobei $S = (Fun, Pred)$ mit $Fun = \varnothing$, $Pred = \big\{\mathsf{istVogel}_{/1}, \mathsf{schonDa}_{/1}\big\}$.

a) Nur Tage, an denen es nicht regnet, sind gute Tage.

b) Jedes rote Buch ist informativer als jedes blaue.

c) Es gibt ein Buch, dessen Autoren alle berühmt sind.

d) Jedes Buch, dessen Autoren alle berühmt sind, ist interessant.

Aufgabe 2: Modellierung: Semantik der Prädikatenlogik

Nehmen Sie an, die Signatur S enthalte die einstelligen Prädikate $\mathsf{istVogel}$ und $\mathsf{kannFliegen}$. Gegeben sei die Formel

$$A \equiv \forall x\colon \big(\mathsf{kannFliegen}(x) \to \mathsf{istVogel}(x)\big)\ .$$

(Beachten Sie, dass diese Formel keine freien Variablen enthält.)

a) Geben Sie eine Struktur $\mathcal{M} = (D, I)$ der Signatur S an mit $\mathcal{M}[\![A]\!] = 1$. Es soll dabei mindestens ein $d \in D$ geben mit $\mathsf{kannFliegen}^{\mathcal{M}}(d) = 0$.

b) Geben Sie eine Struktur $\mathcal{M} = (D, I)$ der Signatur S an mit $\mathcal{M}[\![A]\!] = 1$,
wobei $\big\{\mathsf{Amsel}, \mathsf{Schwein}, \mathsf{Airbus\ A380}\big\} \subseteq D$.

Bitte wenden!

Aufgabe 3: Auswerten von prädikatenlogischen Formeln
Gegeben sei die Signatur $S = (Fun, Pred)$ mit

$$\begin{array}{rcll} Fun & = & \{\mathrm{or}_{/2}, & \mathrm{not}_{/1}\} \\ Pred & = & \{\mathrm{might}_{/1}, & \mathrm{is}_{/1}\} \end{array}$$

und die S-Stuktur $\mathcal{M} = (D, I)$ mit

$$D = \{\mathfrak{t}, \mathfrak{f}, \mathfrak{m}\},$$

wobei

$$\begin{array}{llcclll} is^{\mathcal{M}} & (d) & = & 1 & \text{gdw.} & d = \mathfrak{t} & \text{(und 0 sonst)} \\ \mathrm{might}^{\mathcal{M}} & (d) & = & 1 & \text{gdw.} & d \in \{\mathfrak{t}, \mathfrak{m}\} & \end{array}$$

und

$$\mathrm{not}^{\mathcal{M}}(d) = \begin{cases} \mathfrak{f} & d = \mathfrak{t}, \\ \mathfrak{m} & d = \mathfrak{m}, \\ \mathfrak{t} & d = \mathfrak{f}, \end{cases} \qquad \mathrm{or}^{\mathcal{M}}(d, e) = \begin{cases} \mathfrak{t} & d = \mathfrak{t} \text{ oder } e = \mathfrak{t}, \\ \mathfrak{f} & d = \mathfrak{f} \text{ und } e = \mathfrak{f}, \\ \mathfrak{m} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie den Wahrheitswert $\mathcal{M}[\![A]\!]$ für die folgende Formel A Schritt für Schritt.

$$A \equiv \exists x\colon \Big[\big(\mathrm{is}(x) \vee \mathrm{is}(\mathrm{not}(x))\big) \wedge \forall y\colon \big(\mathrm{might}\big(\mathrm{or}(y, x)\big) \to \mathrm{is}\big(\mathrm{or}(x, y)\big)\big)\Big] .$$

Hinweis: A hat keine freien Variablen, d.h. insbesondere spielt es keine Rolle, welche Belegung σ man initial wählt .

Aufgabe 4: Formeln der Prädikatenlogik
Geben Sie zu Ihrer Antwort auf die folgenden Fragen jeweils einen Beweis an (bzw. ein Gegenbeispiel in Form eines Modells).

a) Seien

$$A \equiv \exists x \forall y\colon p(x, y) ,$$

$$B \equiv \forall y \exists x\colon p(x, y) .$$

Welche der folgenden Beziehungen gelten?

- $A \models B$
- $B \models A$

b) Ist die Formel

$$C \equiv \big(\forall x\colon p(x)\big) \to \big(\exists x\colon p(x)\big)$$

eine Tautologie?

Prof. Dr. Roland Meyer	**Logik**	TU Kaiserslautern
Sebastian Muskalla	**Zusatzaufgaben**	Sommersemester 2016

Ausgabe: 01. Juni keine Abgabe

Die folgenden Aufgaben sind **freiwillige** Zusatzaufgaben zur Vorbereitung auf die Zwischenklausur. Die Aufgaben müssen nicht abgegeben werden und werden nicht bepunktet.

Aufgabe 5: Kompaktheitssatz

Sei $A \in F$ eine Formel und sei $\Sigma \subseteq F$ eine Menge von Formeln, so dass für jede Bewertung φ eine Formel $B_\varphi \in \Sigma$ gibt, so dass $\varphi(A \rightarrow B) = 1$.

Zeigen Sie: Es gibt eine endliche Teilmenge $\{B_1, ..., B_k\} \subseteq \Sigma$, so dass $A \rightarrow (B_1 \vee ... \vee B_k)$ eine Tautologie ist.

Hinweis: Führen Sie einen Beweis durch Widerspruch.

Aufgabe 6: Königs Lemma

Sei Σ ein **Alphabet**, d.h. eine endliche Menge von Symbolen. Ein **endliches Wort** w **über** Σ ist eine endliche Folge von Symbolen aus Σ, d.h. $w = a_0 \dots a_k$ mit $a_i \in \Sigma$ für $i \in \{0, \dots, k\}$. Ein **unendliches Wort** w **über** Σ ist eine unendliche Folge von Symbolen aus Σ, d.h. $w = a_0 a_1 a_2 \dots$ mit $a_i \in \Sigma$ für $i \in \mathbb{N}$. Ein Präfix eines Wortes $w = a_0 \dots a_k$ (bzw. $w = a_0 \dots a_k$) ist ein Wort $a_0 \dots a_j$ mit $j \leq k$ (bzw. $j \in \mathbb{N}$).

Sei $\mathcal{L}$ eine Präfix-abgeschlossene Menge von endlichen Wörtern über Σ, d.h. wenn ein Wort w in $\mathcal{L}$ enthalten ist, dann auch alle seine Präfixe.

Zeigen Sie: Wenn $\mathcal{L}$ unendlich ist, dann gibt es ein unendliches Wort über Σ, dessen (endliche) Präfixe alle in $\mathcal{L}$ enthalten sind.

Aufgabe 7: Davis-Putnam

Zeigen Sie unter Verwendung des Davis-Putnam-Verfahrens aus der Vorlesung, dass die folgende aussagenlogische Formel eine Tautologie ist. Verwenden Sie dabei die Unit-Regel immer wenn dies möglich ist. Die anderen Regeln dürfen Sie nach Belieben verwenden. Notieren Sie in jedem Schritt, welche Regel Sie angewandt haben.

$$(\neg s \wedge \neg q \wedge \neg p) \vee (\neg q \wedge \neg p \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge \neg p \wedge \neg r \wedge t) \vee (r) \vee (\neg q \wedge p) \vee (p \wedge t) \vee (\neg t \wedge q) \vee (\neg p \wedge t)$$

Aufgabe 8: Resolution

Zeigen Sie mittels Resolution, dass die folgende Formel eine Tautologie ist.

$$(p \wedge q \wedge \neg t) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg s) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg q \wedge s) \vee (\neg r \wedge q) \vee (r \wedge q)$$