Prof. Dr. Roland Meyer
Sebastian Muskalla

Logik
Aufgabenblatt 9 (Abgabe)

TU Kaiserslautern
Sommersemester 2016

Ausgabe: 15. Juni — Abgabe: 24. Juni, 12:00

Aufgabe 1: Funktionssymbole und Herbrand-Expansion

Sei S eine Signatur mit endlich vielen Funktions- und Prädikatssymbolen, in der keine Funktionssymbole vorkommen, deren Stelligkeit größer als 0 ist. Sei $A \in \mathrm{FO}^{\neq}(S)$ eine abgeschlossene Formel in Skolemform, in der keine Gleichheit vorkommt.

a) Zeigen Sie, dass die Herbrand-Expansion von A endlich ist.

b) Geben Sie ein Verfahren an, das entscheidet, ob A erfüllbar ist.

c) Viele Algorithmen, die Unerfüllbarkeit von prädikatenlogischen Formeln überprüfen, erwarten, dass die Formel sogar in **Klauselform** (auch Klauselnormalform genannt) ist.

Eine Formel $A \in \mathrm{FO}^{\neq}(S)$ ist in Klauselform, wenn sie abgeschlossen und in Skolemform ist, d.h. $A \equiv \forall x_1 \ldots \forall x_n \colon B$, wobei in B keine Quantoren vorkommen. Zusätzlich ist B in der prädikatenlogischen Entsprechung der **konjuktiven Normalform (KNF)**: B ist eine Konjunktion von Klauseln $B \equiv K_1 \wedge \ldots \wedge K_n$, wobei eine **Klausel** K eine Disjunktion von Literalen ist, $K \equiv L_1 \vee \ldots \vee K_m$. Ein **Literal** L ist ein Prädikatssymbol angewandt auf Terme, $L \equiv p(t_1, \ldots, t_k)$, oder ein negiertes Prädikatssymbol angewandt auf Terme, $L \equiv \neg p(t_1, \ldots, t_k)$.

Berechnen Sie zur folgenden Formel Schritt für Schritt eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel in Klauselform.

$$\forall x \exists y \colon \big(p(x) \wedge r(y)\big) \rightarrow \neg\Big(\big(p(x) \wedge q(z)\big) \vee \big(q(y) \wedge r(z)\big)\Big)$$

Hinweis: Erinnern Sie sich an die Distributivgesetze für $\wedge$ und $\vee$.

Aufgabe 2: Ein Erfüllbarkeitstest

a) Entwerfen Sie einen Algorithmus, der für eine gegebene endliche Struktur $\mathcal{M} = (D, I)$, eine Belegung $\sigma \in D^V$ und eine Formel A feststellt, ob $\mathcal{M}, \sigma \models A$ gilt.

b) Gegeben sei eine abgeschlossene Formel A der Form $A \equiv \exists x_1 \cdots \exists x_n \colon B$, wobei in B keinerlei Quantoren vorkommen.

Zeigen Sie, dass solche Formeln eine **small model property** besitzen:
Ist A erfüllbar, so besitzt A ein Modell $\mathcal{M} = (D, I)$ mit $|D| \leq |B|$.

c) Verwenden Sie a) und b), um einen Algorithmus anzugeben, der für eine abgeschlossene Formel $A \equiv \exists x_1 \cdots \exists x_n \colon B$ wie oben entscheidet, ob A erfüllbar ist.

Aufgabe 3: Eliminierung von Gleichheit

In der Herbrand-Theorie haben wir vorausgesetzt, dass die betrachtete Formel in $\mathrm{FO}^{\neq}(S)$ ist, d.h. keine Gleichheit beinhaltet. Wir wollen nun in dieser Aufgabe sehen, wie wir zu einer Formel $A \in \mathrm{FO}(S)$ eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel $A' \in \mathrm{FO}^{\neq}(S')$ über einer erweiterten Signatur finden können.

a) Sei $e_{/2} \in Pred_{S'}$ ein zweistelliges Prädikatssymbol. Geben Sie eine abgeschlossene Formel $Eq \in \mathrm{FO}^{\neq}(S')$ an, die keine Gleichheit verwendet. Die Formel soll sicherstellen, dass die Interpretation von e in jedem Modell für Eq eine Äquivalenzrelation ist (reflexiv, symmetrisch, transitiv).

b) Sei $e_{/2} \in Pred_{S'}$ ein zweistelliges Prädikatssymbol. Geben Sie eine abgeschlossene Formel $K \in \mathrm{FO}^{\neq}(S')$ an, die keine Gleichheit verwendet. Die Formel soll sicherstellen, dass die Interpretation von e in jedem Modell für K eine Kongruenz ist, d.h. das Ersetzen von Parametern in Prädikaten und Funktionen durch e-äquivalente Terme führt zum gleichen Ergebnis.

   Sie dürfen davon ausgehen, dass es in S' außer e jeweils genau ein Funktionssymbol und ein Prädikatssymbol gibt, die jeweils einstellig sind; $S' = (\{f_{/1}\}, \{p_{/1}, e_{/2}\})$.

c) Sei $A \in \mathrm{FO}(S)$ eine abgeschlossene Formel. Geben Sie an, wie man eine abgeschlossene Formel $A' \in \mathrm{FO}^{\neq}(S')$ über einer erweiterten Signatur konstruiert, die keine Gleichheit verwendet und zu A erfüllbarkeitsäquivalent ist.

   Begründen Sie kurz, warum es zu jedem Modell $\mathcal{M}'$ für A' mit abzählbarem Datenbereich ein Modell $\mathcal{M}$ für A mit abzählbarem Datenbereich gibt.

   Hinweis: Wählen Sie $S' = (Fun_S, Pred_S \cup \{e_{/2}\})$ und verwenden Sie a) und b).

Aufgabe 4: Kompaktheitssatz der Aussagenlogik

Sei $A_1, A_2, \ldots$ eine Folge von aussagenlogischen Formeln. Wir definieren die Folge $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Mengen von Formeln wie folgt:

$$\Sigma_0 = \varnothing, \qquad \Sigma_{n+1} = \begin{cases} \Sigma_n \cup \{A_{n+1}\} & \Sigma_n \models A_{n+1}, \\ \Sigma_n \cup \{\neg A_{n+1}\} & \Sigma_n \not\models A_{n+1}. \end{cases}$$

Wir definieren außerdem $\Sigma = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Sigma_n$.

a) Zeigen Sie mittels Induktion, dass Σ_n für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllbar ist.

   Hinweis: Unterscheiden Sie im Induktionsschritt die Fälle $\Sigma_n \models A_{n+1}$ und $\Sigma_n \not\models A_{n+1}$.

b) Zeigen Sie unter Verwendung des Kompaktheitssatzes, dass Σ erfüllbar ist.

c) Betrachten Sie nun die Folge von Formeln definiert durch $A_n \equiv p_1 \wedge \ldots \wedge p_n$ für $n \geq 1$.

   - Beschreiben Sie die Mengen in der Folge $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und beschreiben Sie Σ.
   - Geben Sie konkret eine erfüllende Belegung für Σ an.