Prof. Dr. Roland Meyer
Sebastian Muskalla

Logik
Aufgabenblatt 12 (Präsenz)

TU Kaiserslautern
Sommersemester 2016

Ausgabe: 6. Juli — Bearbeitung: 7./8. Juli

Aufgabe 1: Nicht-Standard-Modelle, Isomorphie, elementare Äquivalenz

Zwei Strukturen $\mathcal{M} = (D, I)$ und $\mathcal{M}' = (D', I')$ über der selben Signatur S heißen **elementar äquivalent**, wenn sie die gleichen geschlossenen Formeln erfüllen, also wenn für jede abgeschlossene Formel $A \in \mathrm{FO}(S)$ gilt:

$$\mathcal{M} \models A \text{ genau dann, wenn } \mathcal{M}' \models A.$$

$\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ heißen **isomorph**, wenn es eine bijektive Abbildung $\varphi : D \to D'$ gibt mit

$$p^{\mathcal{M}}(d_1, \dots, d_k) = p^{\mathcal{M}'}(\varphi(d_1), \dots, \varphi(d_k)) \qquad \text{für alle } d_1, \dots, d_k \in D \text{, und}$$
$$\varphi(f^{\mathcal{M}}(d_1, \dots, d_\ell)) = f^{\mathcal{M}'}(\varphi(d_1), \dots, \varphi(d_\ell)) \qquad \text{für alle } d_1, \dots, d_\ell \in D\ .$$

für jedes k-stellige Prädikatssymbol p und jedes ℓ-stellige Funktionssymbol f.

Wir haben in der Vorlesung und auf dem letzten Übungsblatt gesehen, dass Strukturen elementar äquivalent und nicht isomorph sein können (Nichtstandardmodelle). Wir zeigen nun, dass dieses Phänomen bei endlichen Strukturen nicht auftreten kann.

Wir fixieren dazu die Signatur

$$S = \big(\{f_{/1}\}, \{p_{/2}\}\big)\ .$$

a) Gegeben eine **endliche** S-Struktur $\mathcal{M}$, konstruieren Sie eine geschlossene Formel $A \in \mathrm{FO}(S)$, so dass für jede S-Struktur $\mathcal{M}'$ gilt: $\mathcal{M}' \models A$ genau dann, wenn $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ isomorph sind.

b) Schließen Sie aus a), dass zwei endliche elementar äquivalente Strukturen auch isomorph sind.

Aufgabe 2: Entscheidbarkeit und Axiomatisierbarkeit

a) Sei $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\Sigma$ die Theorie, die von einem aufzählbaren Axiomensystem Σ erzeugt wird. Zeigen Sie, dass dann $\mathcal{T}$ selbst auch aufzählbar ist.

   Hinweis: Betrachten Sie Ableitungen im System $\mathcal{F}$.

   Bemerkung: In der Vorlesung haben wir gesehen, dass wenn $\mathcal{T}_\Sigma$ vollständig ist, $\mathcal{T}_\Sigma$ sogar entscheidbar ist.

b) Sei $\mathcal{T}$ eine entscheidbare Theorie. Zeigen Sie, dass es ein aufzählbares Axiomensystem gibt, das $\mathcal{T}$ erzeugt.

Aufgabe 3: Konsistenz und Erfüllbarkeit

Beweisen Sie Bemerkung 5.16 (b):
Eine Theorie $\mathcal{T}$ ist erfüllbar, genau dann wenn sie konsistent ist.

Aufgabe 4: Vollständigkeit und Konsistenz

Sei Σ eine Theorie. Zeigen Sie:
Σ ist vollständig genau dann, wenn es keine Formel A gibt, so dass $\mathcal{T}_{\Sigma \cup \{A\}}$ und $\mathcal{T}_{\Sigma \cup \{\neg A\}}$ beide konsistent sind.

Bemerkung:

Sie haben also gezeigt, dass Vollständigkeit einer Theorie bedeutet, dass sich diese nicht auf sich widersprechende Weisen konsistent erweitern lässt.