Prof. Dr. Roland Meyer
Sebastian Muskalla

Logik
Aufgabenblatt 13 (Abgabe)

TU Kaiserslautern
Sommersemester 2016

Ausgabe: 13. Juli — Abgabe: 22. Juli

Dieses Übungsblatt gibt **Bonuspunkte**:
Die Punkte, die Sie erhalten, werden auf Ihr Punktekonto gezählt; Um die Klausurzulassung zu erhalten, brauchen Sie allerdings nur **13 Punkte** (60% der Punkte der ersten 6 Abgabeblätter).

Aufgabe 1: Vollständige Theorien

Wie auf Präsenzblatt 12 erwähnt, nennt man zwei Strukturen $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ **elementar äquivalent**, falls sie die selben abgeschlossenen Formeln erfüllen. Man kann dies auch mittels der von den Strukturen erzeugten Theorien ausdrücken: $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ sind elementar äquivalent, genau dann wenn $\mathcal{T}_{\mathcal{M}} = \mathcal{T}_{\mathcal{M}'}$ gilt.

Es sei $\mathcal{T}$ eine konsistente Theorie. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Wenn $\mathcal{T}$ vollständig ist, dann sind je zwei Modelle von $\mathcal{T}$ elementar äquivalent.

b) Wenn je zwei Modelle von $\mathcal{T}$ elementar äquivalent sind, dann ist $\mathcal{T}$ vollständig.

   Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 4 von Präsenzblatt 12.

Aufgabe 2: Presburger-Arithmetik

Betrachten Sie die Signatur

$$S = \left(\{0_{/0}, 1_{/0}, +_{/2}\}, \{\}\right),$$

die keine Prädikatssymbole enthält, aber ein zweistelliges Funktionssymbol + und die konstanten 0 und 1. In Formeln über S schreiben wir, wie üblich, statt $+(x, y)$ auch $x + y$.

Mit $\mathcal{N}$ bezeichnen wir die Struktur $(\mathbb{N}, +)$ mit Datenbereich $\mathbb{N}$, wobei 0, 1, und + wie üblich interpretiert ist. Entsprechend bezeichnet $\mathcal{Z}$ die Struktur $(\mathbb{Z}, +)$, die als Datenbereich statt $\mathbb{N}$ die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ umfasst.

Wir nennen eine Formel $A \in \mathrm{FO}(S)$ **flach**, falls alle atomaren Formeln in A von der Form $x = y$ oder $x + y = z$ sind (für x, y, z Variablen oder 0 oder 1).

a) Beschreiben Sie, wie zu einer Formel $A \in \mathrm{FO}(S)$ eine flache Formel $A' \in \mathrm{FO}(S)$ konstruiert werden kann, sodass $\mathcal{Z} \models A$ genau dann wenn $\mathcal{Z} \models A'$.

   Zeigen Sie dazu zunächst, wie sich eine Summengleichheit der Form $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = y_1 + y_2 + \ldots + y_m$ zu einer Formel umschreiben lässt, in der nur Summengleichheiten der Form $z_1 + z_2 + \ldots + z_k = w$ vorkommen.

   Zeigen Sie dann, wie sich eine Summengleichheit der Form $z_1 + z_2 + \ldots + z_k = w$ zu einer Formel umschreiben lässt, die flach ist.

b) Geben Sie ein Verfahren an, dass zu einer abgeschlossenen Formel $A \in \mathrm{FO}(S)$ eine abgeschlossenen Formel $B \in \mathrm{FO}(S)$ konstruiert, sodass $\mathcal{Z} \models A$ genau dann, wenn $\mathcal{N} \models B$.

Hinweis: Sie dürfen davon ausgehen, dass in A nur Existenzquantoren vorkommen. Außerdem können Sie mit Aufgabenteil a) davon ausgehen, dass A flach ist.

In beiden Teilaufgaben reicht es die Konstruktion anzugeben; Es ist nicht nötig ihre Korrektheit zu beweisen.

Hinweis: Die Theorie über der Struktur $\mathcal{N}$ wird Presburger-Arithmetik genannt. Man kann unter anderem zeigen, dass man, gegeben eine abgeschlossene Formel $A \in \mathrm{FO}(S)$, entscheiden kann ob $\mathcal{N} \models A$ gilt. Mit Teilaufgabe b) haben Sie gezeigt, dass man entscheiden kann, ob $\mathcal{Z} \models A$ gilt.

Aufgabe 3: Tableaux

a) Zeigen Sie mittels eines Tableaus, dass die Formel

$$\big(\forall x \forall y\colon \big(\neg\neg p(x,y) \to p(y,x)\big) \land \forall x \exists y\colon p(x,y)\big) \to \forall x \exists y\colon p(y,x)$$

allgemeingültig ist.

b) Zeigen Sie mittels eines Tableaus, dass die Formel

$$\neg\big(\forall x\colon \big[p(x) \to p(f(x))\big] \to \forall x\colon \big[p(x) \to p(f(f(x)))\big]\big)$$

unerfüllbar ist.

Aufgabe 4: Berechnung von MGUs

Entscheiden Sie für jede der folgenden Mengen, ob sie unifizierbar ist und falls ja, bestimmen Sie einen allgemeinsten Unifikator (MGU). Wenden Sie hierzu den Algorithmus aus der Vorlesung Schritt für Schritt an.

a)

$$\big\{q(f(a,x),z_1),\ q(f(y,g(z_1)),\ h(z_3)),\ q(z_2,h(b))\big\}$$

b)

$$\big\{p(x,f(y)),\ p(f(a),y)\big\}$$

Dabei sind x, y, z_1, z_2, z_3 Variablen, p, q Prädikatssymbole und f, g, h, a, b Funktionssymbole.