

---

Übungen zur Vorlesung Logik  
Blatt 6

Jun.-Prof. Dr. Roland Meyer

Abgabe bis 10.07.2012 12:00 Uhr

---

**Aufgabe 6.1** [Nicht vollständige Theorien]

Betrachten Sie das Axiomensystem  $Ax$ , das aus den ersten vier Axiomen aus Beispiel 3.12 auf Folie 169 besteht.

- a) Geben Sie ein Modell der Axiome an, in dem die Addition nicht kommutativ ist.
- b) Schließen Sie aus a), dass die von  $Ax$  erzeugte Theorie nicht vollständig ist.

**Aufgabe 6.2** [Ableitungen in  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{F}_0$ ]

Sei  $A'$  eine prädikatenlogische Formel (erster Stufe), die durch simultanes Ersetzen von Aussagensymbolen  $p_i$  durch Formeln  $B_i$  aus der aussagenlogischen Formel  $A$  entsteht. Außerdem sei  $\vdash_{\mathcal{F}_0} A$ . Zeigen Sie, dass dann auch  $\vdash_{\mathcal{F}} A'$ .

**Aufgabe 6.3** [Vollständigkeit und Konsistenz]

Zeigen Sie, dass eine Theorie  $T$  genau dann vollständig ist, wenn es keine Formel  $A$  gibt, so dass  $\text{Th}(T \cup \{A\})$  und  $\text{Th}(T \cup \{\neg A\})$  konsistent sind. *Hinweis:* Sie haben also gezeigt, dass Vollständigkeit einer Theorie bedeutet, dass sich diese nicht auf sich widersprechende Weisen konsistent erweitern lässt.

**Aufgabe 6.4** [Entscheidbare Theorien]

Sei  $\mathcal{R}$  eine Struktur, so dass  $T_{\mathcal{R}}$  axiomatisierbar ist durch eine rekursiv aufzählbare Menge von Formeln. Zeigen Sie, dass dann  $T_{\mathcal{R}}$  rekursiv entscheidbar ist. (Die Begriffe *rekursiv entscheidbar* und *rekursiv aufzählbar* wurden auf Blatt 2 definiert.)

**Abgabe: bis 10.07.2012 12:00 Uhr im Kasten neben Raum 34/401.4**