Präsenzübungen zur Vorlesung Logik
Blatt 6

Jun.-Prof. Dr. Roland Meyer Bearbeitung am 05./06.07.2012

Präsenzaufgabe 6.1 [Prädikatenlogische Tableaux]

Bestimmen Sie mittels Tableaux, ob

a) die Formel $\forall z \exists x \exists y p(x, y, z)$ erfüllbar ist.

b) die Formel $\forall x \forall y ((p(x, y) \wedge q(x)) \rightarrow \exists y q(y))$ eine Tautologie ist.

Präsenzaufgabe 6.2 [Entscheidbare Theorien]

Es sei T eine rekursiv entscheidbare Theorie. Zeigen Sie, dass es ein rekursiv aufzählbares Axiomensystem gibt, das T erzeugt.

Präsenzaufgabe 6.3 [Ein Gültigkeitstest]

Zeigen Sie, dass es einen Algorithmus gibt, der, gegeben eine Formel der Form

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \exists y_1 \cdots \exists y_m B,$$

wobei B keine Funktionssymbole enthält, feststellt, ob die Formel eine Tautologie ist.

Präsenzaufgabe 6.4 [Der Kompaktheitssatz für die Prädikatenlogik]

Sei A eine Formel der Prädikatenlogik erster Stufe, die für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Modell I besitzt mit $|I| \geqslant n$. In Aufgabe 5.1 haben Sie gezeigt, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}$ außerdem eine Formel B_n gibt, so dass $I \models B_n$ genau dann, wenn $|I| \geqslant n$. Betrachten Sie die Menge $\Sigma = \{A \wedge B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

a) Zeigen Sie unter Verwendung des Kompaktheitssatzes für Prädikatenlogik erster Stufe, dass Σ erfüllbar ist.

b) Zeigen Sie, dass A ein unendliches Modell besitzt.

c) Schließen Sie, dass es keine Formel E gibt, so dass $I \models E$ genau dann, wenn I eine endliche Domäne besitzt.