SS 2013 17. April 2013

Übungen zur Vorlesung Logik
Blatt 1

Jun.-Prof. Dr. Roland Meyer Abgabe bis 26. April 2013 12:00 Uhr

Aufgabe 1.1 [Strukturelle Induktion]

Die *Tiefe* $t(A)$ einer aussagenlogischen Formel A ist wie folgt definiert.

- Ist A eine atomare Formel, so ist $t(A) = 0$.
- Ist $A \equiv (B * C)$ für einen binären Junktor $*$, so gilt
$$t(A) = \max\{t(B), t(C)\} + 1.$$
- Ist $A \equiv \neg(B)$, so definieren wir $t(A) = t(B) + 1$.

Außerdem sei $|A|$ die Länge der Formel A, d.h. die Anzahl der Zeichen in A (Klammern und Junktoren zählen also mit).

Beweisen Sie mit struktureller Induktion über den Aufbau der aussagenlogischen Formeln, dass in jeder vollständig geklammerten aussagenlogischen Formel A

a) die Anzahl der öffnenden Klammern mit der Anzahl der schließenden Klammern übereinstimmt.

b) $|A| \leqslant 5k + 1$, wobei k die Anzahl der Junktorenvorkommen in A ist.

c) $|A| \leqslant 4 \cdot 2^{t(A)} - 3$.

Aufgabe 1.2 [Semantik von Formeln]

a) Sei φ eine Bewertung mit $\varphi(p) = 1$ und $\varphi(q) = \varphi(r) = 0$. Berechnen Sie
$$\varphi(\neg(p \wedge q) \rightarrow r)$$
schrittweise anhand der Definition der Auswertung von Bewertungen.

b) Beweisen oder widerlegen Sie, dass $q \rightarrow (r \rightarrow (p \vee q))$ eine Tautologie ist.

c) Beweisen oder widerlegen Sie, dass $q \rightarrow p \models p \rightarrow q$.

d) Beweisen oder widerlegen Sie, dass $\neg p \vee \neg q \models\!\!\!\dashv \neg(p \wedge q)$.

Aufgabe 1.3 [Deduktionstheorem]

a) Seien $A_1, \ldots, A_n, B$ aussagenlogische Formeln. Zeigen Sie, dass $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \models B$ genau dann, wenn $\models (A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow (\cdots (A_{n-1} \rightarrow (A_n \rightarrow B)) \cdots)))$.

b) Sei Σ eine Menge aussagenlogischer Formeln und B eine aussagenlogische Formel. Zeigen Sie, dass $\Sigma \models B$ genau dann, wenn $\Sigma \cup \{\neg B\}$ unerfüllbar ist.

Aufgabe 1.4 [Pfade in Wurzelbäumen]

Ein *Wurzelbaum* ist ein Baum, in dem ein Knoten als *Wurzel* ausgewählt ist und die Kanten so gerichtet sind, dass ihr Ursprungsknoten näher an der Wurzel liegt als ihr Zielknoten. Ein *Wurzelpfad* ist ein Pfad, der in der Wurzel beginnt (aber nicht notwendigerweise in einem Blatt endet). Für jeden Wurzelpfad P sei $\hat{P}$ die Menge der Knoten, die er trifft. Eine Teilmenge der Knoten heißt *Wurzelpfadmenge*, falls sie von der Form $\hat{P}$ ist für einen Wurzelpfad P.

Seien $V = \{a_1, \ldots, a_n\}$ die Knoten eines Wurzelbaums und $p_1, \ldots, p_n$ Aussagensymbole. Die Teilmengen von V und die Bewertungen auf $p_1, \ldots, p_n$ stehen in Bijektion, wobei die Teilmenge $S \subseteq V$ mit der Belegung φ korrespondiert, für die

$$\varphi(p_i) = 1 \quad \text{genau dann, wenn} \quad a_i \in S$$

für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$.

a) Geben Sie für den nebenstehenden Wurzelbaum eine Formel A an, für die gilt: $\varphi(A) = 1$ genau dann, wenn φ zu einer Wurzelpfadmenge korrespondiert.

$$\begin{tikzcd}
& & a_1 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
& a_2 \arrow[d] & & a_6 \\
& a_3 \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
a_4 & & a_5 &
\end{tikzcd}$$

b) Geben Sie ein allgemeines Verfahren an, das aus einem Wurzelbaum T eine Formel A konstruiert, so dass $\varphi(A) = 1$ genau dann, wenn φ zu einer Wurzelpfadmenge von T korrespondiert.

Abgabe: bis 26. April 2013 12:00 Uhr im Kasten neben Raum 34/401.4