SS 2013 — 30. April 2013

Übungen zur Vorlesung Logik
Blatt 2

Jun.-Prof. Dr. Roland Meyer — Abgabe bis 10. Mai 2013

Aufgabe 2.1 [Vollständige Junktorenmengen]

Wir nennen Formeln A und B *äquivalent*, in Zeichen: $A \mathrel{|}\!\!\!\!=\!\!\!\!\mathrel{|} B$, falls $\varphi(A) = \varphi(B)$ für jede Belegung φ. Für eine Menge M von Junktoren sei $\mathcal{F}(M)$ die Menge der Formeln, in denen als Junktoren nur solche aus M vorkommen. Eine Menge M von Junktoren heißt *vollständig*, wenn es für jede Formel A eine äquivalente Formel $B \in \mathcal{F}(M)$ gibt.

a) Nehmen Sie an, wir hätten den Junktor $\bar{\wedge}$ („NAND"), so dass für Formeln A,B und Belegungen φ gilt: $\varphi(A \bar{\wedge} B) = 1 - \min\{\varphi(A), \varphi(B)\}$. Zeigen Sie mittels struktureller Induktion, dass die Menge $\{\bar{\wedge}\}$ eine vollständige Junktorenmenge ist.

b) Für Belegungen φ_1, φ_2 schreiben wir $\varphi_1 \leqslant \varphi_2$, wenn für jede Aussagenvariable p gilt $\varphi_1(p) \leqslant \varphi_2(p)$. Wir nennen eine Formel A *monoton*, wenn für Belegungen φ_1, φ_2 mit $\varphi_1 \leqslant \varphi_2$ stets gilt $\varphi_1(A) \leqslant \varphi_2(A)$ (mit anderen Worten: die Boolesche Funktion zu A ist monoton). Zeigen Sie mittels struktureller Induktion, dass jede Formel in $\mathcal{F}(\{\wedge, \vee\})$ monoton ist.

c) Folgern Sie aus b), dass $\{\wedge, \vee\}$ keine vollständige Junktorenmenge ist.

d) Zeigen Sie, dass es zu jeder monotonen Formel A eine äquivalente Formel $B \in \mathcal{F}(\{\wedge, \vee\})$ gibt (Hinweis: Passen Sie das Verfahren an, das aus einer Wertetabelle eine DNF abliest und betrachten Sie minimale erfüllende Belegungen).

Aufgabe 2.2 [Logische Äquivalenz]

Zeigen Sie, dass die logische Äquivalenz eine Kongruenzrelation ist, dass also gilt: Wenn $A \mathrel{|}\!\!\!\!=\!\!\!\!\mathrel{|} A'$ und $B \mathrel{|}\!\!\!\!=\!\!\!\!\mathrel{|} B'$, dann gilt auch $\neg A \mathrel{|}\!\!\!\!=\!\!\!\!\mathrel{|} \neg A'$ und $(A * B) \mathrel{|}\!\!\!\!=\!\!\!\!\mathrel{|} (A' * B')$ für jeden binären Junktor $*$.

Aufgabe 2.3 [Horn-Formeln]

Nehmen Sie an, es gäbe auch die atomaren Formeln $\top$ und $\bot$, die für jede Bewertung

$$\varphi(\top) = 1 \quad \text{und} \quad \varphi(\bot) = 0$$

erfüllen. Eine *Hornformel* ist eine Konjunktion von Formeln $(A \rightarrow B)$, wobei A und B jeweils eine Aussagenvariable ist oder eines der Symbole $\top$ und $\bot$. Ein Beispiel für eine solche Formel ist

$$(p \rightarrow q) \wedge (\top \rightarrow p) \wedge (q \rightarrow p) \wedge (r \rightarrow \bot).$$

Geben Sie ein möglichst zeiteffizientes Verfahren an, mit dem entschieden werden kann, ob eine gegebene Hornformel erfüllbar ist (Hinweis: Markieren Sie schrittweise Vorkommnisse von Aussagenvariablen). Begründen Sie, warum Ihr Verfahren schneller ist als das Durchprobieren von Belegungen.

Abgabe: bis 10. Mai 2013 im Kasten neben Raum 34/401.4