

---

Übungen zur Vorlesung Logik  
Blatt 4

Jun.-Prof. Dr. Roland Meyer

Abgabe bis 7. Juni 2013, 12:00 Uhr

---

**Aufgabe 4.1** [Resolutionskalkül]

- a) Seien  $K_1, K_2$  Klauseln und  $I$  ein Literal mit  $I \in K_1$  und  $\neg I \in K_2$ . Außerdem sei  $R$  die Resolvente von  $K_1$  und  $K_2$  nach  $I$ . Zeigen Sie, dass  $\{K_1, K_2\} \models R$ .
- b) Zeigen sie per Resolution, dass  $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow \neg(\neg r \wedge p)$  eine Tautologie ist.

**Aufgabe 4.2** [Resolution als Fixpunktberechnung]Für eine Menge  $A$  von Klauseln schreiben wir

$$\text{Res}(A) = A \cup \{K \mid K \text{ ist Resolvente zweier Klauseln aus } A\},$$

$$\text{Res}^0(A) = A, \quad \text{Res}^{i+1}(A) = \text{Res}(\text{Res}^i(A)) \text{ für } i \geq 1.$$

- a) Formulieren Sie den Resolutionskalkül als schrittweise Berechnung der Mengen  $\text{Res}^i(A)$ .
- b) Geben Sie einen eigenen Satz zur Korrektheit und (Widerlegungs-)Vollständigkeit an.
- c) Zeigen Sie, dass das Verfahren terminiert.

**Aufgabe 4.3** [Duale Formeln]

- a) Für jede Bewertung  $\varphi$  sei  $\varphi'$  definiert durch  $\varphi'(p) = 1 - \varphi(p)$  für alle Variablen  $p$ . Zeigen Sie, dass dann für jede Formel  $A$  gilt  $\varphi'(d(A)) = 1 - \varphi(A)$ .
- b) Schließen Sie aus a), dass für jede Formel  $A$  gilt:  $A$  ist eine Tautologie genau dann, wenn  $d(A)$  unerfüllbar ist. Bedenken Sie, dass in jeder Richtung alle Belegungen behandelt werden müssen.

**Aufgabe 4.4** [Negationsnormalform]

Beweisen Sie mittels struktureller Induktion, dass jede Formel eine äquivalente Formel in Negationsnormalform besitzt. *Hinweis:* Damit die Induktion funktioniert, wählen Sie als Induktionsbehauptung, dass sowohl  $A$  als auch  $\neg A$  eine Negationsnormalform besitzen.

**Aufgabe 4.5** [Tableaus]

Sei  $\Sigma$  eine Formelmengung und  $p, q$  atomare Formeln mit  $\Sigma \vdash_{\tau} p$  und  $\Sigma \vdash_{\tau} p \rightarrow q$ . Beweisen Sie, dass dann auch  $\Sigma \vdash_{\tau} q$ .

**Abgabe: bis 7. Juni 2013, 12:00 Uhr im Kasten neben Raum 34/401.4**