Übungen zur Vorlesung Logik
Blatt 5

Jun.-Prof. Dr. Roland Meyer Abgabe bis 21. Juni 2013 12:00 Uhr

Aufgabe 5.1 [Semantik der Prädikatenlogik]

In den Folien wird die Semantik einer Formel $A \in FO(S)$ in $\mathcal{M} = (D, I)$ definiert als eine Funktion

$$\mathcal{M}[\![A]\!] : D^V \to \mathbb{B}.$$

Da eine Funktion $D^V \to \mathbb{B}$ einer Teilmenge von D^V entspricht (und umgekehrt), können wir die Semantik einer Formel A auch als eine solche definieren.

a) Definieren Sie die Semantik von Formeln $t_1 = t_2$, $p(t_1, \ldots, t_k)$, $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $\exists x A$ und $\forall x A$ an, wenn $\mathcal{M}[\![A]\!]$ stets eine Teilmenge von D^V sein soll. Hinweis: Benutzen Sie Mengenoperatoren.

b) Wie muss, mit der neuen Semantik von Formeln, die Folgerungsbeziehung $\Sigma \models A$ definiert werden?

Aufgabe 5.2 [Mächtigkeit von Domänen]

Für eine Struktur $\mathcal{M} = (D, I)$ schreiben wir $|\mathcal{M}|$ für $|D|$, die Mächtigkeit von D. Wir nennen $\mathcal{M}$ *endlich*, falls die Menge D endlich ist.

a) Geben Sie eine abgeschlossene Formel A an, für die gilt: $\mathcal{M} \models A$ genau dann, wenn $|\mathcal{M}| = 1$.

b) Sei B eine Formel, in der „=“ nicht vorkommt. Wie kann aus einem endlichen Modell $\mathcal{M}$ für B ein Modell $\mathcal{M}'$ für B konstruiert werden, so dass $|\mathcal{M}'| = |\mathcal{M}| + 1$? Dass $\mathcal{M}'$ Modell für B ist, muss hier nicht unbedingt bewiesen werden.

c) Schließen Sie aus b), dass es keine Formel gibt, die ohne „=“ auskommt und äquivalent zu obiger Formel A ist.

Aufgabe 5.3 [Ein Erfüllbarkeitstest]

a) Entwerfen Sie einen Algorithmus, der für eine gegebene endliche Struktur $\mathcal{M} = (D, I)$, eine Belegung $\sigma \in D^V$ und eine Formel A feststellt, ob $\mathcal{M}, \sigma \models A$ gilt. *Übrigens:* Damit haben Sie bewiesen, dass Erfülltsein unter einer gegebenen endlichen Struktur und einer Belegung entscheidbar ist.

b) Gegeben sei eine abgeschlossene Formel A der Form $\exists x_1 \cdots \exists x_n B$, wobei in B keinerlei Quantoren vorkommen. Zeigen Sie: Ist A erfüllbar, so besitzt A ein Modell $\mathcal{M}$ mit $|\mathcal{M}| \leqslant |B|$. (In diesem Fall sagt man auch, die Klasse dieser Formeln besitzt eine *small model property.*)

c) Beweisen Sie unter Verwendung von a) und b): Ist eine abgeschlossene Formel $A \equiv \exists x_1 \cdots \exists x_n B$ wie oben gegeben, so kann algorithmisch festgestellt werden, ob A erfüllbar ist.

Aufgabe 5.4 [Modellierung]

a) Geben Sie Funktionssymbole und Prädikatensymbole an, mittels derer Namen, Adressen und Parteizugehörigkeit von Personen (z.B. in einer Datenbank) modelliert werden können. Es soll dabei die Möglichkeit bestehen, dass zu gewissen Personen nur ein Teil der Angaben vorliegen. Spezifizieren Sie insbesondere Stelligkeiten und intendierte Bedeutung der Funktions- und Prädikatensymbole.

b) Formalisieren Sie folgenden Integritäts-Constraint: „Wenn eine Person der Partei P oder L angehört, dann sind auch Name und Adresse von dieser Person bekannt."

Abgabe: bis 21. Juni 2013 12:00 Uhr im Kasten neben Raum 34/401.4