Übungen zur Vorlesung Logik
Blatt 6

Jun.-Prof. Dr. Roland Meyer Abgabe bis 5. Juli 2013, 12:00 Uhr

Aufgabe 6.1 [Nicht-Standard-Modelle]

Es sei $S = (F, P)$ die Signatur mit Funktionssymbolen $F = \{\mathsf{0}/0, \mathsf{1}/0, +/2, */2\}$ und Prädikatsymbolen $P = \{\leqslant/2\}$. Außerdem sei $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, I_{\mathbb{N}})$ die S-Struktur, in der der Datenbereich aus den natürlichen Zahlen besteht und die Symbole $\mathsf{0}$, $\mathsf{1}$, $+$, $\leqslant$ und $*$ wie üblich interpretiert sind. Schließlich sei $\mathcal{T}_{\mathcal{N}}$ die Menge aller geschlossenen Formeln, für die $\mathcal{N}$ ein Modell ist.

a) Betrachten Sie die Formelmenge

$$\mathcal{T}'_{\mathcal{N}} = \mathcal{T}_{\mathcal{N}} \cup \{\underbrace{\mathsf{1} + \cdots + \mathsf{1}}_{n} \leqslant \mathsf{x} \mid n \geqslant 1\},$$

wobei x eine Variable ist. Zeigen Sie, dass die Formelmenge $\mathcal{T}'_{\mathcal{N}}$ erfüllbar ist. *Hinweis:* Verwenden Sie den Kompaktheitssatz.

b) Es seien $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ Strukturen über derselben Signatur S'. Die Strukturen $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ heißen *elementar äquivalent*, wenn für jede geschlossene Formel A der Prädikatenlogik über S' gilt: $\mathcal{M} \models A$ genau dann, wenn $\mathcal{M}' \models A$. Zeigen Sie, dass jede Struktur $\mathcal{M}$, die $\mathcal{T}'_{\mathcal{N}}$ erfüllt, elementar äquivalent ist zum obigen Modell $\mathcal{N}$.

c) Sind $\mathcal{M} = (D, I)$ und $\mathcal{M}' = (D', I')$ Strukturen über der selben Signatur, dann nennen wir $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ *isomorph*, wenn es eine Bijektion $\varphi : D \to D'$ gibt mit

$$p^{\mathcal{M}}(d_1, \ldots, d_k) = p^{\mathcal{M}'}(\varphi(d_1), \ldots, \varphi(d_k)) \qquad \text{für alle } d_1, \ldots, d_k \in D \text{ und}$$
$$\varphi(f^{\mathcal{M}}(d_1, \ldots, d_\ell)) = f^{\mathcal{M}'}(\varphi(d_1), \ldots, \varphi(d_\ell)) \qquad \text{für alle } d_1, \ldots, d_\ell \in D$$

für jedes k-stellige Prädikatssymbol p und jedes ℓ-stellige Funktionssymbol f. Schließen Sie aus a) und b), dass es eine Struktur gibt, die elementar äquivalent, aber nicht isomorph ist zu $\mathcal{N}$.

Aufgabe 6.2 [Erfüllbarkeit und Folgerung]

Zeigen Sie, dass die folgenden Probleme semi-entscheidbar, aber nicht entscheidbar sind:

a) ~~Gegeben eine prädikatenlogische Formel A entscheide man, ob A erfüllbar ist.~~

b) Gegeben prädikatenlogische Formeln A und B entscheide man, ob $A \models\!\!\!\dashv B$.

Aufgabe 6.3 [Unentscheidbarkeit]

Eine kontextfreie Grammatik heißt *linear*, wenn auf der rechten Seite jeder Regel höchstens ein Nichtterminal-Symbol vorkommt. Zeigen Sie, dass das folgende Problem unentscheidbar ist: Gegeben lineare kontextfreie Grammatiken G_1 und G_2, ist die Menge $L(G_1) \cap L(G_2)$ leer?

Aufgabe 6.4 [Reduktionen]

Es sei $\mathcal{C}$ eine Klasse von Problemen. Ein Problem A heißt $\mathcal{C}$-*schwer*, wenn jedes Problem aus $\mathcal{C}$ auf A many-one-reduzierbar ist. Zeigen Sie: Ist A ein $\mathcal{C}$-schweres Problem und A auf ein Problem B many-one-reduzierbar, dann ist auch B ein $\mathcal{C}$-schweres Problem.

Abgabe: bis 5. Juli 2013, 12:00 Uhr im Kasten neben Raum 34/401.4