
Präsenzübungen zur Vorlesung Logik
Blatt 1

Jun.-Prof. Dr. Roland Meyer

Bearbeitung am 25./26. April 2013

Präsenzaufgabe 1.1 [Kompaktheitssatz]

Beweisen Sie das Korollar zum Kompaktheitssatz: Für eine Formelmenge Σ und eine Formel A gilt $\Sigma \models A$ genau dann, wenn es eine endliche Teilmenge $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ gibt mit $\Sigma_0 \models A$.

Präsenzaufgabe 1.2 [Kompaktheitssatz]

Sei $\Sigma_0 \subseteq \Sigma_1 \subseteq \Sigma_2 \subseteq \dots$ eine Folge von erfüllbaren Formelmengen. Zeigen Sie, dass dann auch $\Sigma = \bigcup_{i \geq 0} \Sigma_i$ erfüllbar ist.

Präsenzaufgabe 1.3 [Normalformen]

Ein *Literal* ist eine Formel der Form p oder $\neg p$, wobei p eine atomare Aussage ist. Eine *Klausel* bzw. *duale Klausel* ist eine Formel der Form

$$L_1 \vee \dots \vee L_n \quad \text{bzw.} \quad L_1 \wedge \dots \wedge L_n,$$

wobei L_1, \dots, L_n Literale sind. Eine Formel ist in *konjunktiver Normalform (KNF)* bzw. *disjunktiver Normalform (DNF)*, wenn sie von der Form

$$K_1 \wedge \dots \wedge K_n \quad \text{bzw.} \quad K_1 \vee \dots \vee K_n$$

ist, wobei K_1, \dots, K_n Klauseln bzw. duale Klauseln sind. Kurz:

- eine Formel in KNF ist eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen, und
- eine Formel in DNF ist eine Disjunktion von Konjunktionen von Literalen.

Entwickeln Sie ein Verfahren, das es erlaubt, anhand einer Wertetabelle eine Formel in

a) DNF

b) KNF

zu finden, die die gegebene Wertetabelle hervorbringt.

Präsenzaufgabe 1.4 [Erfüllbarkeitstests]

Das *Erfüllbarkeitsproblem* besteht darin, für eine gegebene Formel zu entscheiden, ob sie erfüllbar ist oder nicht. Es wird allgemein vermutet, dass es kein schnelles Verfahren gibt, dieses Problem zu lösen.

- a) Geben Sie ein möglichst schnelles Verfahren an, das für eine gegebene Formel in *DNF* entscheidet, ob sie erfüllbar ist oder nicht.

- b) In Präsenzaufgabe 1.3 haben Sie gesehen, dass man zu jeder Formel eine äquivalente in DNF herstellen kann. Erklären Sie, warum der folgende kein schneller Algorithmus für das Erfüllbarkeitsproblem ist:
1. Berechne eine äquivalente Formel in DNF.
 2. Verwende den schnellen Algorithmus aus a), um Erfüllbarkeit zu prüfen.

Präsenzaufgabe 1.5 [Kompaktheit und Kachelungsprobleme]

Nehmen Sie an, Sie wollen $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ kacheln. Sie haben eine endliche Menge an *Kacheltypen*, von denen jeder angibt, welche der vier Seiten einer Kachel welche Farbe trägt. Sie möchten die Ebene dabei so kacheln, dass angrenzende Farben übereinstimmen.

Zeigen Sie: Es gibt eine Kachelung der ganzen Ebene genau dann, wenn es für jeden endlichen Ausschnitt eine Kachelung gibt.