Präsenzübungen zur Vorlesung Logik
Blatt 5

Jun.-Prof. Dr. Roland Meyer Bearbeitung am 20./21. Juni 2013

Präsenzaufgabe 5.1 [Formeln der Prädikatenlogik]

a) Gegeben seien die Formeln $A \equiv \forall x \exists y p(x,y)$ und $B \equiv \exists y \forall x P(x,y)$. Welche von beiden folgt aus der anderen? Sind die Formeln äquivalent?
b) Ist die Formel $\forall x p(x) \to \exists x p(x)$ eine Tautologie?

Präsenzaufgabe 5.2 [Tautologien]
Nehmen Sie an, die prädikatenlogische Formel A' entsteht aus einer aussagenlogischen Formel A, indem jede Aussagenvariable durch eine atomare prädikatenlogische Formel ersetzt wird. Hierbei soll jedes Vorkommen einer Variablen durch die gleiche atomare Formel ersetzt werden. *Beispiel:* Wenn $A \equiv (p \wedge q) \to (p \vee q)$, dann könnte $A' \equiv (r(a,b) \wedge s(c)) \to (r(a,b) \vee s(c))$ sein.

Zeigen Sie: Wenn A eine aussagenlogische Tautologie ist, dann ist A' eine prädikatenlogische Tautologie.

Präsenzaufgabe 5.3 [Eliminierung von „=“]
Mit $\mathsf{FO}^{\neq}(S)$ bezeichnen wir die Menge der prädikatenlogischen Formeln über S, in denen das Symbol „=“ nicht enthalten ist.

a) Geben Sie ein Verfahren an, mit dem aus einer prädikatenlogischen Formel $A \in \mathsf{FO}(S)$ eine Formel erfüllbarkeitsäquivalente Formel $A' \in \mathsf{FO}^{\neq}(S)$ gewonnen werden kann.
b) Beschreiben Sie, wie aus einem Modell für A' ein Modell für A konstruiert werden kann.

Präsenzaufgabe 5.4 [Skolemform]

a) Nehmen Sie an, dass $A \equiv \forall y_1 \cdots \forall y_n \exists z B$. Sei weiterhin $f/n \in \mathsf{Sko}$ ein Skolemsymbol, das nicht in B vorkommt. Zeigen Sie, dass dann

$$\forall y_1 \cdots \forall y_n B\{z/f(y_1, \ldots, y_n)\}$$

erfüllbarkeitsäquivalent ist zu A.
b) Schließen Sie, dass das Verfahren aus Definition 3.26 eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel liefert.
c) Zeigen Sie, dass die Skolemisierung eine Formel liefern kann, die nicht äquivalent zur Eingabeformel ist. Betrachten Sie hierfür z.B. die Formel $\forall x \exists y p(x,y)$.