Präsenzübungen zur Vorlesung Logik
Blatt 6

Jun.-Prof. Dr. Roland Meyer Bearbeitung am 4. und 5. Juli 2013

Präsenzaufgabe 6.1 [Der Kompaktheitssatz für die Prädikatenlogik]
Es sei A eine Formel der Prädikatenlogik erster Stufe, die für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Modell $\mathcal{M}$ besitzt mit $|\mathcal{M}| \geqslant n$.

a) Geben Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Formel B_n an, so dass für jede Struktur $\mathcal{M}$ gilt: $\mathcal{M} \models B_n$ genau dann, wenn $|\mathcal{M}| \geqslant n$.
b) Betrachten Sie die Menge $\Sigma = \{A \wedge B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Zeigen Sie unter Verwendung des Kompaktheitssatzes für Prädikatenlogik erster Stufe, dass Σ erfüllbar ist.
c) Zeigen Sie, dass A ein unendliches Modell besitzt.
d) Schließen Sie, dass es keine Formel E gibt, so dass $\mathcal{M} \models E$ genau dann, wenn $\mathcal{M}$ eine endliche Domäne besitzt.

Präsenzaufgabe 6.2 [Ein Gültigkeitstest]
Zeigen Sie, dass es einen Algorithmus gibt, der, gegeben eine Formel der Form

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \exists y_1 \cdots \exists y_m B,$$

wobei B quantorenfrei ist und keine Funktionssymbole mit Stelligkeit $\geqslant 1$ enthält, feststellt, ob die Formel eine Tautologie ist. *Hinweis:* Betrachten Sie die Herbrand-Expansion.

Präsenzaufgabe 6.3 [Entscheidbare Theorien]
Es sei Σ eine vollständige Theorie, für die es ein rekursiv aufzählbares Axiomensystem gibt. Zeigen Sie, dass Σ rekursiv entscheidbar ist. *Hinweis:* Betrachten Sie Ableitungen im System $\mathcal{F}$.

Präsenzaufgabe 6.4 [Vollständigkeit und Konsistenz]
Zeigen Sie, dass eine Theorie Σ genau dann vollständig ist, wenn es keine Formel A gibt, so dass $T_{\Sigma \cup \{A\}}$ und $T_{\Sigma \cup \{\neg A\}}$ konsistent sind. *Hinweis:* Sie haben also gezeigt, dass Vollständigkeit einer Theorie bedeutet, dass sich diese nicht auf sich widersprechende Weisen konsistent erweitern lässt.