Übungen zur Vorlesung Logik
Blatt 4

Jun.-Prof. Dr. Roland Meyer Abgabe bis 13. Juni 2014, 12:00 Uhr

Aufgabe 4.1 [Formeln der Prädikatenlogik]

Geben Sie zu Ihrer Antwort auf die folgenden Fragen jeweils einen Beweis an.

a) Gegeben seien die Formeln $A \equiv \forall x \exists y p(x,y)$ und $B \equiv \exists y \forall x p(x,y)$. Welche von beiden folgt aus der anderen? Sind die Formeln äquivalent?

b) Ist die Formel $\forall x p(x) \to \exists x p(x)$ eine Tautologie?

Aufgabe 4.2 [Tautologien]

Nehmen Sie an, die prädikatenlogische Formel A' entsteht aus einer aussagenlogischen Formel A, indem jede Aussagenvariable durch eine prädikatenlogische Formel ersetzt wird. Hierbei soll jedes Vorkommen einer Variablen durch die gleiche Formel ersetzt werden. *Beispiel:* Wenn $A \equiv (p \wedge q) \to (p \vee q)$, dann könnte $A' \equiv (r(a,b) \wedge s(c)) \to (r(a,b) \vee s(c))$ sein.

Zeigen Sie: Wenn A eine aussagenlogische Tautologie ist, dann ist A' eine prädikatenlogische Tautologie.

Aufgabe 4.3 [Modellierung]

Drücken Sie die folgenden Aussagen in Prädikatenlogik erster Stufe aus. Spezifizieren Sie dabei insbesondere Stelligkeiten und intendierte Bedeutung der Funktions- und Prädikatensymbole. Dabei soll sich möglichst viel Struktur der Aussage in der Struktur der Formel wiederfinden: Die Aussage „Alle Vögel sind schon da“ soll also nicht mit der Formel p ausgedrückt werden, sondern z.B. mit $\forall x\colon \mathsf{vogel}(x) \to \mathsf{schonda}(x)$.

a) Nur Tage, an denen es nicht regnet, sind gute Tage.

b) Jedes Buch, dessen Autoren alle berühmt sind, ist interessant.

c) Es gibt ein Buch, dessen Autoren alle berühmt sind.

d) Jedes rote Buch ist informativer als jedes blaue.

Aufgabe 4.4 [Semantik der Prädikatenlogik]

In den Folien wird die Semantik einer Formel $A \in FO(S)$ in $\mathcal{M} = (D, I)$ definiert als eine Funktion

$$\mathcal{M}[\![A]\!] : D^V \to \mathbb{B}.$$

Es gibt eine natürliche Entsprechung zwischen Funktionen $D^V \to \mathbb{B}$ und Teilmengen von D^V: Der Funktion $f\colon D^V \to \mathbb{B}$ entspricht die Teilmenge $\{\sigma \in D^V \mid f(\sigma) = 1\}$. Daher können wir die Semantik einer Formel A auch als eine Teilmenge von D^V definieren.

a) Definieren Sie die Semantik von Formeln $t_1 = t_2$, $p(t_1, \dots, t_k)$, $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $\exists x A$ und $\forall x A$ an, wenn $\mathcal{M}[\![A]\!]$ stets eine Teilmenge von D^V sein soll. Die Semantik eines Terms t soll dabei weiterhin eine Abbildung $\mathcal{M}[\![t]\!] \colon D^V \to D$ sein. Hinweis: Benutzen Sie Mengenoperatoren.

b) Geben Sie, unter Verwendung dieser neuen Semantik, eine mögliche Definition für die Beziehung $\Sigma \models A$ an, wobei $\Sigma \subseteq FO(S)$ und $A \in FO(S)$.

Abgabe: bis 13. Juni 2014, 12:00 Uhr im Kasten neben Raum 34/401.4