Präsenzübungen zur Vorlesung Logik
Blatt 4

Jun.-Prof. Dr. Roland Meyer Bearbeitung am 12./13. Juni 2014

Präsenzaufgabe 4.1 [Prädikatenlogik]

Nehmen Sie an, die Signatur S enthalte die Prädikate p_{IstFisch} und $p_{\text{KannSchwimmen}}$. Gegeben sei die Formel $A \equiv \forall x(p_{\text{KannSchwimmen}}(x) \rightarrow p_{\text{IstFisch}}(x))$.

a) Geben Sie eine Struktur $\mathcal{M}$ der Signatur S an mit $\mathcal{M} \models A$.

b) Geben Sie eine Struktur $\mathcal{M} = (D, I)$ der Signatur S an mit $\mathcal{M} \models A$, wobei $D = \{\text{Ente}, \text{Karpfen}, \text{Hering}\}$.

Präsenzaufgabe 4.2 [Skolemform I]

Berechnen Sie mit dem Verfahren aus der Vorlesung zu der Formel

$$\forall x \exists y p(x, f(y)) \wedge \neg \exists y \forall x \exists z \big[q(g(z), f(x)) \vee p(y, z)\big]$$

eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel in Skolemform.

Präsenzaufgabe 4.3 [Skolemform II]

a) Nehmen Sie an, dass $A \equiv \forall y_1 \cdots \forall y_n \exists z B$. Sei weiterhin $f/n \in \mathsf{Sko}$ ein Skolemsymbol, das nicht in B vorkommt. Zeigen Sie, dass dann

$$\forall y_1 \cdots \forall y_n B\{z/f(y_1, \ldots, y_n)\}$$

erfüllbarkeitsäquivalent ist zu A.

b) Schließen Sie, dass das Verfahren aus Definition 4.26 eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel liefert.

c) Zeigen Sie, dass die Skolemisierung eine Formel liefern kann, die nicht äquivalent zur Eingabeformel ist. Betrachten Sie hierfür z.B. die Formel $\forall x \exists y p(x, y)$.

Präsenzaufgabe 4.4 [Ein Erfüllbarkeitstest]

a) Entwerfen Sie einen Algorithmus, der für eine gegebene endliche Struktur $\mathcal{M} = (D, I)$, eine Belegung $\sigma \in D^V$ und eine Formel A feststellt, ob $\mathcal{M}, \sigma \models A$ gilt. *Übrigens:* Damit haben Sie bewiesen, dass Erfülltsein unter einer gegebenen endlichen Struktur und einer Belegung entscheidbar ist.

b) Gegeben sei eine abgeschlossene Formel A der Form $\exists x_1 \cdots \exists x_n B$, wobei in B keinerlei Quantoren vorkommen. Zeigen Sie: Ist A erfüllbar, so besitzt A ein Modell $\mathcal{M} = (D, I)$ mit $|D| \leqslant |B|$. (In diesem Fall sagt man auch, die Klasse dieser Formeln besitzt eine *small model property.*)

c) Beweisen Sie unter Verwendung von a) und b): Ist eine abgeschlossene Formel $A \equiv \exists x_1 \cdots \exists x_n B$ wie oben gegeben, so kann algorithmisch festgestellt werden, ob A erfüllbar ist.