SS 2014 25. Juni 2014

Präsenzübungen zur Vorlesung Logik
Blatt 5

Jun.-Prof. Dr. Roland Meyer Bearbeitung am 26. und 27. Juni 2014

Präsenzaufgabe 5.1 [Unentscheidbarkeit]

Zeigen Sie, dass das folgende Problem unentscheidbar ist: Gegeben eine Signatur S, in der jedes Prädikatensymbol höchstens zweistellig ist und $A \in \mathsf{FO}(S)$, entscheide man, ob A erfüllbar ist.

Präsenzaufgabe 5.2 [Erfüllbarkeit und Äquivalenz]

Zeigen Sie, dass die folgenden Probleme semi-entscheidbar, aber nicht entscheidbar sind:

a) Gegeben eine prädikatenlogische Formel A entscheide man, ob A unerfüllbar ist.

b) Gegeben eine prädikatenlogische Formel A in Skolemform entscheide man, ob A unerfüllbar ist.

c) Gegeben prädikatenlogische Formeln A und B entscheide man, ob $A \models\!\!\!\dashv B$.

Präsenzaufgabe 5.3 [Unentscheidbarkeit]

Eine kontextfreie Grammatik heißt *linear*, wenn auf der rechten Seite jeder Regel höchstens ein Nichtterminal-Symbol vorkommt. Ein Beispiel für eine solche Grammatik ist

$$S \to aSa, \qquad S \to bSb, \qquad S \to a, \qquad S \to b, \qquad S \to \varepsilon,$$

wobei ε das leere Wort bezeichnet. Die von der Beispielgrammatik erzeugte Sprache ist die Menge aller Wörter über a und b, die vorwärts und rückwärts gelesen gleich sind.

a) Zeigen Sie, dass das folgende Problem semi-entscheidbar ist: Gegeben lineare kontextfreie Grammatiken G_1 und G_2, gilt $L(G_1) \cap L(G_2) \neq \emptyset$? Hierbei können Sie benutzen, dass, gegeben ein Wort w und eine kontextfreie Grammatik G, entscheidbar ist, ob $w \in L(G)$.

b) Zeigen Sie, dass das folgende Problem unentscheidbar ist: Gegeben lineare kontextfreie Grammatiken G_1 und G_2, ist die Menge $L(G_1) \cap L(G_2)$ leer?

c) Zeigen Sie, dass das folgende Problem nicht semi-entscheidbar ist: Gegeben lineare kontextfreie Grammatiken G_1 und G_2, ist die Menge $L(G_1) \cap L(G_2)$ leer?

Präsenzaufgabe 5.4 [Reduktionen]

Es sei $\mathcal{C}$ eine Klasse von Problemen. Ein Problem A heißt $\mathcal{C}$*-schwer*, wenn jedes Problem aus $\mathcal{C}$ auf A many-one-reduzierbar ist. Zeigen Sie: Ist A ein $\mathcal{C}$-schweres Problem und A auf ein Problem B many-one-reduzierbar, dann ist auch B ein $\mathcal{C}$-schweres Problem.