Präsenzübungen zur Vorlesung Logik
Blatt 6

Jun.-Prof. Dr. Roland Meyer Bearbeitung am 10. und 11. Juli 2014

Präsenzaufgabe 6.1 [Entscheidbarkeit und Axiomatisierbarkeit]
Es sei T eine vollständige Theorie. Zeigen Sie, dass T genau dann rekursiv entscheidbar ist, wenn es ein rekursiv aufzählbares Axiomensystem gibt, das T erzeugt.

Präsenzaufgabe 6.2 [Vollständigkeit und Konsistenz]
Zeigen Sie, dass eine Theorie Σ genau dann vollständig ist, wenn es keine Formel A gibt, so dass $T_{\Sigma\cup\{A\}}$ und $T_{\Sigma\cup\{\neg A\}}$ konsistent sind. *Hinweis:* Sie haben also gezeigt, dass Vollständigkeit einer Theorie bedeutet, dass sich diese nicht auf sich widersprechende Weisen konsistent erweitern lässt.

Präsenzaufgabe 6.3 [Presburger-Arithmetik]
Betrachten Sie die Signatur S, die keine Prädikatsymbole enthält, aber ein zweistelliges Funktionssymbol „+“. In Formeln über S schreiben wir, wie üblich, statt $+(x, y)$ auch $x+y$. Mit $\mathcal{N}$ bezeichnen wir die Struktur $(\mathbb{N}, +)$ mit Datenbereich $\mathbb{N}$, wobei $+$ wie üblich interpretiert ist. Entsprechend bezeichnet $\mathcal{Z}$ die Struktur $(\mathbb{Z}, +)$, die als Datenbereich statt $\mathbb{N}$ die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ umfasst.

Wir nennen eine Formel $A \in \mathsf{FO}(S)$ *flach*, falls alle atomaren Formeln in A von der Form $x = y$ oder $x + y = z$ sind.

a) Beschreiben Sie, wie zu einer Formel $A \in \mathsf{FO}(S)$ eine flache Formel $A' \in \mathsf{FO}(S)$ konstruiert werden kann, sodass $\mathcal{Z} \models A$ genau dann wenn $\mathcal{Z} \models A'$.
b) Geben Sie ein Verfahren an, mit dem aus einer Formel $A \in \mathsf{FO}(S)$ eine Formel $B \in \mathsf{FO}(S)$ konstruiert werden kann, sodass $\mathcal{Z} \models A$ genau dann, wenn $\mathcal{N} \models B$.
c) Schließen Sie, dass die Theorie erster Stufe der Struktur $\mathcal{Z}$ rekursiv entscheidbar ist.

Präsenzaufgabe 6.4 [Isomorphie und elementare Äquivalenz]
Folgende Definitionen kennen Sie von (Abgabe-)Aufgabe 6.1. Zwei Strukturen $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ über der selben Signatur heißen *elementar äquivalent*, wenn sie die gleichen geschlossenen Formeln erfüllen, wenn also $T_{\mathcal{M}} = T_{\mathcal{M}'}$. Sind $\mathcal{M} = (D, I)$ und $\mathcal{M}' = (D', I')$ Strukturen über der selben Signatur, dann nennen wir $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ *isomorph*, wenn es eine Bijektion $\varphi\colon D \to D'$ gibt mit

$$\begin{aligned} p^{\mathcal{M}}(d_1, \ldots, d_k) &= p^{\mathcal{M}'}(\varphi(d_1), \ldots, \varphi(d_k)) && \text{für alle } d_1, \ldots, d_k \in D \text{ und} \\ \varphi(f^{\mathcal{M}}(d_1, \ldots, d_\ell)) &= f^{\mathcal{M}'}(\varphi(d_1), \ldots, \varphi(d_\ell)) && \text{für alle } d_1, \ldots, d_\ell \in D \end{aligned}$$

für jedes k-stellige Prädikatssymbol p und jedes ℓ-stellige Funktionssymbol f.

In (Abgabe-)Aufgabe 6.1 haben Sie gesehen, dass es Strukturen gibt, die elementar äquivalent sind, obwohl sie nicht isomorph sind. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass dieses Phänomen bei endlichen Strukturen nicht auftritt. Wir betrachten der Einfachheit halber die Signatur $S = (\{f/1\}, \{p/2\})$.

a) Gegeben eine *endliche* S-Struktur $\mathcal{M}$, konstruieren Sie eine geschlossene Formel $A \in \mathsf{FO}(S)$, so dass für jede S-Struktur $\mathcal{M}'$ gilt: $\mathcal{M}' \models A$ genau dann, wenn $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ isomorph sind. Eine explizite Konstruktion des Isomophismus ist hierbei nicht notwendig.

b) Schließen Sie aus der ersten Teilaufgabe, dass je zwei endliche elementar äquivalente Strukturen isomorph sind.