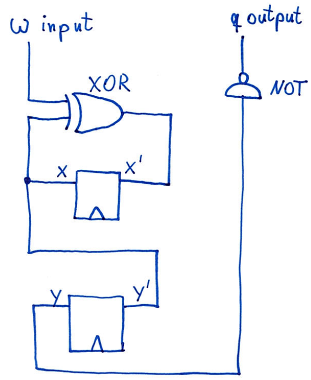
SS 2015 | 22. April 2015

Übungen zur Vorlesung Logik
Blatt 1

Prof. Dr. Roland Meyer | Abgabe bis 4. Mai 2015 12:00 Uhr

Aufgabe 1.1 [Bounded Model-Checking für Schaltwerke]
Betrachten Sie das durch das nebenstehende Diagramm gegebene Schaltwerk. Hier sollen initial die Werte $x = 0$ und $y = 0$ vorliegen.
Prüfen Sie mittels iterativem Bounded Model-Checking, ob die Bedingung AGq in diesem System gegeben ist. Falls die Bedingung nicht gegeben ist, geben Sie einen Ablauf und Eingaben an, die die Bedingung verletzen.
Hinweis: Mehr als vier Iterationen sollten Sie nicht benötigen (möglicherweise genügen sogar weniger).



Aufgabe 1.2 [Bounded Model-Checking für While-Programme]
Betrachten Sie eine imperative Programmiersprache, die

- ausschließlich Boolsche Variablen verwendet,
- als Zuweisungen nur solche der Form $x \leftarrow A$ zulässt, wobei x eine Variable ist und A eine aussagenlogische Formel oder eine Konstante in $\{0, 1\}$ ist,
- While-Blöcke der Form **while** A **do** ... **end while** erlaubt, wobei A eine aussagenlogische Formel ist und
- Zeilen der Form **assert** A enthalten kann.

$x \leftarrow 1$
$y \leftarrow 1$
$z \leftarrow 0$
while $x \vee y$ **do**
  $x \leftarrow \neg y$
  $y \leftarrow x \wedge z$
end while
assert z

Eine Anweisung **assert** A hat keinen Effekt, schlägt aber fehl, wenn die Formel A nicht erfüllt ist. Auf der rechten Seite ist ein Beispiel angegeben.

Beschreiben Sie, analog zum Bounded Model-Checking für Schaltwerke, ein Verfahren, das prüft, ob in einem gegebenen Programm eine **assert**-Anweisung fehlschlägt.

Aufgabe 1.3 [Strukturelle Induktion]
Die *Tiefe* $t(A)$ einer aussagenlogischen Formel A ist wie folgt definiert.

- Ist A eine atomare Formel, so ist $t(A) = 0$.
- Ist $A \equiv (B * C)$ für einen binären Junktor $*$, so gilt

$$t(A) = \max\{t(B), t(C)\} + 1.$$

- Ist $A \equiv \neg(B)$, so definieren wir $t(A) = t(B) + 1$.

Außerdem sei $|A|$ die Länge der Formel A, d.h. die Anzahl der Zeichen in A (Klammern und Junktoren zählen also mit).

Beweisen Sie mit struktureller Induktion *über den Aufbau* der aussagenlogischen Formeln, dass in jeder vollständig geklammerten aussagenlogischen Formel A

a) die Anzahl der öffnenden Klammern mit der Anzahl der schließenden Klammern übereinstimmt.

b) $|A| \leqslant 5k + 1$, wobei k die Anzahl der Junktorenvorkommen in A ist.

c) $|A| \leqslant 4 \cdot 2^{t(A)} - 3$.

Aufgabe 1.4 [Pfade in Wurzelbäumen]

Ein *Wurzelbaum* ist ein Baum, in dem ein Knoten als *Wurzel* ausgewählt ist und die Kanten so gerichtet sind, dass ihr Ursprungsknoten näher an der Wurzel liegt als ihr Zielknoten. Ein *Wurzelpfad* ist ein Pfad, der in der Wurzel beginnt (aber nicht notwendigerweise in einem Blatt endet). Eine Menge M von Knoten heißt *Wurzelpfadmenge*, falls es einen Wurzelpfad gibt, der aus den Knoten in M besteht.

Für eine Menge X von Aussagensymbolen nennen wir eine Abbildung $\varphi : X \to \{0, 1\}$ eine *Belegung von X*. Ist φ eine Belegung von X und A eine Formel über den Variablen in X, so ergibt sich ein Wahrheitswert $\varphi(A)$ in der bekannten Weise.

Es seien $V = \{a_1, \dots, a_n\}$ die Knoten eines Wurzelbaums und $p_1, \dots, p_n$ Aussagensymbole. Die Teilmengen von V und die Belegungen von $\{p_1, \dots, p_n\}$ stehen in Bijektion, wobei die Teilmenge $S \subseteq V$ mit der Belegung φ korrespondiert, für die

$$\varphi(p_i) = 1 \quad \text{genau dann, wenn} \quad a_i \in S$$

für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.

a) Geben Sie für den nebenstehenden Wurzelbaum eine Formel A an, für die gilt: $\varphi(A) = 1$ genau dann, wenn φ zu einer Wurzelpfadmenge korrespondiert.

b) Geben Sie ein allgemeines Verfahren an, das aus einem Wurzelbaum T eine Formel A konstruiert, so dass $\varphi(A) = 1$ genau dann, wenn φ zu einer Wurzelpfadmenge von T korrespondiert.

$$\begin{tikzcd}
 & & a_1 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
 & a_2 \arrow[d] & & a_6 \\
 & a_3 \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
a_4 & & a_5 &
\end{tikzcd}$$

Abgabe: bis 4. Mai 2015 12:00 Uhr im Kasten neben Raum 34/401.4