SS 2015 6. Mai 2015

Übungen zur Vorlesung Logik
Blatt 2

Prof. Dr. Roland Meyer Abgabe bis 15. Mai 2015 12:00 Uhr

Aufgabe 2.1 [Kompaktheitssatz]

Es sei $\Sigma_0 \subseteq \Sigma_1 \subseteq \Sigma_2 \subseteq \cdots$ eine Folge von erfüllbaren Formelmengen. Zeigen Sie, dass dann auch $\Sigma = \bigcup_{i \geqslant 0} \Sigma_i$ erfüllbar ist. Gilt dies auch, wenn nicht vorausgesetzt wird, dass $\Sigma_i \subseteq \Sigma_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$?

Aufgabe 2.2 [Logische Äquivalenz]

Zeigen Sie, dass die logische Äquivalenz eine Kongruenzrelation ist, dass also gilt: Wenn $A \models\mid A'$ und $B \models\mid B'$, dann gilt auch $\neg A \models\mid \neg A'$ und $(A * B) \models\mid (A' * B')$ für jeden binären Junktor $*$ aus der Menge $\{\vee, \wedge, \rightarrow\}$.

Aufgabe 2.3 [Vollständige Junktorenmengen]

In der Vorlesung haben Sie ein Beispiel für einen Induktionsbeweis gesehen, bei dem die Induktionsbehauptung verstärkt werden muss, damit der Beweis per Induktion geführt werden kann. Wir sehen hier ein weiteres Beispiel für dieses Phänomen.

Für eine Menge M von Junktoren sei $\mathcal{F}(M)$ die Menge der Formeln, in denen als Junktoren nur solche aus M vorkommen. Eine Menge M von Junktoren heißt *vollständig*, wenn es für jede Formel A eine äquivalente Formel $B \in \mathcal{F}(M)$ gibt.

Wir wollen zeigen, dass die Menge $\mathcal{F}(\{\vee, \wedge\})$ nur erfüllbare Formeln enthält. Wir möchten daher mit Hilfe von Induktion zeigen, dass jede Formel in $\mathcal{F}(\{\vee, \wedge\})$ erfüllbar ist.

a) Eine denkbare Strategie wäre nun direkt per Induktion zu zeigen, dass jede Formel in $\mathcal{F}(\{\vee, \wedge\})$ erfüllbar ist. Erklären Sie, warum das nicht gelingen wird.

b) Geben Sie eine stärkere Aussage an, die Sie per Induktion beweisen können. „Stärker“ bedeutet hier, dass aus dieser Aussage die Erfüllbarkeit aller Formeln in $\mathcal{F}(\{\vee, \wedge\})$ folgt. *Hinweis:* Die Formeln in $\mathcal{F}(\{\vee, \wedge\})$ sind alle mit einer ganz bestimmten Belegung erfüllbar.

c) Schließen Sie aus der bewiesenen Aussage, dass $\{\vee, \wedge\}$ keine vollständige Operatorenmenge ist.

d) Nehmen Sie an, wir hätten den Junktor $\bar{\wedge}$ („NAND“), so dass für Formeln A,B und Belegungen φ gilt: $\varphi(A \bar{\wedge} B) = 1 - \min\{\varphi(A), \varphi(B)\}$. Zeigen Sie mittels struktureller Induktion, dass die Menge $\{\bar{\wedge}\}$ eine vollständige Junktorenmenge ist.

Abgabe: bis 15. Mai 2015 12:00 Uhr im Kasten neben Raum 34/401.4