SS 2015 17. Juni 2015

Übungen zur Vorlesung Logik
Blatt 5

Prof. Dr. Roland Meyer Abgabe bis 26. Juni 2015 12:00 Uhr

18.06 korrigierte Version

Wenn Sie Interesse an der Teilnahme an einem Logik-Seminar zum Bauen eines SAT-Solvers in der vorlesungsfreien Zeit nach diesem Semester haben, melden Sie sich bis zum **23.06** bei Sebastian Muskalla (**muskalla@cs.uni-kl.de, Raum 34-426**) für die Einführungsveranstaltung an, auf der wir weitere Details zum Seminar bekanntgeben werden. Eine verbindliche Anmeldung zum Seminar findet erst im Anschluss an die Einführungsveranstaltung statt.

Aufgabe 5.1 [Auswerten von prädikatenlogischen Formeln, 1 Punkt]

Gegeben sei die Signatur $S = (Fun, Pred)$ mit

$$\begin{array}{lcll} Fun & = & \{or/_2, & not/_1\} \\ Pred & = & \{might/_1, & is/_1\} \end{array}$$

und die S-Stuktur $\mathcal{M} = (D, I)$ mit

$$D = \{t, f, m\},$$

wobei

$$\begin{array}{llcclll} is^{\mathcal{M}} & (d) & = & 1 & \text{gdw.} & x = t & \text{(und 0 sonst)} \\ might^{\mathcal{M}} & (d) & = & 1 & \text{gdw.} & d \in \{t, m\} & \end{array}$$

und

$$not^{\mathcal{M}}(d) = \begin{cases} f & , d = t, \\ m & , d = m, \\ t & , d = f, \end{cases} \qquad or^{\mathcal{M}}(d, e) = \begin{cases} t & , d = t \text{ oder } e = t, \\ f & , d = f \text{ und } e = f, \\ m & , \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie den Wahrheitswert $\mathcal{M}[\![A]\!](\sigma)$ für eine beliebige Belegung σ und

$$A \equiv \exists x \colon \Big(\big(is(x) \vee is(not(x)) \big) \wedge \forall y : \big(might\big(or(y, x)\big) \rightarrow is\big(or(x, y)\big) \big) \Big)$$

Hinweis: A hat keine freien Variablen, d.h. insbesondere spielt es keine Rolle, welche Werte σ den Variablen zuweist.

Aufgabe 5.2 [Formeln der Prädikatenlogik, 1 Punkt pro Teilaufgabe]

Geben Sie zu Ihrer Antwort auf die folgenden Fragen jeweils einen Beweis an (bzw. ein Gegenbeispiel in Form eines Modells).

a) Seien

$$A \equiv \forall x \exists y \colon p(x,y),$$
$$B \equiv \exists y \forall x \colon p(x,y).$$

Welche der folgenden Beziehungen gelten?

- $A \models B$
- $B \models A$

b) Ist die Formel

$$\big(\forall x \colon p(x)\big) \rightarrow \big(\exists x \colon p(x)\big)$$

eine Tautologie?

Aufgabe 5.3 [Tautologien, 1 Punkt]

Nehmen Sie an, die prädikatenlogische Formel A' entsteht aus einer aussagenlogischen Formel A, indem jede Aussagenvariable durch eine prädikatenlogische Formel ersetzt wird. Hierbei sollen Vorkommen der gleichen Variable auch durch die Gleiche Formel ersetzt werden.

Beispiel:

$$\begin{array}{lcl} A & \equiv & (p \wedge q) \rightarrow (p \vee q) \\ A' & \equiv & (r(a,b) \wedge s(c)) \rightarrow (r(a,b) \vee s(c)) \end{array}$$

Zeigen Sie:
Wenn A eine aussagenlogische Tautologie ist, dann ist A' eine prädikatenlogische Tautologie.

Aufgabe 5.4 [Mächtigkeit von Datenbereichen, 1 Punkt pro Teilaufgabe]

Für eine Struktur $\mathcal{M} = (D, I)$ schreiben wir $|\mathcal{M}|$ für $|D|$, die Mächtigkeit von D. Wir nennen $\mathcal{M}$ *endlich*, falls die Menge D endlich ist.

a) Geben Sie eine abgeschlossene Formel A an, für die gilt:
$\mathcal{M} \models A$ genau dann, wenn $|\mathcal{M}| = 1$.

b) Es sei B eine Formel, in der „=“ nicht vorkommt. Wie kann aus einem endlichen Modell $\mathcal{M}$ für B ein Modell $\mathcal{M}'$ für B konstruiert werden, so dass $|\mathcal{M}'| = |\mathcal{M}| + 1$? Dass $\mathcal{M}'$ Modell für B ist, muss hier nicht unbedingt bewiesen werden.

   Schließen Sie daraus, dass es keine Formel gibt, die ohne „=“ auskommt und äquivalent zur Formel A aus a) ist.

Aufgabe 5.5 [Ein Erfüllbarkeitstest, 1 Punkt pro Teilaufgabe]

a) Entwerfen Sie einen Algorithmus, der für eine gegebene endliche Struktur $\mathcal{M} = (D, I)$, eine Belegung $\sigma \in D^V$ und eine Formel A feststellt, ob $\mathcal{M}, \sigma \models A$ gilt.

   Übrigens: Damit haben Sie bewiesen, dass Erfülltsein unter einer gegebenen endlichen Struktur und einer Belegung entscheidbar ist.

b) Gegeben sei eine abgeschlossene Formel A der Form

$$\exists x_1 \cdots \exists x_n \colon B,$$

   wobei in B keinerlei Quantoren vorkommen.

   Zeigen Sie:
   Ist A erfüllbar, so besitzt A ein Modell $\mathcal{M} = (D, I)$ mit $|D| \leqslant |B|$.

   (In diesem Fall sagt man auch, die Klasse dieser Formeln besitzt eine *small model property.*)

c) Beweisen Sie unter Verwendung von a) und b): Ist eine abgeschlossene Formel

$$A \equiv \exists x_1 \cdots \exists x_n \colon B$$

   wie oben gegeben, so kann algorithmisch festgestellt werden, ob A erfüllbar ist.

Abgabe: bis 26. Juni 2015 12:00 Uhr im Kasten neben Raum 34/401.4