SS 2015 29. April 2015

Präsenzübungen zur Vorlesung Logik
Blatt 1

Prof. Dr. Roland Meyer Bearbeitung am 30. April, 4./5. Mai 2015

Präsenzaufgabe 1.1 [Semantik von Formeln]

a) Sei φ eine Bewertung mit $\varphi(p) = 1$ und $\varphi(q) = \varphi(r) = 0$. Berechnen Sie

$$\varphi(\neg(p \wedge q) \rightarrow r)$$

schrittweise anhand der Definition der Auswertung von Bewertungen.

b) Beweisen oder widerlegen Sie, dass $q \rightarrow (r \rightarrow (p \vee q))$ eine Tautologie ist.

c) Beweisen oder widerlegen Sie, dass $q \rightarrow p \models p \rightarrow q$.

d) Für Formeln A und B schreiben wir $A \mathrel{\models\!\!\!\dashv} B$, falls $A \models B$ und $B \models A$. Beweisen oder widerlegen Sie, dass $\neg p \vee \neg q \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \neg(p \wedge q)$.

Präsenzaufgabe 1.2 [Deduktionstheorem]

a) Das *Deduktionstheorem* besagt, dass für Formelmengen Σ und Formeln A und B gilt: $\Sigma \models A \rightarrow B$ genau dann, wenn $\Sigma \cup \{A\} \models B$. Beweisen Sie das Deduktionstheorem.

b) Seien $A_1, \ldots, A_n, B$ aussagenlogische Formeln. Zeigen Sie, dass $\{A_1, \ldots, A_n\} \models B$ genau dann, wenn $\models (A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow (\cdots (A_{n-1} \rightarrow (A_n \rightarrow B)) \cdots)))$.

c) Sei Σ eine Menge aussagenlogischer Formeln und B eine aussagenlogische Formel. Zeigen Sie, dass $\Sigma \models B$ genau dann, wenn $\Sigma \cup \{\neg B\}$ unerfüllbar ist.

Präsenzaufgabe 1.3 [Aufzählbarkeit von Formeln]

Eine Menge M von Wörtern heißt *aufzählbar*, falls es einen Algorithmus gibt, der genau die Wörter in M nacheinander (in beliebiger Reihenfolge; Mehrfachnennung ist erlaubt) ausgibt. Das heißt, der Algorithmus gibt jedes Wort in M mindestens einmal aus und gibt kein Wort aus, das nicht in M ist. Wenn M unendlich ist, heißt das insbesondere, dass der Algorithmus unendlich lange läuft.

Zeigen Sie, dass die Menge der aussagenlogischen Formeln aufzählbar ist. Nehmen Sie hierfür an, dass die Menge der Aussagenvariablen von der Form $V = \{p_1, p_2, p_3 \ldots\}$ ist.

Präsenzaufgabe 1.4 [Normalformen]

Ein *Literal* ist eine Formel der Form p oder $\neg p$, wobei p eine atomare Aussage ist. Eine *Klausel* bzw. *duale Klausel* ist eine Formel der Form

$$L_1 \vee \cdots \vee L_n \text{ bzw. } L_1 \wedge \cdots \wedge L_n,$$

wobei $L_1, \ldots, L_n$ Literale sind. Eine Formel ist in *konjunktiver Normalform (KNF)* bzw. *disjunktiver Normalform (DNF)*, wenn sie von der Form

$$K_1 \wedge \cdots \wedge K_n \quad \text{bzw.} \quad K_1 \vee \cdots \vee K_n$$

ist, wobei $K_1, \ldots, K_n$ Klauseln bzw. duale Klauseln sind. Kurz:

- eine Formel in KNF ist eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen, und
- eine Formel in DNF ist eine Disjunktion von Konjunktionen von Literalen.

Entwickeln Sie ein Verfahren, das es erlaubt, anhand einer Wertetabelle eine Formel in

a) DNF

b) KNF

zu finden, die die gegebene Wertetabelle hervorbringt.

Präsenzaufgabe 1.5 [Erfüllbarkeitstests]

Das *Erfüllbarkeitsproblem* besteht darin, für eine gegebene Formel zu entscheiden, ob sie erfüllbar ist oder nicht. Es wird allgemein vermutet, dass es kein schnelles Verfahren gibt, dieses Problem zu lösen.

a) Geben Sie ein möglichst schnelles Verfahren an, das für eine gegebene Formel in *DNF* entscheidet, ob sie erfüllbar ist oder nicht.

b) In Präsenzaufgabe 1.4 haben Sie gesehen, dass man zu jeder Formel eine äquivalente in DNF herstellen kann. Erklären Sie, warum der folgende kein schneller Algorithmus für das Erfüllbarkeitsproblem ist:

   1. Berechne eine äquivalente Formel in DNF.
   2. Verwende den schnellen Algorithmus aus a), um Erfüllbarkeit zu prüfen.