SS 2015 13. Mai 2015

Präsenzübungen zur Vorlesung Logik
Blatt 2

Prof. Dr. Roland Meyer Bearbeitung am 15./18./19. Mai 2015

Hinweise:
Sie dürfen füer die Bearbeitung des Aufgabenblatts die folgenden Lemmata verwenden, die in der nächsten Vorlesung bewiesen werden.

Für alle $A, B, C \in \mathcal{F}_0$ gelten:

$\vdash \neg\neg A \to A$	*(Beispiel 2.10)*
$\vdash A \to A$	*(Lemma 0)*
$\vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$	*(Lemma 1)*
$\vdash \neg B \to (B \to A)$	*(Lemma 2)*
$\vdash B \to \neg\neg B$	*(Lemma 3)*
$\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$	*(Lemma 4)*
$\vdash B \to (\neg C \to \neg(B \to C))$	*(Lemma 5)*
$\vdash (A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$	*(Lemma 6)*
$\vdash (B \to A) \to ((\neg B \to A) \to A)$	*(Lemma 7)*

Präsenzaufgabe 2.1 [Inkonsistenzregel]

Zeigen Sie, dass $\Sigma \vdash_{\mathcal{F}_0} A$ genau dann, wenn $\Sigma \cup \{\neg A\}$ inkonsistent ist. Sie können das Deduktionstheorem und die oben angegebenen Lemmata verwenden.

Präsenzaufgabe 2.2 [Korrektheit von $\mathcal{F}_0$]

Ein Kalkül $\mathcal{K}$ heißt *korrekt*, falls für jede Formelmenge Σ und jede Formel A gilt: Wenn $\Sigma \vdash_{\mathcal{K}} A$, dann $\Sigma \models A$. Zeigen Sie durch Induktion über die Länge eines Beweises, dass der Kalkül $\mathcal{F}_0$ korrekt ist.

Präsenzaufgabe 2.3 [Vollständigkeit in Kalkülen]

Sie werden in der Vorlesung sehen, dass der Kalkül $\mathcal{F}_0$ *vollständig* ist, dass sich also jede Tautologie in $\mathcal{F}_0$ ableiten lässt. In dieser Aufgabe lernen Sie einen Kalkül kennen, der nicht vollständig ist.

Gegeben sei der Kalkül $\mathcal{K} = (\mathrm{Ax}, R)$, wobei R nur den Modus Ponens enthält und Ax durch nur ein Axiomenschema gegeben ist, nämlich $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$.

a) Zeigen Sie mittels Induktion nach n, dass für jeden Beweis $B_0, \ldots, B_n$ und für jedes $i \in \{0, \ldots, n\}$ gilt: jede atomare Aussage p kommt in B_i gerade oft vor.

b) Schließen Sie daraus, dass im Kalkül $\mathcal{K}$ nicht jede Tautologie herleitbar ist (selbst wenn in ihr nur $\neg$ und $\to$ als Junktoren auftreten).

Präsenzaufgabe 2.4 [Beweise im Kalkül $\mathcal{F}_0$]

Zeigen Sie

a) $\neg(p \to q) \vdash_{\mathcal{F}_0} q \to p$

b) $r \to \neg(p \to p) \vdash_{\mathcal{F}_0} \neg r$

c) $p \to (q \to r) \vdash_{\mathcal{F}_0} \neg r \to (q \to \neg p)$

d) $\vdash_{\mathcal{F}_0} p \to (\neg q \to \neg(p \to q))$

Sie können die oben angegebenen Lemmata, Präsenzaufgabe 2.1 und das Deduktionstheorem verwenden, *nicht jedoch* die Vollständigkeit von $\mathcal{F}_0$. Die Inkonsistenzregel (Präsenzaufgabe 2.1) soll dabei in mindestens einer Teilaufgabe verwendet und in mindestens einer Teilaufgabe vermieden werden.