SS 2015 8. Juli 2015

Präsenzübungen zur Vorlesung Logik
Blatt 6

Prof. Dr. Roland Meyer Bearbeitung am 9. und 10. Juli 2015

Präsenzaufgabe 6.1 [Der Kompaktheitssatz der Prädikatenlogik I]

Sei S eine Signatur und $\Sigma \subseteq \mathsf{FO}^{\neq}(S)$ eine (potentiell unendlich große) Menge von geschlossenen Formeln in Skolemform, in denen keine Gleichheit verwendet wird.

Zeigen Sie die folgende abgeschwächte Variante des Kompaktheitssatzes der Prädikatenlogik:

Σ ist erfüllbar genau dann wenn jede endliche Teilmenge von Σ erfüllbar ist.

Hinweis: Benutzen Sie die wie folgt definiert Herbrand-Expansion von Σ:

$$E(\Sigma) = \bigcup_{A \in \Sigma} E(A).$$

Präsenzaufgabe 6.2 [Der Kompaktheitssatz der Prädikatenlogik II]

Es sei A eine Formel der Prädikatenlogik erster Stufe, die für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Modell $\mathcal{M}$ besitzt mit $|\mathcal{M}| \geqslant n$.

a) Geben Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Formel B_n an, so dass für jede Struktur $\mathcal{M}$ gilt: $\mathcal{M} \models B_n$ genau dann, wenn $|\mathcal{M}| \geqslant n$.

b) Betrachten Sie die Menge $\Sigma = \{A \wedge B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Zeigen Sie unter Verwendung des Kompaktheitssatzes für Prädikatenlogik erster Stufe, dass Σ erfüllbar ist.

c) Zeigen Sie, dass A ein unendliches Modell besitzt.

d) Schließen Sie, dass es keine Formel E gibt, so dass $\mathcal{M} \models E$ genau dann, wenn $\mathcal{M}$ eine endliche Domäne besitzt.

Präsenzaufgabe 6.3 [Logische Folgerung]

a) Es sei B eine Formel, in der die Variable x nicht frei vorkommt. Zeigen Sie mittels Satz 5.4 und Bemerkung 5.2 in den Folien, dass

$$\models A \rightarrow B \qquad \text{genau dann, wenn} \qquad \models (\exists x : A) \rightarrow B.$$

b) Im Generalisierungstheorem (in Satz 5.4) wird vorausgesetzt, dass x in keiner Formel von Γ frei vorkommt. Zeigen Sie mit einem Beispiel, dass diese Voraussetzung nicht fallengelassen werden kann. Mit anderen Worten: Geben Sie eine Formelmenge Γ und eine Formel A an, für die eine der Aussagen „$\Gamma \models A$“ und „$\Gamma \models \forall x A$“ gilt, die andere aber nicht.

Präsenzaufgabe 6.4 [Nicht-Standard-Modelle, Isomorphie, elementare Äquivalenz]

Zwei Strukturen $\mathcal{M} = (D, I)$ und $\mathcal{M}' = (D', I')$ über der selben Signatur S heißen *elementar äquivalent*, wenn sie die gleichen geschlossenen Formeln erfüllen, also wenn für jede geschlossene Formel $A \in \mathsf{FO}(S)$ gilt:

$$\mathcal{M} \models A \text{ genau dann, wenn } \mathcal{M}' \models A.$$

$\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ heißen *isomorph*, wenn es eine bijektive Abbildung $\varphi : D \to D'$ gibt mit

$$\begin{aligned} p^{\mathcal{M}}(d_1, \dots, d_k) &= p^{\mathcal{M}'}(\varphi(d_1), \dots, \varphi(d_k)) && \text{für alle } d_1, \dots, d_k \in D \text{ und} \\ \varphi(f^{\mathcal{M}}(d_1, \dots, d_\ell)) &= f^{\mathcal{M}'}(\varphi(d_1), \dots, \varphi(d_\ell)) && \text{für alle } d_1, \dots, d_\ell \in D \end{aligned}$$

für jedes k-stellige Prädikatssymbol p und jedes ℓ-stellige Funktionssymbol f.

a) Wir zeigen, dass es möglich ist, dass Strukturen elementar äquivalent, aber nicht isomorph sind.

   Wir fixierten dazu die Signatur

   $$S = (\{\mathsf{0}/0, \mathsf{1}/0, +/2, */2\}, \{\leqslant/2\})$$

   und die S-Struktur $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, I_{\mathbb{N}})$ (wobei die Interpretation der Funktionen und Prädikate wie auf den natürlichen Zahlen üblich ist). Sei $\mathcal{T}_{\mathcal{N}}$ die Menge aller geschlossenen Formeln, für die $\mathcal{N}$ ein Modell ist.

   1) Betrachten Sie die Formelmenge

      $$\mathcal{T}'_{\mathcal{N}} = \mathcal{T}_{\mathcal{N}} \cup \{\underbrace{\mathsf{1} + \cdots + \mathsf{1}}_{n} \leqslant x \mid n \geqslant 1\},$$

      wobei x eine Variable ist. Zeigen Sie, dass die Formelmenge $\mathcal{T}'_{\mathcal{N}}$ erfüllbar ist.

   2) Zeigen Sie, dass jede Struktur $\mathcal{M}$, die $\mathcal{T}'_{\mathcal{N}}$ erfüllt, elementar äquivalent ist zum obigen Modell $\mathcal{N}$.

   3) Schließen Sie aus 1) und 2), dass es eine Struktur gibt, die elementar äquivalent, aber nicht isomorph ist zu $\mathcal{N}$. Hierfür müssen Sie eine Eigenschaft des Modells für $\mathcal{T}'_{\mathcal{N}}$ angeben, die $\mathcal{N}$ nicht besitzt.

b) Wir zeigen, dass das Phänomen aus a) bei endlichen Strukturen nicht auftreten kann. Wir fixieren dazu die Signatur

   $$S = (\{f/1\}, \{p/2\}).$$

   1) Gegeben eine *endliche* S-Struktur $\mathcal{M}$, konstruieren Sie eine geschlossene Formel $A \in \mathsf{FO}(S)$, so dass für jede S-Struktur $\mathcal{M}'$ gilt: $\mathcal{M}' \models A$ genau dann, wenn $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ isomorph sind. Eine explizite Konstruktion des Isomorphismus ist hierbei nicht notwendig.

   2) Schließen Sie aus b)1), dass zwei endliche elementar äquivalente Strukturen auch isomorph sind.