SS 2015 22. Juli 2015

Präsenzübungen zur Vorlesung Logik
Blatt 7

Prof. Dr. Roland Meyer Bearbeitung am 23. und 24. Juli 2015

Hinweise:

- Die Abschlussklausur findet am 21.08 ab 16:30 in Raum **01-106** statt.
- Sie erhalten ihre korrigierte Abgabe zu Blatt 7 entweder ab dem 06.08 zu übliche Bürozeiten in Raum 34-426 oder in der Fragestunde am 13.08 zurück. Die Besprechung des Blattes findet in der Fragestunde statt.
- Wir werden vorraussichtlich am 10.08 bekanntgeben, wer für die Klausur angemeldet und zugelassen ist. Bitte überprüfen Sie dann, ob Sie eingetragen sind und melden Sie sich bei auftretenden Komplikationen direkt.

Präsenzaufgabe 7.1 [Resolution]

Zeigen Sie, dass die Formel

$$\forall z_1[q(z_1)] \vee \neg\forall x[(q(x) \vee r(x)) \wedge \exists z_2[\neg p(z_2) \wedge (p(z_2) \vee \neg r(x))]]$$

eine Tautologie ist. Dies bedeutet, dass Sie

a) die Formel negieren,

b) das Ergebnis in Klauselnormalform (Skolemform und KNF) bringen und

c) auf die Formel in Klauselnormalform das Resolutionsverfahren anwenden.

Präsenzaufgabe 7.2 [Berechnung von MGU]

Entscheiden Sie für jede der folgenden Mengen, ob sie unifizierbar ist und falls ja, bestimmen Sie einen allgemeinsten Unifikator (MGU).

a)

$$\{\ q(f(a,x), z_1),\ q(f(y, g(z_1)),\ h(z_3)),\ q(z_2, h(b))\ \}$$

b)

$$\{\ p(x, f(y)), p(f(a), y)\ \}$$

Präsenzaufgabe 7.3 [Lifting-Lemma]

In der Vorlesung haben wir angenommen, dass die Klauseln, die wir in einem Resolutionsschritt nutzen, variablen-disjunkt sind. Wir zeigen nun, dass diese Annahme wirklich nötig ist und dass wir sie durch eine geeignete umbennenung erzwingen können.

a) Argumentieren Sie, dass sie ohne Variablenumbennenung nicht mittels Resolution zeigen können, dass die Formel

$$A \equiv \forall x\colon p(x) \wedge \neg p(f(x))$$

unerfüllbar ist.

b) In der Vorlesung wurde das Lifting-Lemma für den Fall bewiesen, dass die Klauseln K_1 und K_2 variablen-disjunkt sind. Wir zeigen nun den allgemeinen Fall, sie dürfen dabei die in die Vorlesung gezeigte Spezialversion verwenden.

Seien K_1 und K_2 Klauseln und K'_1 und K'_2 Grundinstanzen dieser Klauseln (d.h. aussagenlogische Formeln, die durch eine Grundsubstitution, also das Ersetzen aller Variablen in K_i durch Terme, entstehen) und sei R' eine (aussagenlogische) Resolvente von K'_1 und K'_2. Dann gibt es eine (prädikatenlogische) Resolvente R von K_1 und K_2, so dass R' eine Grundinstanz von R ist.

Hinweis:
In den Vorlesungsfolien sind Resolventen nur für variablen-disjunkte Klauseln definiert. Verwenden Sie zum Bearbeiten dieser Aufgabe die Definition aus den Notizen zu Resolution auf der Homepage.

c) Begründen Sie, dass durch das Umbenennen die Korrektheit des Verfahrens nicht negativ beeinträchtigt wird. Zeigen Sie dazu exemplarisch, dass die Formel

$$\forall x \forall y\colon p(x) \wedge \neg p(f(x)) \wedge p(y) \wedge \neg p(f(y))$$

logisch äquivalent zur Formel A aus Aufgabenteil a) ist.

Präsenzaufgabe 7.4 [Widerlegungsvollständigkeit der Resolution]

Es sei

$$A \equiv \forall x_1 \cdots \forall x_n\colon B$$

in Skolemform mit B in KNF, d.h.

$$B = K_1 \wedge ... \wedge K_k$$

für Klauseln $K_1, ...K_k$. Zeigen Sie: Für jede Herleitung $K'_1, \ldots, K'_m$ aus Klauseln von Formeln in $E(A)$ in aussagenlogischer Resolution gibt es eine Herleitung $K^*_1, \ldots, K^*_m$ aus B in prädikatenlogischer Resolution, wobei K'_i Grundinstanz von K^*_i ist für $i = 1, ..., m$.

Hinweis:
Führen Sie den Beweis mit Induktion nach m und verwenden Sie das Lifting-Lemma.