Kompaktheitssatz in der Prädikatenlogik erster Stufe

Definition (Semantik von Formelmengen):

Sei S eine Signatur, $\Sigma \subseteq FO(S)$,
$\mathcal{M} = (D, I)$ eine S-Struktur und $\sigma \in D^V$.

(1) Σ gilt in $\mathcal{M}$ unter σ, in Zeichen $\mathcal{M}, \sigma \models \Sigma$,
falls für alle $A \in \Sigma$: $\mathcal{M}[\![A]\!](\sigma) = 1$.

(2) Σ ist erfüllbar, falls es $\mathcal{M}$ und σ gibt
mit $\mathcal{M}, \sigma \models \Sigma$.

Satz (Kompaktheitssatz):

Eine Formelmenge $\Sigma \subseteq FO(S)$ ist erfüllbar
gdw. jede endliche Teilmenge von Σ erfüllbar ist.

Beweis:

„$\Rightarrow$" Per Definition von Gültigkeit für Formelmengen.

„$\Leftarrow$" Nimm zunächst an, $\Sigma \subseteq FO^{\neq}(S)$
und alle $A \in \Sigma$ sind geschlossen und in Skolemnormalform.

Dann

$$\Sigma \text{ erfüllbar}$$

(Ähnlich zum letzten Mal) $\overset{(\Delta)}{\iff} E(\Sigma) := \bigcup_{A \in \Sigma} E(A)$ erfüllbar

(Kompaktheitssatz der Aussagenlogik) $\iff$ Jede endliche Teilmenge von $E(\Sigma)$ ist erfüllbar

Zeige also:
Angenommen jede endliche Teilmenge von Σ erfüllbar,
dann ist jede endliche Teilmenge von $E(\Sigma)$ erfüllbar.

Sei $\Sigma^{\text{fin}}_{E(\Sigma)} \subseteq E(\Sigma)$ endlich.

Dann gibt es $\Sigma^{\text{fin}} \subseteq \Sigma$ endlich mit

$$\Sigma^{\text{fin}}_{E(\Sigma)} \subseteq E(\Sigma^{\text{fin}}).$$

Da Σ^{fin} endlich ist, ist es per Annahme erfüllbar.
Mit obiger Äquivalenz (Δ) ist

$$E(\Sigma^{\text{fin}}) \text{ erfüllbar.}$$

Also ist auch $\Sigma^{\text{fin}}_{E(\Sigma)}$ erfüllbar.

Bleibt der Fall beliebiger Formeln $\Sigma \subseteq FO(S)$
zu betrachten:

- Ersetze freie Variablen x durch frische Konstanten a ab.
  Beachte, dass x überall durch dasselbe a ersetzt wird.
  Ergibt $\Sigma' \subseteq FO(S \cup Const)$
- Eliminiere Gleichheit durch Einführung
  eines neuen Prädikats gl
  und neuer Formeln, die Kongruenz fordern.
  Ergibt $\Sigma'' \subseteq FO(S \cup Const \cup \{gl\})$
- Bilde Skolemnormalformen der Formeln.
  Achte darauf, dass verschiedene Formeln
  auch verschiedene Skolemfunktionen nutzen:
  $\Sigma''' \subseteq FO(S \cup Const \cup \{gl\} \cup Sko)$.

$\square$

Konsequenz des Kompaktheitssatzes: Existenz von Nicht-Standardmodellen

Betrachte die Signatur der Arithmetik (natürliche Zahlen):

$$S_{Arith} = (\{+/_2, \cdot/_2, 0/_0, 1/_0\}, \{</_2\})$$

Zeige:

Es gibt Strukturen

$$\mathcal{N}^* = (D^*, I^*)$$

mit merkwürdigen D^*, $I^*(+)$, $I^*(\cdot)$, … .

↳ die dieselben geschlossenen $FO(S_{Arith})$-Formeln erfüllen wie

$$\mathcal{N} = (\mathbb{N}, I) \text{ mit } I(+), I(\cdot), \dots \text{ wie erwartet,}$$

↳ aber die nicht isomorph zu $\mathcal{N}$ sind.

Diese Modelle heißen Nicht-Standardmodelle.

Umformuliert:

Wichtige Eigenschaften der natürlichen Zahlen lassen sich nicht in FO fassen.

Anwendungen:

Nicht-Standardmodelle der reellen Arithmetik in der Nichtstandardanalysis.

↳ Anwendungen in der Computeralgebra

↳ Anwendungen in der Verifikation hybrider Systeme (Zug- und Flugzeugcontroller).

Satz:

Es gibt Nicht-Standardmodelle der Arithmetik.

Beweis:

Definiere $A_n \equiv \underbrace{1+\ldots+1}_{n\text{-Mal}} < x$ mit x frei.

Betrachte

$$\Sigma := \{ A \in FO(S_{\mathbb{N},\mathbb{R}}) \text{ geschlossen} \mid \mathcal{N} \models A \}$$
$$\cup \{ A_n \mid n \in \mathbb{N} \}.$$

- Jede endliche Teilmenge $\Sigma^{fin} \subseteq \Sigma$ ist erfüllbar.
  Wähle dazu das Standardmodell $\mathcal{N}$.
  Da Σ^{fin} nur endlich viele A_n enthält,
  findet man einen Wert für x, der groß genug ist.

- Mit dem Kompaktheitsatz der Prädikatenlogik
  ist auch Σ erfüllbar.
  Jedes Modell $\mathcal{N}^*$ von Σ muss
  (a) alle geschlossenen $FO(S_{\mathbb{N},\mathbb{R}})$-Formeln erfüllen,
  die im Standardmodell $\mathcal{N}$ gelten.
  (b) für x ein Element besitzen, das größer ist (mit $I^*(<)$)
  als alle $1+\ldots+1$,
  eine Art "unendliche natürliche Zahl".

Mit (b) kann das Modell $\mathcal{N}^*$ <u>nicht</u>
zum Standardmodell $\mathcal{N}$ isomorph sein.
Mit (a) sind aber $\mathcal{N}^*$ und $\mathcal{N}$ <u>nicht</u>
durch geschlossene $FO(S_{\mathbb{N},\mathbb{R}})$-Formeln unterscheidbar. $\square$