Syntax und Semantik der Prädikatenlogik

Beispiel:

$$H \equiv \forall x\, \forall y : ((iH(x) \wedge iF(y)) \to wDR(x) < wDR(y))$$

Intention:

- iH soll heißen "istHund"
- iF soll heißen "istFisch"
- wDR soll heißen "weiteDerReise".

Signatur:

$$S_{HF} = (\{wDR/_1,\ nem/_0,\ las/_0\},\ \{iH/_1,\ iF/_1,\ </_2\}).$$

Terme und Formeln:

$$\underbrace{\forall x\, \underbrace{\forall y : \underbrace{(\underbrace{(\underbrace{iH(\underbrace{x}_{T})}_{aF} \wedge \underbrace{iF(\underbrace{y}_{T})}_{aF})}_{F} \to \underbrace{\underbrace{wDR(\underbrace{x}_{T})}_{T} < \underbrace{wDR(\underbrace{y}_{T})}_{T}}_{aF})}_{F}}_{F}}_{F}$$

Dabei bedeutet

- T: das Element ist in $Term(S_{HF})$
- aF: das Element ist eine atomare Formel aus $FO(S_{HF})$
- F: das Element ist eine Formel aus $FO(S_{HF})$.

Die obige Herleitung zeigt

$$H \in FO(S_{HF}).$$

Freie und gebundene Vorkommen von Variablen:

Sei $\mathcal{B} \equiv iH(x) \wedge iF(y)$

und damit

$$A \equiv \forall x \forall y : (\mathcal{B} \rightarrow wOR(x) < wOR(y)).$$

Nun gilt:

$$x, y \in FV(\mathcal{B})$$

und

$$x, y \in GV(A).$$

Damit ist A eine geschlossene Formel.
Außerdem können Variablen in einer Teilformel frei vorkommen, obwohl sie in der gesamten Formel gebunden sind.

Struktur:

$$\mathcal{M}_{HF} = (D_{HF}, I_{HF})$$

mit

$$D_{HF} := \mathbb{N} \cup \{Lassie, Nemo\} \cup \{\bot\}$$

$$I_{HF}(las) = las^{\mathcal{M}_{HF}} = Lassie \quad (\in D_{HF})$$

$$I_{HF}(nem) = nem^{\mathcal{M}_{HF}} = Nemo \quad (\in D_{HF})$$

$$\begin{aligned} I_{HF}(wOR): D_{HF} &\rightarrow D_{HF} \\ Lassie &\mapsto 268 \\ Nemo &\mapsto 12359 \\ a &\mapsto \bot, \text{ falls } a \in D_{HF} \setminus \{Lassie, Nemo\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{HF}(iF): D_{HF} &\rightarrow \mathbb{B} \\ Nemo &\mapsto 1 \\ a &\mapsto 0, \text{ falls } a \in D_{HF} \setminus \{Nemo\}. \end{aligned}$$

$$I_{HF}(iH): D_{HF} \to \mathbb{B}$$
$$\text{Lassie} \mapsto 1$$
$$a \mapsto 0, \text{ falls } a \in D_{HF} \setminus \{\text{Lassie}\}.$$

$$I_{HF}(<): D_{HF} \times D_{HF} \to \mathbb{B},$$
$$(I_{HF}(<))(a,b) := \begin{cases} 1, & \text{falls } a,b \in \mathbb{N} \text{ und } a <_{\mathbb{N}} b \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

<u>Semantik eines Terms:</u>

Sei $\sigma(y) = \text{Nemo}$.

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}_{HF}[\![wOR(y)]\!](\sigma) \\ &= wOR^{\mathcal{M}_{HF}}(\mathcal{M}_{HF}[\![y]\!](\sigma)) \\ &= wOR^{\mathcal{M}_{HF}}(\sigma(y)) \\ &= wOR^{\mathcal{M}_{HF}}(\text{Nemo}) \\ &= 12359. \end{aligned}$$

<u>Semantik der Formel R:</u>

Um $\mathcal{M}_{HF}[\![R]\!] = 1$ zu erhalten,
betrachte <u>alle</u> $d_1 \in D_{HF}$ und zeige

$$\mathcal{M}_{HF}[\![\forall y: ((iH(x) \wedge iF(y)) \to wOR(x) < wOR(y))]\!](\{x/d_1\}) = 1$$

Um diese Wahrheitswerte zu erhalten, betrachte wiederum
<u>alle</u> $d_2 \in D_{HF}$ für y und zeige:

$$\mathcal{M}_{HF}[\![\underbrace{(iH(x) \wedge iF(y))}_{=:B} \to \underbrace{wOR(x) < wOR(y)}_{=:C}]\!](\{x/d_1, y/d_2\}) = 1$$

1. Fall: $d_1 = \text{Lassie}$ und $d_2 = \text{Nemo}$

Bestimme

$$\mathcal{M}_{HF} [\![iH(x) \wedge iF(y)]\!] (\{x/\text{Lassie}, y/\text{Nemo}\})$$

$$= \min(\mathcal{M}_{HF} [\![iH(x)]\!] (\{x/\text{Lassie}, y/\text{Nemo}\}),$$
$$\mathcal{M}_{HF} [\![iF(y)]\!] (\{x/\text{Lassie}, y/\text{Nemo}\}))$$

$$= \min(iH^{\mathcal{M}_{HF}}(\mathcal{M}_{HF} [\![x]\!] (\{x/\text{Lassie}, y/\text{Nemo}\})),$$
$$iF^{\mathcal{M}_{HF}}(\mathcal{M}_{HF} [\![y]\!] (\{x/\text{Lassie}, y/\text{Nemo}\})))$$

$$= \min(iH^{\mathcal{M}_{HF}}(\{x/\text{Lassie}, y/\text{Nemo}\}(x)),$$
$$iF^{\mathcal{M}_{HF}}(\{x/\text{Lassie}, y/\text{Nemo}\}(y)))$$

$$= \min(iH^{\mathcal{M}_{HF}}(\text{Lassie}), iF^{\mathcal{M}_{HF}}(\text{Nemo}))$$

$$= \min(1, 1)$$

$$= 1.$$

Im Folgenden sei $\sigma_{HF} = \{x/\text{Lassie}, y/\text{Nemo}\}$.

Bestimme

$$\mathcal{M}_{HF} [\![wDR(x) < wDR(y)]\!] (\sigma_{HF})$$

$$= <^{\mathcal{M}_{HF}}(\mathcal{M}_{HF} [\![wDR(x)]\!] (\sigma_{HF}), \mathcal{M}_{HF} [\![wDR(y)]\!] (\sigma_{HF}))$$

$$= <^{\mathcal{M}_{HF}}(wDR^{\mathcal{M}_{HF}}(\mathcal{M}_{HF} [\![x]\!] (\sigma_{HF})),$$
$$wDR^{\mathcal{M}_{HF}}(\mathcal{M}_{HF} [\![y]\!] (\sigma_{HF})))$$

$$= <^{\mathcal{M}_{HF}}(wDR^{\mathcal{M}_{HF}}(\sigma_{HF}(x)), wDR^{\mathcal{M}_{HF}}(\sigma_{HF}(y)))$$

$$= <^{\mathcal{M}_{HF}}(wDR^{\mathcal{M}_{HF}}(\text{Lassie}), wDR^{\mathcal{M}_{HF}}(\text{Nemo}))$$

$$= <^{\mathcal{M}_{HF}}(268, 12359)$$

$$= 1.$$

Da $\mathcal{M}_{HF}[\![B]\!](\sigma_{HF}) = 1$ und $\mathcal{M}_{HF}[\![C]\!](\sigma_{HF}) = 1$, folgt $\mathcal{M}_{HF}[\![B \to C]\!](\sigma_{HF}) = 1$.

Für jede andere Belegung $\sigma \neq \sigma_{HF}$ gilt

$$\mathcal{M}_{HF}[\![B]\!](\sigma) = 0$$

und so

$$\mathcal{M}_{HF}[\![B \to C]\!](\sigma) = 1.$$

Da nun alle Elemente des Datenbereichs geprüft sind, gilt

$$\mathcal{M}_{HF}[\![A]\!] = 1.$$

Nichtstandardmodelle:

Ein unerwartetes Modell der Formel A ist folgende Struktur

$$\mathcal{M}_{strange} = (D_{strange}, I_{strange})$$

mit

$$D_{strange} = \{Fury, Flipper\}$$

$$(I_{strange}(iH))(a) := \begin{cases} 1, & \text{falls } a = Fury \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(I_{strange}(iF))(b) := 0, \text{ immer.}$$

$$(I_{strange}(wOR))(a) := Fury$$

$$(I_{strange}(<))(a,b) := 1, \text{ immer.}$$

Behauptung: $\mathcal{M}_{strange} \models A$. Warum? Es gilt nie $iF(y)$.