Strukturelle Induktion über Aussagen

Jonathan Kolberg, Sebastian Muskalla

1 Vollständige Induktion

Jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist

- entweder 0,
- oder von der Form $n = n' + 1$, wobei n' eine kleinere natürliche Zahl ist,

und jede natürliche Zahl lässt sich ausgehend von 0 in endlich vielen Schritten so konstruieren.

Diese Eigenschaft haben wir in Beweisen mittels vollständiger Induktion ausgenutzt: Wenn wir eine Aussage der Form

$$\text{Für alle } n \in \mathbb{N} : X(n) \text{ ist wahr}$$

gegeben haben (wobei $X(n)$ für jede natürliche Zahl n eine Aussage ist, z.B. $X(n) = n^2 \geq n$), und ihre Wahrheit beweisen wollen, so ist es ausreichend zu zeigen:

- $X(0)$ ist wahr (*Induktionsanfang*),
- Wenn $X(n)$ wahr ist (*Induktionsvoraussetzung*), dann ist auch $X(n+1)$ wahr (*Induktionsschritt*).

Wir wollen dieses Beweisverfahren auf andere Dinge, die induktiv definiert sind anwenden.

2 Notation

$A \equiv B$	A und B sind syntaktisch, d.h. Buchstabe für Buchstabe gleich
$A \models\!\mid B$	A und B sind logisch äquivalent, d.h. eine Bewertung bewertet A mit wahr, genau dann wenn sie B mit wahr bewertet
A atomare Aussage	$A \equiv p$, wobei p eine der Aussagevariablen ist
$F(M)$	Menge der Formeln, die nur mit atomaren Aussagen und Operatoren aus M konstruiert werden können (z.B. $F(\{\neg, \vee\})$ Menge der Aussagen, die sich nur aus atomaren Aussagen, Negation und Oder konstruieren lassen)

3 Induktive Definition von Aussageformen

Jede Aussageform A ist

- entweder eine atomare Aussage, d.h. $A \equiv p$ für eine Aussagevariable p,
- oder von der Form $(\neg B)$ für eine "kleinere" Aussageform B,
- oder von der Form $(A * B)$ für "kleinere" Aussageformen A, B und einen Operator $* \in \{\vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \wedge\}$,

und jede Aussageform lässt sich ausgehend von atomaren Aussagen in endlich vielen Schritten auf diese Art und Weise konstruieren.
Genau wie wir die induktive Definition der natürlichen Zahlen ausgenutzt haben, um Beweise mittels vollständiger Induktion zu führen, können wir die induktive Definition der Aussagenformen ausnutzen, um Beweise mittels struktureller Induktion zu führen. Wenn wir eine Aussage der Form

$$\text{Für alle Formeln } A : X(A) \text{ist wahr}$$

beweisen wollen, reicht es zu zeigen:

- $X(A)$ ist wahr für atomare Aussagen (*Induktionsanfang*),
- Wenn $X(A)$ wahr ist (*Induktionsvoraussetzung*), dann ist auch $X(\neg A)$ wahr (*Induktionsschritt*).
- Wenn $X(A)$ und $X(B)$ wahr sind (*Induktionsvoraussetzung*), dann ist auch $X(A \star B)$ wahr für alle Operatoren $* \in \{\vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \wedge\}$ (*Induktionsschritt*).

4 Beispiel

Behauptung
Die Menge $\{false, \rightarrow\}$ ist eine vollständige Operatorenmenge.

Beweis.
Wir müssen zeigen: Zu jeder Formel A existiert eine logisch äquivalente Formel B, die nur false und $\rightarrow$ benutzt. Anders ausgedrückt: Zu jeder Formel A existiert $B \in F(\{false, \rightarrow\})$ mit $A \models\!\mid B$.
In der Notation von oben wäre

$$X(A) = \text{"es existiert } B \in F(\{false, \rightarrow\}) \text{ mit } A \models\!\mid B\text{".}$$

Wir beweisen diese Aussage mittels struktureller Induktion. Um viele Fallunterscheidungen zu vermeiden, nutzen wir, dass wir in der Vorlesung gesehen haben, dass $A \in F(\{\neg, \rightarrow\})$ eine vollständige Operatormenge ist, das heisst wir können bereits davon ausgehen, dass unsere Formel A

- entweder eine atomare Aussage, d.h. $A \equiv p$ für eine Aussagevariable p,

- oder von der Form $(\neg B)$ für eine "kleinere" Aussageform B,
- oder von der Form $(A \to B)$ für "kleinere" Aussageformen B, C ist.

(Diese Definition ist ebenfalls induktiv, daher funktioniert das selbe Prinzip, wir benötigen bloss weniger Fallunterscheidungen im Induktionsschritt.)

Induktionanfang
Sei $A \in F(\{\neg, \to\})$ atomar, d.h. $A \equiv p$ für eine Aussagenvariable p. Da A keine Junktoren enthält gilt $A \in F(\{false, \to\})$ und A ist natürlich logisch äquivalent zu sich selbst.

Induktionsvorraussetzung
Seien Formeln $B, C \in F(\{\neg, \to\})$ gegeben, so dass die Behauptung für sie gilt, d.h. es existieren $B', C' \in F(\{false, \to\})$ mit $B \models\mid B'$ und $C \models\mid C'$.

Induktionsschritt

- Fall $A \equiv (\neg B)$:

$$\begin{aligned}
\varphi(A) &= \varphi(\neg(B)) \\
&= 1 - \varphi(B) \\
&= \max\{1 - \varphi(B), 0\} \\
&= \max\{1 - \varphi(B), \varphi(\text{false})\} \\
&= \varphi(B \to \text{false}) \\
&\overset{\text{IV}}{=} \varphi(\underbrace{B' \to \text{false}}_{\in F(\{false, \to\})})
\end{aligned}$$

  Das heisst, wir haben mit $B' \to$ false eine Aussage in $F(\{false, \to\})$ gefunden, die zu A logisch äquivalent ist, denn laut Induktionsvoraussetzung ist B' in $F(\{false, \to\})$.

- Fall $A \equiv (B \to C)$:

$$\begin{aligned}
\varphi(A) &= \varphi((B \to C)) \\
&= \max\{1 - \varphi(B), \varphi(C)\} \\
&\overset{\text{IV}}{=} \max\{1 - \varphi(B'), \varphi(C')\} \\
&= \varphi(\underbrace{B' \to C'}_{\in F(\{false, \to\})})
\end{aligned}$$

  Das heisst, wir haben mit $B' \to C'$ eine Aussage in $F(\{false, \to\})$ gefunden, die zu A logisch äquivalent ist, denn laut der Induktionsvoraussetzung sind B', C' in $F(\{false, \to\})$.

$\square$