Technische Universität Braunschweig

Institut für Theoretische Informatik

Dr. Jürgen Koslowski

Einführung in die Logik

Aufgabenblatt 2, 2017-04-25

Übungsaufgabe 14

(Vergl. Abschnitt A.3 im Skript.) Da die ordnungstheoretischen Begriffe wie Supremum, Infimum, Distributivität u.ä, auf der linear geordneten Menge $\{0,1\}$ der Wahrheitswerte nicht besonders spannend sind, sollen sie an einem anderen Beispiel illustriert werden. Wir betrachten die Teilbarkeitsrelation $|$ auf der Menge $\mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$ der natürlichen Zahlen. Genauer: $v|u$ genau dann wenn es eine Zahl w gibt mit $u = v \cdot w$.

(a) Zeigen Sie, dass $\langle \mathbb{N}, | \rangle$ eine halbgeordnete Menge ist.

(b) Gibt es ein kleinstes bzw. größtes Element bzgl. $|$? Wenn ja, welches?

(c) Identifizieren Sie auf $\langle \mathbb{N}, | \rangle$ die Operationen, die zwei Elementen die größte untere bzw. die kleinste obere Schranke zuordnen.

(d) Erfüllen diese beiden Operationen die Distributivgesetze?

(e) Handelt es sich bei $\langle \mathbb{N}, | \rangle$ um eine Boole'sche Algebra?

Lösungsvorschlag:

(a)
- Wegen $n = n \cdot 1$ gilt $n|n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Also ist $|$ reflexiv.
- Aus $\ell = m \cdot k$ und $m = n \cdot j$ folgt $\ell = n \cdot (j \cdot k)$. Also ist $|$ transitiv.
- Aus $m = n \cdot k$ und $n = m \cdot j$ folgt $m = m \cdot j \cdot k$, also $j \cdot j = 1$, also $j = k = 1$, und damit $m = n$. Also ist $|$ antisymmetrisch.

(b) Kleinstes Element 1, denn 1 teilt jede Zahl; größtes Element 0, denn wegen $0 = n \cdot 0$ teilt n die 0 (dies bereitet manchen Leuten Schwierigkeiten).

(c) größte untere Schranke: ggT, kleinste obere Schranke: kgV. Man beachte auch $\mathrm{ggT}(n, 0) = n = \mathrm{kgV}(n, 1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(d) dies ist evtl. etwas mühsam: vielleicht ist es nützlich, ggT und kgV erst für primfaktorzerlegte Zahlen zu betrachten; dabei wird für jede relevante Primzahl das Minimum bzw. Maximum der beiden Exponenten bzgl. $\leq$ verwendet, und man kann das Problem auf die Distributivität von Minimum und Maximum in $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ zurückführen.

(e) Es ist keine Boole'sche Algebra, da es keine Komplemente gibt. Zwar gilt für alle Zahlen m, n ohne gemeinsame Primfaktoren $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$, aber das kgV nimmt nie den Wert 0 an, wenn beide Argumente von 0 verschieden sind.

Übungsaufgabe 15

Der Begriff der Größe einer Formel funktioniert natürlich auch mit den abgeleiteten Junktoren $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\oplus$ und $\uparrow$ ("nand", "nicht beide"). Im folgenden interessiert uns davon aber nur $\Rightarrow$.

Finden Sie eine kleinste Formel, die zu der gegebenen Formel äquivalent ist. Beweisen Sie die Äquivalenz und die Minimalität der Länge.

(a) $X \Rightarrow X \wedge Y$

(b) $(Y \Rightarrow X) \vee X$

(c) $((X \Rightarrow Y) \Rightarrow (Y \Rightarrow Z)) \Rightarrow (X \Rightarrow Z)$

Lösungsvorschlag:

Hinsichtlich der Größe stellen wir fest, dass die kleinste mögliche Formel, in der an n Stellen Variablen auftreten, nicht weniger als $n-1$ binäre Junktoren enthalten kann. Ziel muß es also sein, mehrfaches Auftreten derselben Variable so weit wie möglich zu verhindern.

(a) Die Definition von $\Rightarrow$, die Distributivität von $\vee$ über $\wedge$ und die Komplementarität von X und $\neg X$ liefern

$$X \Rightarrow X \wedge Y \equiv \neg X \vee (X \wedge Y) \equiv \top \wedge (\neg X \vee Y) \equiv \neg X \vee Y \equiv X \Rightarrow Y$$

(b) Unter Verwendung der Definition von $\Rightarrow$ und der Assoziativität, der Kommutativität und der Idempotenz von $\vee$ ergibt sich

$$(Y \Rightarrow X) \vee X \equiv (X \vee \neg Y) \vee X \equiv \neg Y \vee X \equiv Y \Rightarrow X$$

(c) Aus der Definition von $\Rightarrow$, der Distributivität von v über $\wedge$, der Absorbtionseigenschaft von $\top$, der Idempotenz von $\wedge$ und der Kommutativität von $\vee$ ergibt sich

$$\begin{aligned}((X \Rightarrow Y) \Rightarrow (Y \Rightarrow Z)) \Rightarrow (X \Rightarrow Z) &\equiv (Z \vee \neg X) \vee (\neg Z \wedge Y \wedge (Y \vee \neg X)) \\ &\equiv (Z \vee \neg X \vee \neg Z) \wedge (Z \vee \neg X \vee Y) \wedge (Z \vee \neg X \vee Y) \\ &\equiv \top \wedge (Z \vee \neg X \vee Y) \\ &\equiv Z \vee \neg X \vee Y \\ &\equiv X \Rightarrow Y \vee Z\end{aligned}$$

Aufgabe 16 [8 PUNKTE]

Argumentieren Sie mit allgemeinen Belegungen und vermeiden Sie Wahrheitstafeln:

(a) [4 Punkte] Beweisen Sie die folgenden Aquivalenzen (die so genannten Absorbtionsregeln):

$$A \wedge (A \vee B) \equiv A \qquad \text{und} \qquad A \vee (A \wedge B) \equiv A$$

(b) [4 Punkte] Zeigen Sie, dass die Formel $(A \vee B \vee C) \wedge (B \vee D) \wedge \neg B \wedge (A \Rightarrow B) \wedge ((C \wedge D) \Rightarrow B)$ nicht erfüllbar ist.

Aufgabe 17 [10 PUNKTE]

Es gibt maximal $16 = 2^4$ verschiedene Wahrheitstabellen für Formeln, in denen genau zwei verschiedene Atome vorkommen (mehrfaches Auftreten ist erlaubt), die also vier auf diesen Atomen verschiedene Belegungen zulassen.

(a) [2 PUNKTE] Warum ist die Anzahl dieser Tabellen, die sich mit aussagenlogischen Formeln in den Junktoren $\{\neg, \wedge, \vee\}$ realisieren lassen, gerade?

(b) [2 PUNKTE] Welche Eigenschaft muß eine minimale Menge von Formeln des obigen Typs haben, damit wir schließen können, dass alle Tabellen realisierbar sind? Wieviele derartige Mengen gibt es?

(c) [8 PUNKTE] Finden Sie eine solche Formelmenge.

Aufgabe 18 [12 PUNKTE]

Donald Duck will seine Neffen Tick, Trick und Track zum Bierholen in den Supermarkt schicken. Das stößt allerdings auf wenig Begeisterung:

Tick: Ich habe keine Zeit, ich muss Hausaufgaben machen.
Trick: Ich will nicht allein gehen.
Track: Ich gehe nur, wenn auch Tick mitkommt.

(a) [4 PUNKTE] Formulieren Sie die Aussagen von Tick, Trick und Track als aussagenlogische Formeln.

(b) [8 PUNKTE] Zeigen Sie ohne Verwendung von Wahrheitstafeln, dass Donald heute nüchtern bleibt.

Abgabe bis Montag, 2017-05-02, 13:15, im Kasten neben IZ 343