Technische Universität Braunschweig

Institut für Theoretische Informatik

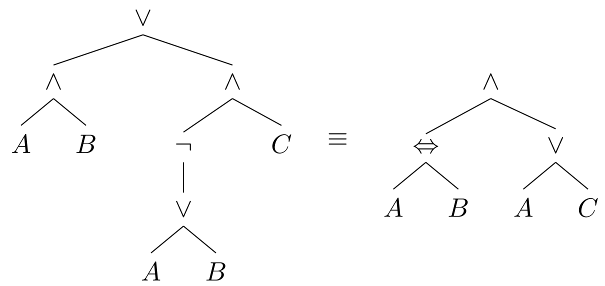
Dr. Jürgen Koslowski

Einführung in die Logik

Aufgabenblatt 3, 2017-05-02

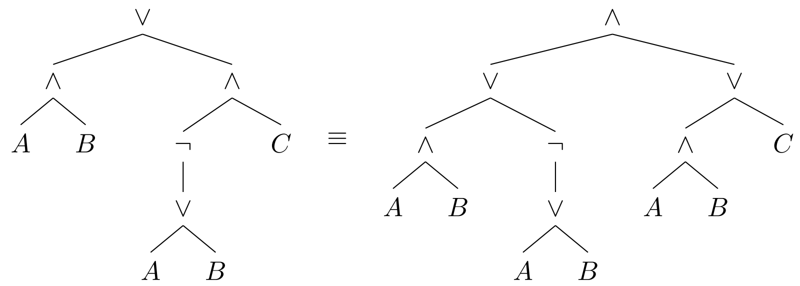
Übungsaufgabe 19

Zeiten oder widerlegen Sie folgende Äquivalenz:

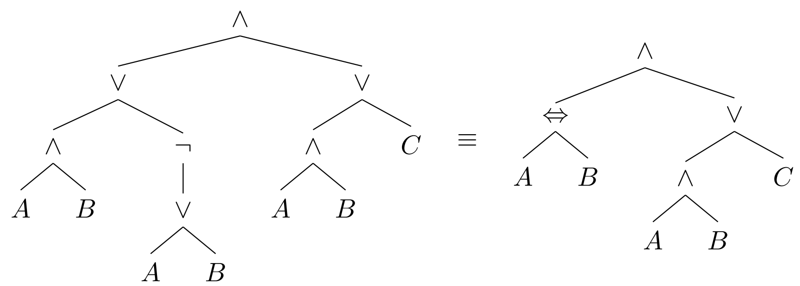


Lösungsvorschlag:

Anwendung des Distributivgesetzes liefert



Nun identifizieren wir den linken Zweig als äquivalent zu $A \Leftrightarrow B$, vergl. Protosition 2.4.2(c) und die de 'Morgansche Regel:



Um auf die gewünschte Form zukommen, benötigen wir einen kleinen Trick: keine unserer Rechenregeln läßt sich anwenden, aber die bei äquivalenten Formeln F und G ist ihre Konjunktion $F \wedge G$ sowohl zu F wie auch zu G äquivalent.

Übungsaufgabe 20

Im Vorgriff auf die nächste VL definieren wir die *konjunktive Normalform* (kurz: KNF), dies steht schon im Skript. Wir brauchen hier nur die Terminologie, aber noch keine Ergebnisse über Formeln in KNF.

- Atomare Formeln und ihre Negationen werden unter dem Begriff *Literale* zusammengefaßt.
- Disjunktionen von Literalen heißen *Klauseln*.
- Eine Formel liegt in KNF vor, wenn es eine Konjunktion von Klauseln ist.

In $F \in \mathcal{F}\{A_i : i < n\}$ mögen alle der ersten n Variablen vorkommen. Eine Formel $F' \in \mathcal{F}^{KNF}$ mit Klauseln K_j, $j < t$, heißt *kanonische KNF (kKNF)* von F, sofern gilt

(a) $F' \equiv F$;

(b) in jeder Klausel K_j kommet jede Variable A_i genau einmal vor;

(c) die Klauseln sind paarweise verschieden.

Zeigen oder widerlegen Sie: jede Formel $F \in \mathcal{F}\{A_i : i < n\}$ ist bis auf die Reihenfolge der Klauseln und die Reihenfolge der Literale innerhalb der Klauseln eindeutig zu einer Formel in kanonischer KNF äquivalent.

Lösungsvorschlag:

Wir betrachten hier nur auf $\{ A_i : i < n \}$ definierte Belegungen.

Für jede Variable A_i, $i < n$, tritt entweder das positive oder das negative Literal in jeder der 2^n möglichen kKNF-Klauseln auf, oBdA an Position i der Disjunktion. Damit wird jede solche Klausel K aus n Literalen von genau einer Belegung α_K auf 0 abgebildet, die alle Literale in K mit 0 belegt. Allen anderen Belegungen bilden K auf 1 ab.

Bei n Atomen gibt es 2^n verschiedene Klauseln der Länge n mit festgelegter Reihenfolge der Literale. Um eine Formel F in kKNF zu bilden, ist davon eine beliebige Teilmenge auszuwählen. Es existieren 2^{2^n} verschiedene solche Teilmengen. Wir wollen zeigen, dass die entsprechenden KNF-Formlen paarweise nicht äquivalent sind.

Sind $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ verschiedene derartige Teilmengen von Klauseln der Länge n, so existiert oBdA $K \in \mathcal{M} - \mathcal{N}$. Nun gilt $\widehat{\alpha}_K(K) = 0$ sowie $\widehat{\alpha}_K(L) = 1$ für alle Klauseln $L \neq K$ der Länge n, folglich also $\widehat{\alpha}(\bigwedge \mathcal{M}) = 0$, aber $\widehat{\alpha}(\bigwedge \mathcal{N}) = 1$.

Damit sind die 2^{2^n} verschiedenen Konjunktionen von Klauseln der Länge n auch semantisch verschieden.

Andererseits gibt es 2^{2^n} verschiedene Wahrheitstabellen für Kombinationen von n Atomen, also höchstens 2^{2^n} paarweise nicht äquivalente Formeln mit n Atomen. Aus der obigen Überlegung folgt nun die Existenz genau 2^{2^n} paarweise nicht äquivalenten derartigen Formeln in kKNF. Jede andere Formel mit den ersten n Atomen muß also zu einer in kKNF äquivalent sein.

Achtung: dieser Beweis ist nicht konstruktiv! In einer späteren Aufgabe präsentieren wir eine Konstruktion.

Aufgabe 21 [9 PUNKTE]

Stellen Sie die Ergebnisse der Sätze 3.1.1–3.2.2 sowie 3.2.5 für $n = 2$ im Skript als Äquivalenzen zwischen Bäumen dar.

Lösungsvorschlag:

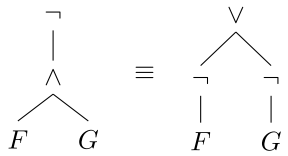
Nachfolgend stehen F, G und H für beliebige Formeln (= Bäume).

Satz 3.1.1

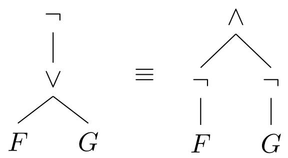
$$F \quad \equiv \quad \begin{array}{c} \neg \\ | \\ \neg \\ | \\ F \end{array}$$

Satz 3.1.2

(a)

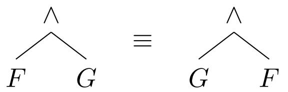


(b)

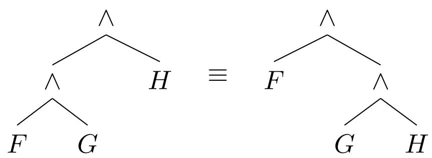


Sat 3.2.1

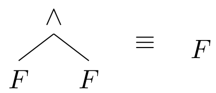
▷ $\wedge$ ist **kommutativ**:



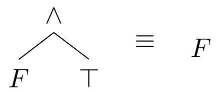
▷ $\wedge$ ist **assoziativ**:



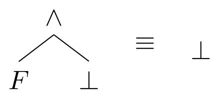
▷ $\wedge$ ist **idempotent**:



▷ $\wedge$ hat **neutrales Element** $\top$:

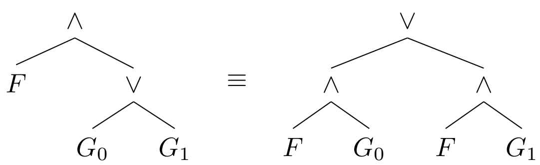


▷ $\wedge$ hat **absorbierendes Element** $\bot$:



Satz 3.2.2 analog zu Satz 3.2.1.

Satz 3.2.5 Die Distributivität von $\wedge$ über $\vee$ für $n-2$ genügt:

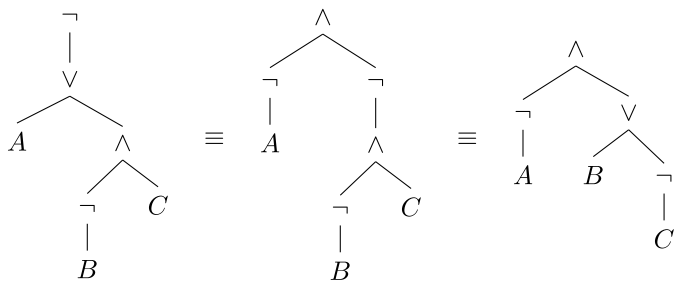


Aufgabe 22 [8 PUNKTE]

Zeigen oder widerlegen Sie: zu jeder Formel $F \in \mathcal{F}$ existiert modulo Kommutativität und Assoziativität genau eine äquivalente Formel $G \in \mathcal{F}$ minimaler Größe. (Wir betrachten hier nur die Junktoren $\bot$, $\neg$, $\wedge$ und $\vee$.)

Lösungsvorschlag:

Die Behauptung ist falsch: Ausgehend von der Überlegung, wie die de Morgan'schen Regeln zu einer Vergrößerung bzw. Verkleinerung einer Formel um 1 führen können, erhält man etwa:



Bei drei Variablen benötigen wir mindestens zwei binäre Junktoren, wie das in allen drei Formeln der Fall ist. Die einzige Möglichkeit, die äußeren Bäume zu verkleinern, bestünde evtl. lp,darin, die Anzahl der Negationen mittels der deḾorganschen Regeln zu verringern, aber das funktioniert in keinem der beiden Fälle.

Aufgabe 23 [8 PUNKTE]

Bestimmen Sie mit Begründung alle adäquaten Teilmengen von $\{\neg, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$.

Lösungsvorschlag:

Keine Singleton-Teilmenge ist adäquat, aber aufgrund der de Morgan'schen Regeln und der Äquivalenz von $A \Rightarrow B$ und $B \vee \neg A$ und somit $\neg(\neg B \wedge A)$ sind die zweielementigen Mengen $\{\neg, \wedge\}$ und $\{\neg, \Rightarrow\}$ adäquat, und damit auch all ihre Obermengen in $\{\neg, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$.

Andererseits ist keine Teilmenge von $\{\neg, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ ohne $\neg$ adäquat, da die Negation nicht darstellbar ist.

Zu untersuchen bleibt $\{\neg, \Leftrightarrow\}$. Mit diesen Junktoren aufgebaute Wahrheitstabellen können aufgrund der Symmetrie von $\Leftrightarrow$ nur eine gerade Anzahl von Einsen in der letzten Spalte haben, daher ist diese Menge nicht adäquat.