



Einführung in die Logik

Aufgabenblatt 4, 2017-05-09

Übungsaufgabe 24

Formen Sie $F = ((A \Rightarrow B) \Rightarrow C) \Rightarrow (C \Rightarrow (A \Rightarrow B))$ um in eine äquivalente

- NNF
- DNF
- KNF

Lösungsvorschlag:

NNF:

$$\begin{aligned} F &\equiv \neg(\neg(\neg A \vee B) \vee C) \vee \neg C \vee \neg A \vee B \\ &\equiv ((\neg A \vee B) \wedge \neg C) \vee \neg C \vee \neg A \vee B \end{aligned}$$

Eine äquivalente DNF kann man aus dieser NNF direkt herleiten, ohne Umweg über KNF($\neg F$), indem man in der linken Teilformel eines der Distributivgesetze anwendet:

$$F \equiv (\neg A \wedge \neg C) \vee (B \wedge \neg C) \vee \neg C \vee \neg A \vee B$$

Für die KNF ist nur zu beachten, dass die obige NNF eine Disjunktion von zwei KNFs ist:

$$\begin{aligned} F &\equiv (\neg A \vee B \vee \neg C \vee \neg A \vee B) \wedge (\neg C \vee \neg C \vee \neg A \vee B) \\ &\equiv (\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge (\neg C \vee \neg A \vee B) \\ &\equiv (\neg A \vee B \vee \neg C) \end{aligned}$$

Übungsaufgabe 25

Γ und Γ' sind Formelmengen, F und G Formeln. Beweisen oder widerlegen Sie:

- Wenn $\Gamma \models F$, dann auch $\Gamma \cup \Gamma' \models F$.
- $\Gamma \models F$ und $\Gamma' \models F$ implizieren $\Gamma \cap \Gamma' \models F$.
- $\Gamma \models F$ und $\Gamma' \models G$ implizieren $\Gamma \cup \Gamma' \models F \wedge G$.

Lösungsvorschlag:

- Korrekt: Jede Belegung, die $\Gamma \cup \Gamma'$ erfüllt, erfüllt auch Γ , nach Voraussetzung dann also auch F .
- Falsch: Zwar gilt immer $F \wedge G \models F$ und $F \wedge H \models F$, falls F keine Tautologie ist, gilt aber nicht $\models F$.

- (c) [3 PUNKTE] Korrekt: Jede $\Gamma \cup \Gamma'$ erfüllende und für F sowie G passende Belegung α erfüllt sowohl Γ als auch Γ' , also bildet $\hat{\alpha}$ sowohl F als auch G auf 1 ab, daher auch $F \wedge G$. Existiert keine derartige Belegung, ist $\Gamma \cup \Gamma' \models F \wedge G$ trivialerweise korrekt.

Aufgabe 26 [11 PUNKTE]

Wandeln Sie die Formel $((A \Rightarrow B) \Rightarrow C) \wedge (\neg C \Rightarrow (C \Rightarrow A))$ um in eine äquivalente

- (a) [3 PUNKTE] NNF,
(b) [2 PUNKTE] KNF,
(c) [6 PUNKTE] kanonische KNF (vergl. Aufgabe 20). [Hinweis: Starten Sie mit dem Ergebnis von (b) und erklären Sie, wie zu kurze Klauseln um die fehlenden Variablen ergänzt werden können.]

Vereinfachen Sie die jeweiligen Normalformen soweit wie möglich, und erläutern Sie, welche Regeln Sie anwenden.

Aufgabe 27 [10 PUNKTE]

Γ und Δ sind Mengen von Formeln, G ist eine einzelne Formel. Zeigen oder widerlegen Sie:

- (a) [3 PUNKTE] Wenn Γ erfüllbar ist, und $\Delta \subseteq \Gamma$, dann ist auch $\Gamma - \Delta$ erfüllbar.
(b) [3 PUNKTE] Wenn Γ erfüllbar ist und G eine Tautologie, dann ist auch $\Gamma \cup \{G\}$ erfüllbar.
(c) [2 PUNKTE] Wenn Γ nicht erfüllbar ist, dann ist für jede Formel G auch $\Gamma \cup \{G\}$ nicht erfüllbar.
(d) [2 PUNKTE] Wenn Γ nicht erfüllbar ist, und $G \in \Gamma$ eine Tautologie, dann ist auch $\Gamma - \{G\}$ nicht erfüllbar.

Aufgabe 28 [12 PUNKTE]

Zeigen Sie:

- (a) [6 PUNKTE] $\Gamma \models F$ gilt genau dann, wenn $\Gamma \cup \{\neg F\}$ nicht erfüllbar ist (Satz 5.0.2 der VL).
(b) [4 PUNKTE] $\Gamma \models F$ für jede Formel F , sofern Γ nicht erfüllbar ist.
(c) [2 PUNKTE] Existiert $G \in \Gamma$ mit $\Gamma - \{G\} \models \neg G$, dann ist Γ nicht erfüllbar.

Aufgabe 29 [12 PUNKTE]

Zeigen oder widerlegen Sie: wenn $\Gamma \models G$ und $G \equiv H$ dann auch $\Gamma \models H$.