Technische Universität Braunschweig

Institut für Theoretische Informatik

Dr. Jürgen Koslowski

Einführung in die Logik

Aufgabenblatt 5, 2017-05-16

Zur Erinnerung: am Dienstag, 2017-05-23 und am Donnerstag, 2017-05-25 (Himmelfahrt), finden keine Übungsgruppen statt, an beiden Montagen, 2017-05-22 und 2017-05-29 aber schon!

Achtung: von diesem Blatt an ist der Abgabetermin wieder der MONTAG, konkret 2017-05-29; das wird die Teilnehmer der Montagsgruppen hoffentlich etwas besänftigen.

Übungsaufgabe 30

Wir repakitulieren Aufgabe 5 von Blatt 0: Dort hatten wir informell festgestellt, dass man aus den Prämissen

- $P \wedge \neg Q \Rightarrow R$
- $\neg R$
- P

folgern kann, dass Q gilt.

(a) Weisen Sie direkt nach, dass $\{P \wedge \neg Q \Rightarrow R, \neg R, P\} \models Q$ gilt.

(b) Weisen Sie obiges Ergebnis mit Hilfe der Resolutionsmethode nach.

Lösungsvorschlag:

(a) Wir betrachten eine für P, Q und R passende Belegung α, die alle drei Prämissen erfüllt. Insbesondere gilt

$$\widehat{\alpha}(P) = 1 \quad \text{und} \quad \widehat{\alpha}(R) = 0$$

Die dritte Prämisse liefert nun

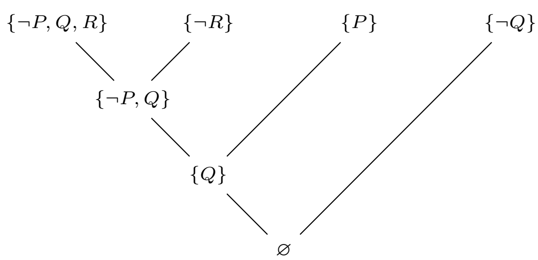
$$\widehat{\alpha}(P \wedge \neg Q) = \inf\{1, \widehat{\alpha}(\neg Q)\} = \widehat{\alpha}(\neg Q) = 1 - \widehat{\alpha}(Q) \leq 0$$

und damit $\widehat{\alpha}(Q) = 1$, wie gewünscht.

(b) Umformen der Prämissen zu Klauseln liefert

$$G = (\neg P \vee Q \vee R) \wedge \neg R \wedge P \wedge \neg Q$$

Die negierte Schußfolgerung liegt schon in KNF vor: $\neg F = \neg Q$.



Übungsaufgabe 31

Tick, Trick und Track sind durch den Konsum gewaltorientierte Computerspiele endgültig auf die schiefe Bahn eraten und haben Onkel Dagoberts Geldspeicher ausgeraubt. Beim Polizeiverhör möchte Kommissar Hunter wissen, was mit der Beute geschehen ist und nimmt folgende Aussagen auf:

Tick: Wir haben Geld im Wald vergraben und im See versenkt.

Trick: Normalerweise verstecken wir nichts zu Hause und bringen auch nichts zur Bank, wenn wir Geld im Wald vergraben.

Track: Trick wollte etwas Geld zur Bank bringen oder für einen guten Zweck spenden.

Trick: Genau, und wenn wir etwas spenden, dann vergraben wir nichts im Wald.

Kommissar Hunter ist empört: „Mindestens einer von Euch belügt mich doch!“

(a) Formalisieren Sie die Aussagen in der Aussagenlogik.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der Resolutionsmethode, dass Kommissar Hunter recht hat.

Lösungsvorschlag:

(a) Atomare Aussagen:

$$\begin{aligned} W &= \text{„im Wald vergraben“} \\ S &= \text{„im See versenkt“} \\ H &= \text{„zu Hause versteckt“} \\ B &= \text{„zur Bank gebracht“} \\ Z &= \text{„für guten Zweck gespendet“} \end{aligned}$$

Tick: $W \wedge S$

Trick: $W \Rightarrow (\neg H \wedge \neg B) \equiv (\neg H \wedge \neg B) \vee \neg W \equiv (\neg H \vee \neg W) \wedge (\neg B \vee \neg W)$

Track: $B \vee Z$

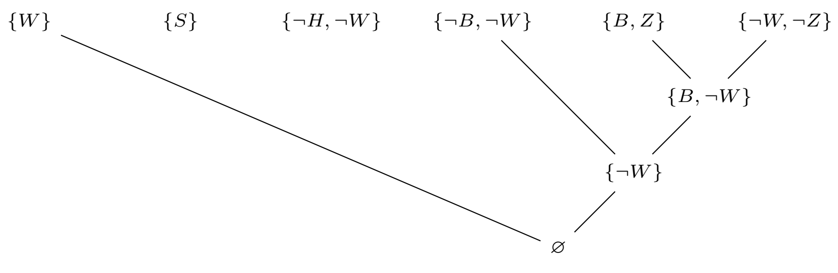
Trick: $Z \Rightarrow \neg W \equiv \neg W \vee \neg Z$

(b) Die Konjunktion der Aussagen in KNF ist in Mengenschreibweise

$$\{W\}\{S\}\{\neg H, \neg W\}\{\neg B, \neg W\}\{B, Z\}\{\neg W, \neg Z\}$$

Achtung: die im Text erwähnte Schlußfolgerung ist metasprachlicher Art und behauptet, dass die Prämissen nicht alle gleichzeitig erfüllbar sind.

Wir erhalten nun die Resolventen $\{B, \neg W\}$ und damit $\{\neg W\}$, also auch $\emptyset$. Damit ist die Konjunktion nicht erfüllbar. In Graphenform:



Aufgabe 32 [Bonusaufgabe, 14 PUNKTE]

Der berühmte **Vierfarbensatz** besagt, dass man auf jedem Globus mit endlich vielen zusammenhängenden(!) Ländern diese so mit vier Farben einfärben kann, dass benachbarte Länder stets unterschiedliche Farben haben. Zeigen Sie mit Hilfe des Kompaktheitssatzes, dass der Vierfarbensatz auch für Globen mit unendlich vielen Ländern gilt.

Zur Terminologie: Länder heißen **benachbart**, wenn sie ein gemeinsames Stück Grenze haben, das keine **Ecke** ist, wobei man unter Ecken Punkte auf dem Globus versteht, die zu drei oder mehr Ländern gehören (etwa For Corners in den USA, wo Arizona, Colorado, New Mexico und Utah zusammentreffen; Arizona und Colorado sind nicht benachbart, ebensowenig Utah und New Mexico).

Hinweis: Übersetzen Sie das Problem in ein Problem über ungerichtete planare Graphen: diese lassen sich in der xy-Ebene zeichnen, ohne dass sich Kanten schneiden, und 4-Färbbarkeit bedeutet, dass die Endpunkte jeder Kante verschieden gefärbt sind. Führen Sie dann atomare Formeln ein, die die möglichen Farben eines jeden Knoten ausdrücken; konstruieren Sie eine Formel, die die korrekte 4-Färbbarkeit des Graphen ausdrückt.

Für Neugierige: Wieviele Farben braucht man, wenn man die Kugel (Globus) durch einen Torus ersetzt?

Lösungsvorschlag:

Leider läßt sich er Kompaktheitssatz der Vorlesung (aus $\Gamma \models F$ folgt $\Gamma' \models F$ für eine endliche Teilmenge $\Gamma' \subseteq \Gamma$) nicht unmittelbar auf das obige Problem anwenden.

Wir wandeln den Kompaktheitssatz also zunächst etwas um:

$\Gamma \models F$ ist äquivalent zur Nichterfüllbarkeit von $\Gamma \cap \{\neg F\}$, diese wiederum zu $\Gamma \cap \{\neg F\} \models \bot$, und lezteres nach dem Kompaktheitssatz der VL zu $\Gamma' \models \bot$ für eine endliche Teilmenge von $\Gamma \cup \{\neg F\}$. Anwendung der Contraposition liefert nun folgende Variante des Kompaktheitssatzes, die wir hier anwenden können:

Ist jede endliche Teilmenge von Δ erfüllbar, so auch Δ.

Hintergrund zum Vierfarbensatz: Es handelst es sich um ein Problem aus der Graphentheorie. Der Zusammenhang zwischen Landkarten und "normalen" ungerichteten Graphen bestehend aus Knoten und Kanten ist sehr einfach: als Knoten verwenden wir die Hauptstädte der Länder; die Knotenmenge heißt gemeinhin V; die Kanten entsprechen unverzweigten Autobahnen zwischen den Hauptstädten benachbarter Länder, die zwangsläufig die gemeinsame Grenze überqueren müssen. Allgemein bilden in einem ungerichteten Graphen ausgewählte zwei-elementige Mengen von Knoten die Kanten, deren Gesamtheit meist mit E bezeichnet wird.

Färbungsproblem für einen ungerichteten Graphen $G = \langle V, E \rangle$: die Knoten (Hauptstädte) so färben, dass für jede Kante die Endpunkte verschieden gefärbt sind. Genauer: eine 4-Färbung ist eine Abbildung $V \xrightarrow{f} \{0, 1, 2, 3\}$, so dass aus $\{u, v\} \in E$ folgt $f(u) \neq f(v)$. Noch genauer: eine 4-Färbung ist ein Graphenmorphismus von G in den vollständigen Graphen K_4 mit Knotenmenge $\{0, 1, 2, 3\}$, in dem je zwei verschiedene(!) Knoten durch eine Kante verbunden sind.

Bei der Rückübersetzung zu Landkarten wird jedes Land so gefärbt, wie seine Hauptstadt.

Zwecks Übersetzung in die Aussagenlogik verwenden wir für einen Graphen G die atomaren Formeln $C_{u,j}$ mit $u \in V$ und $j < 4$, zu interpretieren als: Knoten u hat Farbe j.

- Jeder Knoten soll eine Farbe haben: $F_u = C_{u,0} \vee C_{u,1} \vee C_{u,2} \vee C_{u,3}$ für $u \in V$.
- eindeutige Färbung der Knoten: $E_u = \bigwedge_{j<k<4} (C_{u,j} \Rightarrow \neg C_{u,k})$ für $u \in V$;
- korrekte Färbung: $K_{u,v} = \bigwedge_{j<4} \neg(C_{u,j} \wedge C_{v,j})$ sofern $\{u, v\} \in E$.

Δ_G bestehe aus all diesen Formeln. Nach Konstruktion hat im endlichen Fall die Landkarte, bzw. der zugehörige Graph genau dann eine 4-Färbung, wenn Δ_G erfüllbar ist; letzteres garantiert der 4-Farbensatz.

Der Graph G darf aber auch abzählbar unendlich sein!

Für eine endliche Teilmengen $\Phi \subseteq \Delta_G$, betrachte die endliche Menge $U \subseteq V$ aller Länder (Knoten), die in den Formeln von Φ vorkommen, und den zugehörige Teilgraphen H von G;

dieser entsteht durch Löschen aller Knoten aus $V - U$ im Graphen G, samt ihrer inzidenten Kanten.

Wir ergänzen Φ um alle Formeln F_u, E_u und $K_{u,v}$, deren Knoten bzw. Kanten in H vorkommen; die resultierende Menge Δ_H ist immer noch endlich, und nach dem 4-Farbensatz erfüllbar. Damit ist auch die Teilmenge $\Phi \subseteq \Delta_H$ erfüllbar.

Nach obiger Variante des Kompaktheitssatz ist damit auch Δ_G erfüllbar.

Bei einem Torus reichen übrigens 7 Farben aus.

Aufgabe 33 [8 PUNKTE]

Bearbeiten Sie Aufgabe 18 von Blatt 2 mit der Resolutionsmethode. Zur Erinnerung:

Donald Duck will seine Neffen Tick, Trick und Track zum Bierholen in den Supermarkt schicken. Das stößt allerdings auf wenig Begeisterung:

Tick: Ich habe keine Zeit, ich muss Hausaufgaben machen.
Trick: Ich will nicht allein gehen.
Track: Ich gehe nur, wenn auch Tick mitkommt.

Zeigen Sie, dass Donald heute nüchtern bleibt.

Aufgabe 34 [12 PUNKTE]

Überprüfen Sie, ob aus $\Gamma = \{D \Rightarrow \neg B, C \Rightarrow D, A \Rightarrow B \vee C, B \Rightarrow C \vee D, C \Rightarrow B, A \vee B \vee C \vee D\}$ die Formel $F = \neg A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge D$ folgt.

Abgabe bis Montag, 2017-05-29, 13:15, im Kasten neben IZ 343