Technische Universität Braunschweig

Institut für Theoretische Informatik

Dr. Jürgen Koslowski

Einführung in die Logik

Aufgabenblatt 9, 2017-06-26

Übungsaufgabe 47

Wir betrachten die Signatur Σ mit einem zweistelligen Prädikatensymbol R. Die Σ-Strukturen entsprechen also gerichteten Graphen $G = \langle V, R \rangle$ mit Knotenmenge V und Kantenmenge $R \subseteq V \times V$. (Wenn keine Verwechselungen möglich sind, kann man auf die notationelle Unterscheidung zwischen dem Element R der Signatur und seiner Interpretation in der Menge V verzichten.)

Viele Aussagen über Graphen (auch ungerichtete, vergl. VL) lassen sich als prädikatenlogische Formeln über Σ ausdrücken.

Beispiel: Der Aussage „Jeder Knoten von G hat einen Vorgänger oder einen Nachfolger“ entspricht die Formel $\forall x : \exists y : (R(x, y) \vee R(y, x))$.

Transformieren Sie die folgenden Aussagen in prädikatenlogische Formeln über Σ:

(a) „G ist einfach.“

(b) „G hat eine Senke.“

(c) „G hat einen Kreis der Länge 3“

(d) „G ist transitiv“

Erläuterungen:

- Ein gerichteter Graph heißt *einfach*, wenn er keine Kanten der Form $\langle x, x \rangle$ hat, also keine Schleifen besitzt.
- Unter einer *Senke* versteht man einen Knoten ohne ausgehende Kanten.
- Ein *Kreis der Länge* n ist eine Folge von paarweise verschiedenen Knoten x_i, $i < n$, mit $R(x_{i \bmod n}, x_{i+1 \bmod n})$ für alle $i < n$.
- Der Graph $\langle V, R \rangle$ heißt transitiv, wenn die Relation R diese Eigenschaft hat.

Lösungsvorschlag:

(a) $\forall x : \neg R(x, x)$

(b) $\exists x : \forall y : \neg R(x, y)$

(c) $\exists x : \exists y : \exists z : \big(\neg(x = y) \wedge \neg(y = z) \wedge \neg(z = x) \wedge R(x, y) \wedge R(y, z) \wedge R(z, x)\big)$, oder zum besseren Verständnis umgeschrieben

$$\exists x : \exists y : \exists z : \big((R(x, y) \wedge \neg(x = y)) \wedge (R(y, z) \wedge \neg(y = z)) \wedge (R(z, x) \wedge \neg(z = x))\big)$$

(d) $\forall x : \forall y : \forall z : R(x, y) \wedge R(y, z) \Rightarrow R(x, z)$

Aufgabe 48 [10 PUNKTE]

(Vergl. Beispiel 9.4.7 im Skript.) In der Analysis findet man etwa die Aussage

„die Funktion $f(x)$ ist stetig in Punkt 2“

häufig wie folgt mit Hilfe von Quantoren leicht schlampig formuliert:

$$\forall\epsilon > 0 : \exists\delta > 0 : \forall x : (|x-2| < \delta \Rightarrow (|f(x) - f(2)| < \epsilon))$$

was korrekterweise lauten müßte

$$\forall\varepsilon : \Big(G(\varepsilon, 0) \Rightarrow \exists\delta : \big(G(\delta, 0) \wedge \forall x : \big(G(\delta, a(m(x, 2))) \Rightarrow G(\epsilon, a(m(f(x), f(2))))\big)\big)\Big)$$

Dabei sind a und m Funktionssymbole der Stelligkeit 1 bzw. 2, die als Platzhalter für Absolutbetrag und binäres Minus dienen, während G das 2-stellige Relationssymbol ist, das als Platzhalter für die größer-Relation dient (im Gegensatz zum Skript, wo $>$ auch für das Relationssymbol verwendet wurde).

Da die Lesbarkeit solcher Ausdrücke mit wachsender Länge gegen 0 strebt, zeichnen Sie den vollständigen Baum für obige Formel, einschließlich aller Term-Bäume. [Die Farben des Skripts müssen nicht reproduziert werden.]

Vereinfachen Sie dann diese Darstellung zu einem Formel-Baum mit lauter rechteckigen Knoten, dessen Blätter Lineardarstellungen atomarer Formeln enthalten.

Aufgabe 49 [22 PUNKTE]

Geben Sie Formeln in der Theorie der Graphen an, die besagen dass ein gegebener Graph ungerichtet ist und

(a) [4 PUNKTE] höchstens vier Knoten hat;

(b) [4 PUNKTE] mindestens 3 Knoten hat;

(c) [4 PUNKTE] mindestens eine Schleife hat;

(d) [4 PUNKTE] eine Clique ist, d.h. alle Paare verschiedener Knoten formen eine Kante und es gibt keine Schleifen;

(e) [6 PUNKTE] in jedem Knoten ein Pfad mit mindestens drei verschiedenen Kanten startet

Aufgabe 50 [15 PUNKTE]

Wir betrachten die Signatur Σ der Arithmetik mit zwei Konstanten 0 und 1, zwei zweistelligen Funktionensymbolen $+$ und $\cdot$ einem zweistelligen Prädikatensymbol $<$. Viele Aussagen über natürliche Zahlen (also die Σ- Struktur mit Trägermenge $\mathbb{N}$ und der üblichen Interpretation der Symbole in Σ) lassen sich als prädikatenlogische Formeln über Σ ausdrücken.

Beispiel: Der Aussage „x ist eine gerade Zahl“ entspricht die Formel $\exists y : (x \doteq y + y)$ mit einer freien Variable x.

Transformieren Sie die folgenden Aussagen in prädikatenlogische Formeln über Σ:

(a) [3 PUNKTE] „x teilt $y+1$.“

(b) [4 PUNKTE] „x ist eine Primzahl.“

(c) [4 PUNKTE] „Es gibt unendlich viele Primzahlen“

(d) [5 PUNKTE] „Jede gerade Zahl ≥ 4 läßt sich als Summe zweier Primzahlen darstellen.“

(e) [5 PUNKTE] „Alle Zahlen mit ungeradem Quadrat sind ungerade.“

Abgabe bis Montag, 2017-07-03, 13:15, im Kasten neben IZ 343