Einführung in die Logik

Aufgabenblatt A, 2017-06-03

Diese Blatt ist optional, was die Studienleistung angeht, aber klausurrelevant. Alle Lösungen werden am Freitag, 2017-07-14 veröffentlicht.

Übungsaufgabe 51

Wir betrachten die Formel

$$F = \exists z : \big(\exists x : Q(x,z) \vee \exists x : P(x)\big) \Rightarrow \neg\big(\neg\exists x : P(x) \wedge \forall x : \exists z : Q(z,x)\big)$$

Bilden Sie

(a) die Pränex-Normalform;

(b) die Skolem-Normalform S_F.

Lösungsvorschlag:

(a) Zunächst wird $\Rightarrow$ ersetzt:

$$F \equiv \neg\exists z : \big(\exists x : Q(x,z) \vee \exists x : P(x)\big) \vee \neg\big(\neg\exists x : P(x) \wedge \forall x : \exists z : Q(z,x)\big)$$

Dann werden die Negationen nach innen verschoben, wie bei der NNF:

$$\begin{aligned} F &\equiv \forall z : \big(\neg\exists x : Q(x,z) \wedge \neg\exists x : P(x)\big) \vee \big(\exists x : P(x) \vee \neg\forall x : \exists z : Q(z,x)\big) \\ &\equiv \forall z : \big(\forall x : \neg Q(x,z) \wedge \forall x : \neg P(x)\big) \vee \big(\exists x : P(x) \vee \exists x : \forall z : \neg Q(z,x)\big) \end{aligned}$$

Per verallgemeinerter Distributivität werden gemeinsame führende Quantoren herausgezogen:

$$\begin{aligned} F &\equiv \forall z : \forall x : \big(\neg Q(x,z) \wedge \neg P(x)\big) \vee \exists x\big(P(x) \vee \forall z : \neg Q(z,x)\big) \\ &\equiv \forall z : \forall x : \big(\neg Q(x,z) \wedge \neg P(x)\big) \vee \exists x : \forall z : \big(P(x) \vee \neg Q(z,x)\big) \end{aligned}$$

Bereinigung erfordert neue Variablen, etwa in der zweiten Teilformel:

$$F \equiv \forall z : \forall x : \big(\neg Q(x,z) \wedge \neg P(x)\big) \vee \exists y : \forall w : \big(P(y) \vee \neg Q(w,y)\big)$$

Schließlich werden alle Quantoren nach vorne gezogen:

$$F \equiv \forall z : \forall x : \exists y : \forall w : \Big(\big(\neg Q(x,z) \wedge \neg P(x)\big) \vee P(y) \vee \neg Q(w,y)\Big)$$

(b) Die Solemisierung erfordert ein neues 2-stelliges Funktionssymbol f in der erweiterten Signatur:

$$\begin{aligned} S_F &= \forall z : \forall x : \forall w : \Big(\big(\neg Q(x,z) \wedge \neg P(x)\big) \vee P(f(z,x))) \vee \neg Q(w, f(z,x))\Big) \\ &\equiv \forall z : \forall x : \forall w : \Big(\big(\neg Q(x,z) \vee P(f(z,x))\big) \vee \neg Q(w, f(z,x))) \wedge \\ &\qquad \big(\neg P(x) \vee P(f(z,x))\big) \vee \neg Q(w, f(z,x)))\Big) \end{aligned}$$

In der letzten Zeile liegt der quantorenfreie Teil der Formel in KNF vor, was bei der Resolutionsmethode der PL erforderlich ist.

Aufgabe 52 [14 PUNKTE]

Begründen Sie ihre Antworten ausführlich:

(a) [9 PUNKTE] Die Signatur Σ möge mindestens ein einstelliges Prädikatensymbol P enthalten. Wir betrachten einen Term t, in dem die Variable x nicht vorkommt. Ist die Formel $P(t) \Leftrightarrow \forall x : (x = t \Rightarrow P(x))$ allgemeingültig?

(b) [5 PUNKTE] Bleibt die Antwort dieselbe, wenn x im Term t vorkommt?

Lösungsvorschlag:

(a) Die Behauptung ist korrekt: Betrachte eine Σ-Struktur $\mathcal{A}$ mit Träger $\mathcal{A}$ und eine für t passende Belegung α. Dann gilt

$$\widehat{\alpha}(P(t)) = 1 \quad \text{g.d.w} \quad \bar{\alpha}(t) \text{ hat die Eigenschaft } P \quad \text{g.d.w} \quad P^{\mathcal{A}}(\bar{\alpha}(t)) = 1$$

insbesondere also $P^{\mathcal{A}}(\bar{\alpha}(t)) = \widehat{\alpha}(P(t))$, sowie

$$\begin{aligned}
\widehat{\alpha}(\forall x : (x = t \Rightarrow P(x))) &= \inf\{\, \widehat{\alpha[^a/_x]}(x = t \Rightarrow P(x)) \;:\; a \in \mathcal{A}\,\} \\
&= \inf\{\, \widehat{\alpha[^a/_x]}(\neg(x = t) \vee P(x)) \;:\; a \in \mathcal{A}\,\} \\
&= \inf\{\, \sup\{a \neq \widehat{\alpha[^a/_x]}(t), P^{\mathcal{A}}(a)\} \;:\; a \in \mathcal{A}\,\} \\
&= \inf\{\, \sup\{a \neq \bar{\alpha}(t), P^{\mathcal{A}}(a)\} \;:\; a \in \mathcal{A}\,\} \\
&= P^{\mathcal{A}}(a) = P^{\mathcal{A}}(\bar{\alpha}(t)) = \widehat{\alpha}(P(t))
\end{aligned}$$

wobei in der vorletzten Zeile verwendet wurde, dass x in t nicht vorkommt, und daher die Substitution folgenlos bleibt. Die letzte Zeile folgt, weil sich der Wert des Supremums, und folglich auch des Infimums, nur im Fall $a = \bar{\alpha}(t)$ überberhaupt von 1 unterscheiden kann, und dann mit $P^{\mathcal{A}}(a) = P^{\mathcal{A}}(\bar{\alpha}(t))$ übereinstimmt.

(b) Wenn x in t vorkommt, enthält $P(t)$ die freie Variable x, die rechte Seite aber nicht. Wir wollen versuchen, in einem Model $\mathcal{A}$ die Voraussetzung der Implikation $x = t \Rightarrow P(x)$ immer falsch und somit die rechte Seite immer wahr zu machen, während der Wert von $\widehat{\alpha}(P(t))$ nicht immer wahr, d.h., $P^{\mathcal{A}}$ eine echte Teilmenge von A ist.

Beispiel: für den Träger $\mathbb{N}$, das Prädikat $P(x)$ "x ist gerade" und den Term $t := x + 1$ passiert genau das: $P(t)$ ist nur für ungerade Zahlen erfüllt, aber die Implikation auf der rechten Seite ist aufgrund der immer falschen Voraussetzung für jedes $a \in \mathbb{N}$ erfüllt, also ist die rechte Seite immer wahr.

Aufgabe 53 [9 PUNKTE]

Die Natürliche Deduktion ist auch in Prädikatenlogik anwendbar, ggf. ergänzt um weitere Schlußregeln. Diese haben sich über einen längeren Zeitraum entwickelt.

Die Signatur besteht aus

- einem 2-stelligen Prädikat gG, mit Interpretation „gleiches Gewicht“;
- vier 1-stelligen Prädikaten (Eigenschaften) Sw, Ho, Br und He, interpretiert in der Realität als „schwimmfähig“, „hölzern”, „brennbar“ und „ist eine Hexe“.

Das in

`https://www.youtube.com/watch?v=k3jt5ibfRzw`

beschriebene Verfahren zur Identifikation einer Hexe verwendet folgende Prämissen:

- (G): $gG^{\boldsymbol{A}}(\text{Frau}, \text{Ente})$, gemäß der Waage, im Model der Realität;

- (S): $gG(x,y) \land Sw(y) \Rightarrow Sw(x)$, falsche Voraussetzung, evtl. im Mittelalter akzeptabel;
- (Es): $Sw^{\boldsymbol{A}}$(Ente), korrekt, die meistne Enten schwimmen in der Realität;
- (HoS): $Ho(x) \Rightarrow Sw(x)$, korrekt, die meisten Holzgegenstände können schwimmen;
- (HoB): $Ho(x) \Rightarrow Br(x)$, korrekt, die meisten Holzgegenstände sind brennbar;
- (HeB): $He(x) \Rightarrow Br(x)$, fragwürdig

Zur Anwendung kommen nur zwei Schlußregeln:

- **Modus Ponens**: $x, x \Rightarrow y \vdash y$, um 370 v. Chr. von Aristoteles eingeführt und sicherlich im Mittelalter bekannt;
- **Modus Bogus**: $x \Rightarrow y, y \vdash x$, vor dem Mittelalter entwickelt, möglicherweise von Bedevere persönlich, aber damals offensichtlich im alltäglichen Gebrauch, wie die Dokumentation zeigt. Da sich die Regel in der wissenschaftlichen Praxis aber nicht bewährt hat (dafür umso mehr in der Politik), wird sie nur selten in der Literatur erwähnt.

Zeigen Sie,

(a) [6 PUNKTE] dass im oben beschriebenen System die bedauernswerte Frau tatsächlich eine Hexe ist [Hinweis: Beginnen Sie mit dem Satz, dass alles, was aus Holz besteht, eine Hexe ist.];

(b) [3 PUNKTE] dass ein Kalkül mit Modus Bogus nicht korrekt ist.

Lösungsvorschlag:

(a) dass im oben beschriebenen System die bedaueWir gehen modular vor, und leiten zunächst den Satz (T): $Ho(x) \Rightarrow He(x)$ her:

1	$Ho(x)$	Kastenpraemisse
2	$Br(x)$	Modus Ponens und (HoB), Zeile 1
3	$He(x)$	Modus Bogus und (HeB), Zeile 2
4	$Ho(x) \Rightarrow He(x)$	$(\Rightarrow i), 1-3$

Dies ist unter jeder Belegung gültig.

Die Belegung von x mit Frau und von y mit Ente liefert aus (Es) und (S) mit Modus Ponens:

$$Sw^{\boldsymbol{A}}(\text{Frau})$$

Modus Bogus und (HoS) liefert dann

$$Ho^{\boldsymbol{A}}(\text{Frau})$$

Schließlich erhalten wir mit Satz (T) die gewünsche Schlußfolgerung

$$He^{\boldsymbol{A}}(\text{Frau})$$

(b) Die logische Konsequenz $x \Rightarrow y, y \models x$ ist falsch: die Belegungen α, die alle Prämissen erfüllen, müssen y erfüllen, während der Wert $\alpha(x)$ beliebig ist. Speziell im Fall $\alpha(x) = 0$ ist die logische Konsequenz verletzt.

Aufgabe 54 [7 PUNKTE]

Geben Sie eine allgemeingültige Formel an (mit Begründung), die nicht mehr allgemeingültig ist, wenn man Σ-Modelle mit leerer Trägermenge erlaubt. Wie kann man Ihre Formel modifizieren, so dass sie auch dann noch allgemeingültig ist, wenn leere Trägermengen zugelassen werden?

Lösungsvorschlag:

Die Formel $\forall x : F \Rightarrow \exists x : F$ ist bekanntlich allgemeingültig, sofern der leere Träger ausgeschlossen ist, denn für jede nichtleere Teilmenge $X \subseteq \mathbf{2}$ von Wahrheitswerten das Infimum immer kleiner gleich dem Supremum.

Erlaubt man dagegen $\varnothing$ als Träger, so haben wir

$$\inf \varnothing = 1 \quad \text{sowie} \quad \sup \varnothing = 0$$

so dass die vorherige Ordnungsbeziehung nicht mehr stimmt.

Zwecks Reparatur muß die Formel um die Forderung ergänzt werden, dass der Träger nicht leer ist, was sich durch

$$\exists x : x \doteq x$$

ausdrücken läßt, denn $\doteq$ ist formal reflexiv. Also ist

$$\exists x : x \doteq x \Rightarrow (\forall x : F \Rightarrow \exists x : F)$$

auch bei erlaubten leeren Trägern allgemeingültig. Ohne das Default-Relationssymbol $\doteq$ wird dies allerdings schwieriger.