Prof. Dr. Roland Meyer, Dr. Jürgen Koslowski

Einführung in die Logik

Aufgabenblatt 2, 2018-04-23

Zur Erinnerung: eine Relation R auf einer Menge A, d.h., eine Teilmenge von $A \times A$, heißt

- ▷ *reflexiv*, falls $\langle a, a\rangle \in R$ für jedes $a \in A$;
- ▷ *transitiv*, falls $\langle a, b\rangle \in R$ und $\langle b, c\rangle \in R$ impliziert $\langle a, c\rangle \in R$;
- ▷ *symmetrisch*, falls $\langle a, b\rangle \in R$ impliziert $\langle b, a\rangle \in R$;
- ▷ *antisymmetrisch*, falls $\langle a, b\rangle \in R$ und $\langle b, a\rangle \in R$ impliziert $a = b$;
- ▷ *linear*, falls je zwei Elemente $a, b \in A$ erfüllen $\langle a, b\rangle \in R$ oder $\langle b, a\rangle \in R$;
- ▷ *Quasiordnung*, falls R reflexiv und transitiv ist;
- ▷ *Halbordnung*, falls R eine antisymmetrische Quasiordnung ist;
- ▷ *lineare Ordnung*, falls R eine lineare Halbordnung ist;
- ▷ *Äquivalenzrelation*, falls R eine symmetrische Quasiordnung ist.

Die Relation $\{\, \langle a, a\rangle : a \in A \,\}$ verdient einen besonderen Namen: die *Diagonale* von A, Bezeichnung Δ_A. Die Verknüpfung einer Relation $S \subseteq A \times B$ mit $T \subseteq B \times C$ ist gegeben durch

$$S;T = \{\, \langle a, c\rangle \in A \times C : \langle a, b\rangle \in S \text{ und } \langle b, c\rangle \in T \text{ für mindestens ein } b \in B \,\}$$

Schließlich ist die zu S *duale* Relation S^{op} gegeben durch

$$S^{\mathrm{op}} = \{\, \langle b, a\rangle \in B \times A : \langle a, b\rangle \in S \,\}$$

Präsenzaufgabe 1

Definition. Eine Menge B heißt *abzählbar*, wenn es eine injektive Abbildung $B \longrightarrow \mathbb{N}$ gibt. Anderfalls heißt sie *überabzählbar*. Eine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \longrightarrow B$ soll *Aufzählung* von B heißen.

Zeigen oder widerlegen Sie:

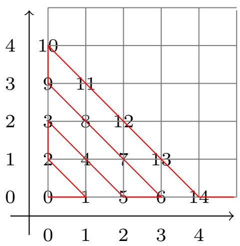
- ▷ Teilmengen, endliche cartesische Produkte, abzählbare Vereinigungen und Potenzmengen abzählbarer Mengen sind abzählbar.
- ▷ Jede abzählbare Menge hat eine Aufzählung.

Lösungsvorschlag:

Zunächst wenden wir uns der Abzählbarkeit zu:

Teilmengen. Für jede Teilmenge C einer abzählbaren Menge B ist die Inklusionsabbildung $C \xrightarrow{i} B$ injektiv, also auch ihre Komposition mit einer injektiven Abbildung $B \xrightarrow{j} \mathbb{N}$.

Binäre cartesische Produkte. Es genügt, die Abzählbarkeit von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ zu zeigen (warum?):



Abzählbare Vereinigungen.

$$\bigcup\{\, B_i \,:\, i \in \mathbb{N} \,\} = \sum\{\, B_i - \bigcup\{\, B_j \,:\, j < i \,\} \,:\, i \in \mathbb{N} \,\}$$

Also genügt, sich auf abzählbare disjunkte Vereinigungen zu beschränken. Aber $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist die disjunkte Vereinigung abzählbar vieler Kopien von $\mathbb{N}$ und somit abzählbar.

Potenzmengen. Wir zeigen, daß $P(\mathbb{N})$ überabzählbar ist. Annahme: $P(\mathbb{N}) \xrightarrow{g} \mathbb{N}$ ist injektiv. Dann erfüllt $K := \{\, g(B) \,:\, B \subseteq \mathbb{N} \,\wedge\, g(B) \notin B \,\}$ die Bedingung $g(K) \in K$ genau dann wenn $g(K) \notin K$, Widerspruch. (Dieses Argument funktioniert für jede Menge anstelle von $\mathbb{N}$.)

Hinsichtlich der Existenz einer Aufzählung stellen wir fest:

Ist B abzählbar, so gibt es eine injektive Abbildung $B \xrightarrow{f} \mathbb{N}$. Die Umkehrung f^{op} von f (die Teilmenge von $\mathbb{N} \times B$, die durch Umkehrung aller zu $f \subseteq B \times \mathbb{N}$ gehörigen geordneten Paare entsteht) ist i.A. nur eine partielle Abbildung von $\mathbb{N}$ nach B , da f nicht notwendig surjektiv sein muß, etwa wenn B endlich ist. Um f^{op} garantiert zu einer totalen Abbildung erweitern zu können, brauchen wir ein Element $b_0 \in B$, auf das wir jedes $n \in \mathbb{N}$ ohne f -Urbild abbilden können. Aber das erfordert $B \neq \emptyset$.

Für $B = \emptyset$ funktioniert dieses Argument nicht, es gibt gar keine Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\emptyset$. Aber natürlich ist $\emptyset$ als endliche Menge auch abzählbar.

Korrekt ist hingegen: B ist genau dann abzählbar, wenn B leer oder eine Aufzählung besitzt.

Präsenzaufgabe 2

Für eine halbgeordnete Menge $\langle P, \leq \rangle$ definieren wir die *lexikographische Ordnung* auf der Menge P^* aller endlichen Wörter über P wie folgt:

Für zwei Wörter $A := \alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}$ und $B := \beta_0\beta_1 \ldots \beta_{m-1}$ mit $\alpha_i, \beta_j \in P$ definieren wir $A \sqsubseteq B$ genau dann wenn

A und B haben ein maximales gemeinsames Präfix C der Länge k ,
und falls $k < n$ gilt $\alpha_k < \beta_k$

Konkret sind etwa die Buchstaben von a bis z in der üblichen Weise geordnet (wir ignorieren Großbuchstaben, Umlaute und das „ß“):

$$\texttt{hund} \sqsubseteq \texttt{katze} \qquad (C = \epsilon \text{ und } \texttt{h} < \texttt{k})$$
$$\texttt{veranstaltung} \sqsubseteq \texttt{verantwortung} \qquad (C = \texttt{veran} \text{ und } \texttt{s} < \texttt{t})$$
$$\texttt{abbild} \sqsubseteq \texttt{abbildung} \qquad (C = A = \texttt{abbild})$$

(Hierbei ist ε das sog. *leere Wort* ohne Buchstaben.)

(a) Zeigen Sie, dass $\langle P^*, \sqsubseteq \rangle$ eine halbgeordnete Menge ist, also dass $\sqsubseteq$ reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\sqsubseteq$ linear ist, sofern $\leq$ diese Eigenschaft hat.

(c) Erläutern Sie, warum ein deutsches (englisches, vietnamesisches, klingonisches) Lexikon eine endliche Aufzählung (eines Großteils) der entsprechenden Sprache liefert.

Lösungsvorschlag:

(a) reflexiv: das maximale gemeinsame Präfix von A und A is A, und dann sind keine weiteren Buchstaben zu untersuchen.

transitiv: Falls $A \sqsubseteq B \sqsubseteq C = \xi_0 \dots \xi_{\ell-1}$ betrachte die maximalen gemeinsamen Präfixe D und E von A und B bzw. B und C. Das kürzeste der beiden Präfixe D und E ist das maximale gemeinsame Präfix von A und C. Ist dieses von A verschieden, so gilt in Position $t := \min\{|D|, |E|\}$

$$\alpha_t \leq \beta_t \leq \xi_t$$

und somit $A \sqsubseteq C$.

antisymmetrisch: Falls $A \sqsubseteq B$ und $B \sqsubseteq A$ kann keines der beiden Wörter länger als das andere sein, somit müssen sie übereinstimmen.

(b) Je zwei Wörter A und B haben ein maximales gemeinsames Präfix C. Stimmt dieses mit A oder B überein, so gilt $A \sqsubseteq B$ bzw. $B \sqsubseteq A$. Andernfalls ist die Position k direkt nach C zu vergleichen. Aber dort gilt $\alpha_k \leq \beta_k$ oder $\beta_k \leq \alpha_k$, also auch $A \sqsubseteq B$ bzw. $B \sqsubseteq A$.

(c) In den genannten Fällen sind Alphabet und Sprache endlich (auch wenn im Deutschen sehr lange Konkatenationen von Wörtern möglich sind), und die Ordnungen sind linear. Damit hat kein Wort unendlich viele Vorgänger die verhindern würden, dass es beim Aufzählung entlang der lexikographischen Ordnung erreicht wird.

Selbst bei einem unendlichen Alphabet (wie dem der Aussagenlogik) erhält man eine derartige Aufzählung entlang der lexikographischen Ordnung $\sqsubseteq$, sofern jeder Buchstabe nur am Anfang endlich vieler Wörter auftreten kann.

Problematisch wird es erst, wenn diese Bedingung verletzt ist. Das sollen die Studenten sich in Aufgabe 4(b) überlegen.

Hausaufgabe 3 [10 PUNKTE]

[10 PUNKTE] Geben Sie jeweils eine elementfreie Charakterisierung der ersten fünf oben aufgelisteten Relationseigenschaften: reflexiv, transitiv, symmetrisch, antisymmetrisch, linear. [Hinweis: Arbeiten Sie in der Potenzmenge $\boldsymbol{P}(A \times A)$.]

Hausaufgabe 4 [optional, 17 PUNKTE]

Der Beweis des Kompaktheitssatzes verwendete eine Aufzählung aller aussagenlogischen Formeln, d.h., eine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{F}$. Warum existiert eine solche, und wie könnte sie aussehen?

(a) [4 PUNKTE] Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{F}$ abzählbar ist. Schließen Sie daraus, dass es eine Aufzählung $\mathbb{N} \xrightarrow{g} \mathcal{F}$ gibt. Leider gibt solch eine Existenzaussage keinen Hinweis darauf, wie solch eine Aufzählung konkret aussehen könnte.

(b) Betrachten Sie die lexikographische Ordnung $\sqsubseteq$ auf $\mathcal{F}$, die sich aus einer linearen Ordnung des Alphabets der Aussagenlogik ergibt. Die endlich vielen Junktoren und Klammern mögen irgendwie in die lineare Ordnung der atomaren Formeln p_i gemäß ihres Zählindexes eingefügt sein, z.B., aber nicht notwenig, alle am Anfang, oder alle am Ende.

Gemäß Aufgabe 2(b) ist die Ordnung $\sqsubseteq$ linear. Wenn sie bis auf Umbenennung der Elemente genau so aussähe wie $\leq$ auf $\mathbb{N}$, ließe sich $\sqsubseteq$ direkt verwenden um $\mathcal{F}$ aufzuzählen. Leider funktioniert das nicht:

[5 PUNKTE] Zeigen Sie, dass in der lexikographischen Ordnung $\sqsubseteq$ auf $\mathcal{F}$ bezüglich jeder linearen Ordnung des Alphabets der Aussagenlogik Formeln mit unendlich vielen Vorgängern existieren. [Hinweis: betrachten Sie die Position etwa von „(“ in der linearen Ordnung des Alphabets.]

(c) [8 PUNKTE] Reparieren Sie das obige Problem, indem Sie die Aufzählung von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ aus Aufgabe 1 verwenden und jedem Zahlenpaar $\langle k, \ell \rangle \in$ eine endliche Menge $\mathcal{F}_{k,\ell}$ von Formeln zugeordnen, die dann automatisch durch $\sqsubseteq$ linear geordnet sind. Die Vereinigung all dieser Mengen soll $\mathcal{F}$ ergeben. Wer es zudem schafft, dass die Mengen $\mathcal{F}_{k,\ell}$ paarweise disjunkt sind, erhält [2. SONDERPUNKTE]

Lösungsvorschlag:

(a) $\mathcal{F}$ ist Teilmenge der Menge aller Wörter über der abzählbaren Menge $\mathcal{W} := \mathcal{V} \cup \{(,), \leftrightarrow, \rightarrow, \vee, \wedge, \neg\}$. Daher genügt es, die Abzählberkeit von $\mathcal{W}^*$ zu zeigen.

Aber $\mathcal{W}^*$ ist die Vereinigung aller Mengen $\mathcal{W}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Und die sind als endliche cartesische Produkte abzählbarer Mengen wieder abzählbar.

(b) Im Gegensatz zu Aufgabe 2(c) treten unendlich viele Wörter auf, die mit „(“ beginnen (oder mit $\neg$ bzw. p_0, wenn man Formeln in polnischer bzw. umgekehrt polnischer Notation schreibt).

Falls $(< p_i$ für ein $i \in \mathbb{N}$, liegen bzgl. $\sqsubseteq$ zwischen $(\neg p_i)$ und p_i unendlich viele Formeln, die mit k öffnenden Klammern beginnen, $k > 1$, also hat p_i unendlich viele Vorgänger.

Falls $p_i <)$ für alle $i \in \mathbb{N}$, liegen zwischen p_o und $(\neg p_0)$ unendlich viele Formeln p_i, $i > 0$, also hat $(\neg p_0)$ unendlich viele Vorgänger.

(c) Für die Position $\langle k, \ell \rangle$ in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ betrachten wir z.B. die Menge $\mathcal{F}_{k,\ell}$ der Formeln, die außer p_k nur Atome mit niedrigerem Index und genau ℓ Junktoren enthalten. Diese Mengen sind alle endlich und sogar paarweise disjunkt. Insbesondere gilt $\mathcal{F}_{0,0} = \{p_0\}$.

Jede der möglichen linearen lexikographische Ordnungen auf $\mathcal{F}$ induziert eine lineare Ordnung auf der endlichen Menge $\mathcal{F}_{k,\ell}$. Diese können wir nun gemäß der Aufzählung von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ aneinanderhängen, was die gewünschte Aufzählung von $\mathcal{F}$ liefert, in diesem Fall sogar ohne Wiederholungen.

Andere potentielle Definition der Mengen $\mathcal{F}_{k,\ell}$: alle Formeln der Länge $\leq \ell$, in denen zur Variablen bis zu q_k auftreten.

Hausaufgabe 5 [15 PUNKTE]

(a) [5 PUNKTE] Zeigen Sie, dass $\models$ eine Quasiordnung aber keine Halbordnung auf $\mathcal{F}$ ist.

(b) [3 PUNKTE] Zeigen Sie, dass $\models\!\!\!|$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{F}$ ist.

(c) [4 PUNKTE] Zeigen oder widerlegen Sie: $\Sigma \models A$ genau dann wenn $\Sigma \cup \{\neg A\}$ nicht erfüllbar ist.

(d) [3 PUNKTE] Weisen Sie detailliert die Gültigkeit der ersten De Morganschen Regel nach:

$$\neg(A \wedge B) \models\!\!\!| \neg A \vee \neg B$$

Hausaufgabe 6 [6 PUNKTE]

[6 PUNKTE] Beweisen Sie die Folgerung aus dem Kompaktheitssatz: $\Sigma \models A$ genau dann wenn $\Sigma' \models A$ für eine endliche Teilmenge $\Sigma' \subseteq \Sigma$.

Abgabe bis Montag, 2018-04-30, 13:15, im Kasten neben IZ 343