Einführung in die Logik

Aufgabenblatt 3, 2018-04-30

Präsenzaufgabe 1

Zeigen Sie, dass folgende Mengen von Junktoren logisch vollständig sind:

(1) $\{\neg, \vee\}$

(2) $\{\perp, \to\}$, wobei $\perp$ 0-stellig ist und unter jeder Belegung den Wert 0 annimmt.

Lösungsvorschlag:

Zu zeigen ist jeweils, dass zu jeder Formel $A \in \mathcal{F}$ mit Junktoren aus $\{\neg, \wedge v, \to\ e\}$ eine äquivalente Formel A' mit Junktoren aus der gegebenen Menge existiert. Dazu verwendet man strukturelle Induktion über den Aufbau von A.

Alternativ: Wir fassen n-stellige Junktoren als Boole'sche Funktionen von $\mathbb{B}^n$ nach $\mathbb{B}$ auf, entsprechend Ihrer Wahrheitstabelle, und zeigen, dass jeder Junktor aus $\{\neg, \wedge v, \to\ e\}$ mit Hilfe der Junktoren aus der gegebenen Menge ausgedrückt werden kann.

Wir erinnern daran, dass $\models\!\!\!\mid$ eine Kongruenzrelation ist, also Teilformeln durch äquivalente Teilformeln ersetzt werden können, ohne die Äquivalenz der Gesamtformeln zu beeinträchtigen.

(1) **Strukturelle Indukltion**:

- ▷ Die Behauptung ist klar für atomare Formeln p_i.
- ▷ Annahme: zu $A, B \in \mathcal{F}$ existieren äquivalente Formeln A' und B' in den Junktoren $\neg$ und $\vee$.
- ▷ Wegen $(\neg A) \models\!\!\!\mid (\neg A')$ gilt die Behauptung auch für $(\neg A)$.
  Wegen $(A \vee B) \models\!\!\!\mid (A' \vee B')$ gilt die Behauptung auch für $(A \vee B)$.
  Wegen $(A \wedge B) \models\!\!\!\mid (A' \wedge B') \models\!\!\!\mid \neg(\neg A' \vee \neg B')$ gilt die Behauptung auch für $(A \wedge B)$.
  Wegen $(A \to B) \models\!\!\!\mid (A' \to B') \models\!\!\!\mid (\neg A' \vee B')$ gilt die Behauptung auch für $(A \to B)$.
  Wegen $(A \leftrightarrow B) \models\!\!\!\mid (A' \leftrightarrow B') \models\!\!\!\mid ((A' \to B') \wedge (B' \to A'))$ und den beiden vorangegangenen Ergebnissen gilt die Behauptung auch für $(A \leftrightarrow B)$.

Damit ist die Menge $\{\neg, \vee\}$ logisch vollständig.

(2) Hier können wir uns das Leben einfacher machen, indem wir nur noch zeigen, dass die gemäß (1) logisch vollständigen Junktoren $\neg$ und $\vee$ mit Hilfe von $\perp$ und $\to$ ausgedrückt werden können.

Strukturelle Indukltion:

- ▷ Die Behauptung ist klar für atomare Formeln p_i.
- ▷ Annahme: zu $A, B \in \mathcal{F}$ in den Junktoren $\neg$ und $\vee$ existieren äquivalente Formeln A' und B' in den Junktoren $\perp$ und $\to$.
- ▷ Wegen $(\neg A) \models\!\!\!\mid (\neg A') \models\!\!\!\mid (A' \to \perp)$ gilt die Behauptung auch für $(\neg A)$.
  Wegen $(A \vee B) \models\!\!\!\mid (A' \vee B') \models\!\!\!\mid (\neg A' \to B') \models\!\!\!\mid ((A' \to \perp) \to B')$ gilt die Behauptung auch für $(A \vee B)$.

Präsenzaufgabe 2

In der VL wurden deduktive Systeme $\mathcal{F}$ eingeführt, mit der Herleitbarkeitsrelation $\vdash_{\mathcal{F}}$ oder der Einfachheit halber nur $\vdash$, vergl. Deutsche Folien, ab Seite 38. Wir denken uns die „Bruchstriche“ von Regeln der Form $\frac{A_0,\ldots,A_{n-1}}{A}$ als Knoten mit $n > 0$ „offenen“ Eingabekanten, markiert mit den Prämissen A_i, $i < n$, und einer „offenen“ Ausgabekante, markiert mit der Schlußfolgerung A. Der Begriff „offen“ bedeutet hier, dass der Anfangs- oder Endpunkt der Kante noch nicht spezifiziert ist. Weitere Knoten ohne Eingabekanten liefern die Axiome, die wir auch als $\overline{A}$ schreiben können. Alle Kanten sind gerichtet; Eingaben führen zum Knoten hin, Ausgaben davon weg. Nun lassen sich diese Knoten zu Bäumen zusammensetzen, wobei „geschlossene“ Kanten entstehen, aber eine offene Ausgabekante übrigbleibt. Die Markierungen der verbleibenden offenen Eingabekannten sind dann die Prämissen des Baumes.

Definition 2.2 besagt nun anschaulich, dass die Theoreme des deduktiven Systems $\mathcal{F}$ genau die Markierungen von Wurzeln endlicher Bäume ohne Prämissen sind, die sich aus den obigen Knoten zusammensetzen lassen.

Entsprechend sind die Folgerungen aus Σ die Wurzeln solcher Bäume, deren Prämissen alle zu Σ gehören.

Bemerkung 2.3 scheint einen *formalen Beweis* von A im System $\mathcal{F}$ als endliche Folge von Formeln B_i, $i < m$, mit $A = B_{m-1}$ zu definieren, so dass deren Elemente Wurzeln von Regeln markieren, deren sämtliche Prämissen vorher in der Folge auftreten (was Axiome mit einschließt). Im Hinblick auf Teil 2 von Lemma 2.4 ergänzen wir: Ein formaler Beweis von $\Sigma \vdash A$ ist eine Folge $\langle B_i : i < m \rangle$, deren Komponenten Wurzeln von Regeln markieren, deren sämtliche Prämissen zu Σ gehören oder frühere Folgenglieder sind. Ein Beweis für A ist dann dasselbe wie ein Beweis von $\vdash A$.

Zeigen Sie folgende Verallgemeinerung des Teils 1 von Lemma 2.4: $\Sigma \vdash_{\mathcal{F}(Ax,R)} A$ genau dann wenn ein formaler Beweis von A in $\mathcal{F}(Ax \cup \Sigma, R)$ existiert.

Lösungsvorschlag:

Strukturelle Induktion über die minimale Tiefe eines Baums mit Wurzel A, bzw. die minimale Länge eines Beweises für A.

Induktionsanfang: Ist A ein Axiom oder ein Element von Σ, besteht der Beweis nur aus $B_0 = A$.

Induktionsannahme: die Behauptung stimmt für Theoreme mit einem Herleitungsbaum der Tiefe $< k$, bzw. für alle Formeln mit einem Beweis der Länge $< k$.

Induktionsschluß: Hat A einen Herleitungsbaum der Tiefe $k + 1$, aber keinen geringerer Tiefe, so betrachten wir die Prämissen A_i, $i < n$, derjenigen Regel, die die Schlußfolgerung A als Wurzel liefert. Die entsprechenden Teilbäume bis zu A_i, i_n, sind dann Herleitungen ihrer Wurzel, insofern gilt $\vdash A_i$, $i < n$. Diese haben nach Voraussetzung Beweise, die mit A_i, i_n, enden, und die wir hintereinaderhängen, wobei wir die Indizes im Beweis von A_k um die Gesamtlänge der Beweise von A_j, $j < k$, erhöhen. (Man kann die Reihenfolge der Prämissen einer Regel auch permutieren, so dass sich zum Schluß ein anderer Beweis gleicher Länge ergibt.)

Ist umgekehrt $\langle B_i : i < k + 1 \rangle$ ein Beweis minimaler Länge von $B_{m-1} = A$, so ist A die Wurzel einer Regel R_0, deren Prämissen Elemente der Folge mit Index $< k$ sind. Ist etwa B_t eine dieser Prämissen, so ist $\langle B_i : i < t + 1 \rangle$ ein Beweis von B_t. Nach Voraussetzung gilt nun $\vdash B_t$. Kombiniert man die entsprechenden Herleitungsbäume aller Prämissen von R_0 mit dem Knoten R_0, so erhält man eine Herleitung von A ohne Prämissen.

Achtung: ein Beweis kann überflüssige Elemente enthälten, die nicht als Prämisse einer Regel auftreten. In Beweisen minimaler Länge passiert das zwar nicht, aber für den Beweis von B_t läßt sich das nicht ausschließen.

Präsenzaufgabe 3

Wir betrachten das deduktive System $\mathcal{F}_0$ mit den Axiomen-Schemata

$$\begin{aligned}
&\text{Ax1: } A \to (B \to A)\\
&\text{Ax2: } (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))\\
&\text{Ax3: } (\neg A \to \neg B) \to (B \to A)
\end{aligned}$$

für alle $A, B, C \in \mathcal{F}$. Hier sind A, B und C also *Variablen für Formeln.* Die einzige Regel ist *Modus Ponens*

$$\text{MP: } \frac{A, (A \to B)}{B}$$

Weiterhin gilt das Dedulktionstheorem: Für $\Sigma \subseteq \mathcal{F}$ und $A, B \in \mathcal{F}$ gilt

$$\Sigma \cup \{A\} \vdash B \qquad \text{gdw} \qquad \Sigma \vdash A \to B$$

Weisen Sie folgende Regeln mit Hilfe des Deduktionstheorems nach (Lemma 2.11, Folie 51):

- ▹ $\vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$
- ▹ $\vdash \neg B \to (B \to A)$

Lösungsvorschlag:

▹ Nach dem Deduktionstheorem genügt es, $\{A \to B, B \to C, A\} \vdash C$ nachzuweisen.

1. $\{A \to B, B \to C, A\} \vdash A$	trivial
2. $\{A \to B, B \to C, A\} \vdash A \to B$	trivial
3. $\{A \to B, B \to C, A\} \vdash B$	MP 1,2
4. $\{A \to B, B \to C, A\} \vdash B \to C$	trivial
5. $\{A \to B, B \to C, A\} \vdash C$	MP 3,4

Typischerweise werden die Prämissenmengen nicht mitgeführt und die Prämissen bei Bedarf als „Annahme“ eingeführt. Das führt zu folgender verkürzter Schreibweise:

1. A	Annahme
2. $A \to B$	Annahme
3. B	MP 1,2
4. $B \to C$	Annahme
5. C	MP 3,4

Folgende Variante verwendet immerhin Axiome um $\{A \to B, B \to C\} \vdash A \to C$ nachzuweisen, in verkürzter Form:

1. $A \to B$	Annahme
2. $B \to C$	Annahme
3. $(B \to C) \to (A \to (B \to C))$	Ax1
4. $A \to (B \to C)$	MP 2,3
5. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$	Ax2
6. $(A \to B) \to (A \to C)$	MP 4,5
7. $A \to C$	MP 1,6

▹ Nach dem Deduktionstheorem genügt es, $\{\neg B\} \vdash B \to A$ nachzuweisen, in verkürzter Form:

1. $\neg B$	Annahme
2. $\neg B \to (\neg A \to \neg B)$	Ax1
3. $(\neg A \to \neg B)$	MP 1,2
4. $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$	Ax3
5. $(B \to A)$	MP 1,3

Achtung: wenn Modus Ponens auf Formeln angewendet wird, die beide je eine Menge von Prämissen mitbringen, so gilt die resultierende Formel unter der Vereinigung der Prämissenmengen beider Eingabeformeln. Um dies zu beweisen, fügt man die Prämissenmengen zu dem Axiomen des Kalküls hinzu, man spricht dann auch von „nichtlogischen Axiomen“.

Hausaufgabe 4 [14+10 PUNKTE]

[8+6 PUNKTE] Zeigen Sie, dass folgende binären Junktoren

- ▷ $\uparrow$, genannt „Sheffer stroke“ oder „nand“, mit der Interpretation „nicht beide“ oder „ist inkompatibel zu“;
- ▷ $\downarrow$ mit der Interpretation „gemeinsame Verleugnung“ oder „beide falsch“

jeweils logisch vollständig sind.

Optional: [10 PUNKTE] Zeigen Sie, dass $\uparrow$ und $\downarrow$ die einzigen binären Junktoren mit dieser Eigenschaft sind.

Lösungsvorschlag:

Bei $\uparrow$ und $\downarrow$ können wir auf eine der Mengen in Aufgabe 1 Bezug nehmen. Sobald $\uparrow$ als logisch vollständig nachgewiesen ist, würde es genügen, diesen Junktor durch $\downarrow$ auszudrücken. Das vereinfacht sich allerdings erheblich, wenn man auch $\neg$ durch $\downarrow$ ausdrücken kann.

- ▷ Die Semantik von $\uparrow$ ist gegeben durch $A \uparrow B \models\!\!\!\!\;\;\dashv \neg(A \wedge B)$:
  - **Anfang**: Die Behauptung ist klar für atomare Formeln p_i .
  - **Annahme**: zu $A, B \in \mathcal{F}$ in den Junktoren $\neg$ und $\vee$ existieren äquivalente Formeln A' und B' nur mit dem Junktor $\uparrow$.
  - **Schluß**:
    - ∗ Wegen $(\neg A) \models\!\dashv (\neg A') \models\!\dashv (\neg(A' \wedge A')) \models\!\dashv A' \uparrow A'$ gilt die Behauptung auch für $(\neg A)$.
    - ∗ Wegen $(A \vee B) \models\!\dashv (A' \vee B') \models\!\dashv \neg(\neg A' \wedge \neg B') \models\!\dashv (\neg A') \uparrow (\neg B') \models\!\dashv ((A' \uparrow A') \uparrow (B' \uparrow B'))$ gilt die Behauptung auch für $(A \vee B)$.

  Damit ist $\uparrow$ logisch vollständig.
- ▷ Die Semantik von $\downarrow$ ist gegeben durch $A \downarrow B \models\!\dashv \neg(A \vee B) \models\!\dashv \neg\neg(\neg A \wedge \neg B) \models\!\dashv \neg(\neg A \uparrow \neg B)$:
  - **Anfang**: Die Behauptung ist klar für atomare Formeln p_i .
  - **Annahme**: zu $A, B \in \mathcal{F}$ in den Junktoren $\neg$ und $\vee$ existieren äquivalente Formeln A' und B' nur mit dem Junktor $\downarrow$.
  - **Induktionsschluß**:
    - ∗ wegen $\neg A \models\!\dashv \neg(A \vee A) \models\!\dashv A \downarrow A$ gilt die Behauptung auch für $(\neg A)$.
    - ∗ Wegen $(A \vee B) \models\!\dashv (A' \vee B') \models\!\dashv (\neg\neg(A' \vee B')) \models\!\dashv (\neg(A' \downarrow B')) \models\!\dashv (A' \downarrow B') \downarrow (A' \downarrow B')$ gilt die Behauptung auch für $(A \vee B)$.

  Damit ist $\downarrow$ logisch vollständig.

Optional: Betrachte man einen binären Junktors @ als Boole'sche Funktion $\mathbb{B}^2 \xrightarrow{@} \mathbb{B}$, so gibt es 4 mögliche Argumente, also $2^4 = 16$ solche Funktionen.

All diejenigen Boole'schen Funktionen, die $\langle 0, 0\rangle$ auf 0 , oder $\langle 1, 1\rangle$ auf 1 abbilden, sind für die Nachbildung von $\neg$ ungeeignet. Damit verbleiben noch 4 Kandidaten: neben $\uparrow$ und $\downarrow$, den Negationen von $\wedge$ und $\vee$, noch die Negationen der Projektionen auf die erste bzw. zweite Komponente. Da letztere eines der beiden Argumente ignorieren, lässt sich damit aber weder $\wedge$, noch $\vee$ oder $\rightarrow$ nachbilden.

Hausaufgabe 5 [8 PUNKTE]

Ebenfalls in Note 2.3 taucht der Begriff des *verkürzten Beweises* für die Herleitbarkeit von A aus $\Sigma \subseteq \mathcal{F}$ auf, also für $\Sigma \vdash A$: es handelt sich um eine Folge $\langle B_i : i < m \rangle$ mit $A = B_{m-1}$, so dass jedes Element der Folge Wurzel eines Regelbaums ist, dessen sämtliche Prämissen entweder zu Σ gehören oder vorangegangene Folgenglieder sind. (In einem *Beweis* sind nur Regelbäume der Tiefe 1, also Regeln oder Axiome, zugelassen. Die Verkürzung besteht darin, dass die inneren Zweige eines Regelbaums der Tiefe > 1 nicht explizit im verkürzten Beweis aufgelistet werden müssen.)

[8 PUNKTE] Zeigen Sie Teil 2 von Lemma 2.4: $\Sigma \vdash A$ hat genau dann einen Beweis, wenn $\Sigma \vdash A$ einen verkürzten Beweis hat.

Lösungsvorschlag:

Das Konzept des verkürzten Beweises erlaubt die Wiederverwendung schon bewiesener Ergebnisse, ohne deren Beweise reproduzieren zu müssen. Erst dadurch wird das Handwerk des Beweisens handhabbar.

Jeder Beweis von $\Sigma \vdash A$ ist natürlich auch ein verkürzter Beweis von $\Sigma \vdash A$, denn Regeln sind Regelbäume der Tiefe 1.

Umgekehrt gilt es, einen verkürzten Beweis wieder zu einem Beweis zu vervollständigen.

In einem verkürzten Beweis $\langle B_i : i < m \rangle$ mit $A = B_{m-1}$ suchen wir von rechts nach links fortschreitend einen Regelbaum mit Wurzel B_k, dessen Prämissen sämtlich zu Σ gehören, oder Vorgänger von B_k sind. Alle übrigen in diesem Beweis auftretenden Formeln, fügen wir vor B_k in den verküzten Beweis ein. Bei der weiteren Bearbeitung können iese neu eingefügten Formeln nun übersprungen werden, woraufhin B_{k-1} (in der ursprünglichen Nummerierung) zu behandeln ist.

Hausaufgabe 6 [10 PUNKTE]

[vergl. Lemma 2.6 auf den Folien] $\mathcal{F}$ sei ein beliebiges deduktives System, nicht notwendig $\mathcal{F}_0$ ..

(1) [4 PUNKTE] Ist $\Sigma \subseteq \mathcal{F}$ inkonsistent, dann hat Σ eine endliche inkonsitente Teilmenge Σ_0.

(2) [4 PUNKTE] Aus $\Sigma \vdash A$ folgt $\Sigma \cup \{\neg A\}$ ist inconsistent. Wie steht es mit der Umkehrung?

(3) [2 PUNKTE] $\boldsymbol{Thm}(\mathcal{F}) \subseteq \boldsymbol{Folg}_{\mathcal{F}}(\Sigma)$ für jede Mege $\Sigma \subseteq \mathcal{F}$.

Lösungsvorschlag:

(1) Ist $\Sigma \subseteq \mathcal{F}$ inkonsistent, dann existiert eine Formel A mit $\Sigma \vdash A$ und $\Sigma \vdash \neg A$. Aufgrund der syntaktischen Version des Kompaktheitssatzes (vorher in Lemma 2.6, in VL besprochen) existieren endliche Teilmengen $\Sigma_0, \Sigma_1 \subseteq \mathcal{F}$ mit $\Sigma_0 \vdash A$ und $\Sigma_1 \vdash \neg A$. Damit hat $\Sigma_0 \cup \Sigma_1$ die gewünschte Eigenschaft.

(2) Semantisch haben wir bereits: $\Sigma \models A$ gdw. $\Sigma \cup \{\neg A\}$ ist nicht erfüllbar.

    Wenn $\Sigma \vdash A$, existiert $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ endlich mit $\Sigma_0 \vdash A$, folglich $\Sigma_0 \cup \{\neg A\} \vdash A$ und $\Sigma_0 \cup \{\neg A\} \vdash \neg A$. Damit ist $\Sigma_0 \cup \{\neg A\}$ inconsistent, also auch $\Sigma \cup \{\neg A\}$.

    Ist umgekehrt $\Sigma \cup \{\neg A\}$ inconsistent, so existiert eine endliche Teilmenge $\Sigma_1 \subseteq \Sigma \cup \{\neg A\}$, die inconsistent ist. Also existierte eine Formel $B \in \mathcal{F}$ mit $\Sigma_1 \vdash B$ und $\Sigma_1 \vdash \neg B$. A priori wissen wir nicht, ob $B \in \{A, \neg A\}$. Ebensowenig wissen wir, ob $\mathcal{F}$ eine Regel der Form $\frac{B, \neg B}{C}$ für beliebige $B, C \in \mathcal{F}$ enthält. Falls ja, dann folgt die Behauptung (z.B. in der natürlichen Deduktion), andernfalls wird diese Richtung i.A. nicht gelten.

(3) $\boldsymbol{Thm}(\mathcal{F}) = \boldsymbol{Folg}_{\mathcal{F}}(\emptyset)$, damit folgt die Behauptung nach dem 3. Punkt des Lemmas.