Einführung in die Logik

Aufgabenblatt 5, 2018-05-21

Präsenzaufgabe 1

Ergänzen Sie den Beweis von Hintikkas Lemma 3.4 aus der VL: Für eine vollständige offene Menge Θ sei die Belegung φ definiert durch

$$\varphi(p) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \neg p \in \Theta \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Verwenden Sie eine geeignete Variante von Induktion über die Länge oder Tiefe von Formeln, um $\widehat{\varphi}(A) = 1$ für alle $A \in \Theta$ zu zeigen.

Lösungsvorschlag:

(Ich (JK) bevorzuge Induktion über die Tiefe, da es hier keine Lücken gibt.)

Anfang: Für Atome der Tiefe 0 folgt die Behauptung aus der Definition von φ.

Annahme: Wir nehmen an, die Behauptung sei für alle Formeln $B \in \Theta$ mit Tiefe $< k$ richtig.

Schluß: $B \in \Theta$ habe die Tiefe k.

Falls es sich um eine α-Formel handelt, gehören beide Bestandteile α_1 und α_2 aufgrund der Vollständigkeit zu Θ und werden nach Annahme mit 1 bewertet, also auch B (was in diesem Fall zu einer Konjunktion von α_1 und α_2 äquivalent ist).

Falls es sich um eine β-Formel handelt, gehört mindestens ein Bestandteil β_1 oder β_2 aufgrund der Vollständigkeit zu Θ und wird nach Annahme mit 1 bewertet, also auch B (was in diesem Fall zu einer Disjunktion von β_1 und β_2 äquivalent ist).

Präsenzaufgabe 2

Auf den Folien 70–74 wurde im Beweis von Lemma 3.8 für eine Formelmenge Σ ein vollständiges Tableau konstruiert: die Formelmenge entlang jedes Astes umfaßt Σ und enthält mit jeder α-Formel beide Bestandteile, und mit jeder β-Formel mindestens einen Bestandteil.

(1) Das Konstruktionsverfahren verwendet eine „Worklist“ WL zur Speicherung von noch zu bearbeitenden Knoten mit ihren Formeln. Diese funktioniert nach dem FIFO-Prinzip (first-in-first-out); und ist auch als **Queue** bekannt.

Zeigen Sie, dass man stattdessen auch einen nach dem FILO-Prinzip (fist-in-last-out) funktionierenden **Stack** verwenden kann. Welchen Vorteil hat die Verwendung eines Stacks?

(2) In der zweiten Hälfte von Folie 73 wird argumentiert, dass jede Formel $A_i \in \Sigma$ in einem gegebenen Ast Θ vorkommen muß. Vervollständigen Sie das Argument, warum WL immer wieder nach endlich vielen Schritten leer werden muß, wodurch die nächste Formel aus Σ in die Tableau-Konstruktion eingeführt werden kann.

Lösungsvorschlag:

(1) Ausgehend von einer leeren WL werden in den ersten beiden Schritten dieselben Daten in die WL geschrieben: die aktuelle Formel $A_j \in \Sigma$ und dann deren α- oder β-Komponenten

(sofern A_j kein Literal ist). Aber sobald mehr als ein Knoten in der WL steht, divergieren die Konstruktionen des Tableaus; wir können insofern nicht sagen, dass dieselben Knoten verarbeitet werden. Im Falle eines Queues werden neu in WL eingetragene Knoten „spät“ verarbeitet, im Falle eines Stacks dagegen „früh“.

Werden etwa im zweiten Schritt Knoten mit den Formeln A und B in dieser Reihenfolge nach WL geschrieben, so wird im Falle eines Queues als nächstes der Knoten mit A verarbeitet, was zu neuen Knoten in WL führen kann, und anschließend der Knoten mit B. Zu diesem Zeitpunkt können also noch unverarbeitete Knoten existieren, die aus der Verarbeitung des Knotens mit A resultierten.

Im Falle eines Stacks wird zunächst B verarbeitet, und im Anschluß alle daraus resultierenden weiteren Knoten. Sobald der Knoten mit A an der Reihe ist, ist man sicher dass alle aus der Verarbeitung des Knotens mit B resultierenden Knoten bereits verarbeitet worden sind. Diesen Vorteil können wir in (2) nutzen:

(2) Behauptung: Hat der Stack WL die Form $\langle C_i : i < n \rangle$, so hat er nach endlich vielen Schritten die Form $\langle C_i : 0 < i < n \rangle$, ist also um einen Eintrag kürzer geworden.

Wir verwenden Induktion über die Tiefe von C_0 (kein Literal!).

- Falls C_0 beide $\alpha\,/\,\beta$-Komponenten Literale sind, ist die Behauptung klar; nichts wird neu auf den Stack geschrieben.
- Die Behauptung möge für Formeln C_0 der Tierfe $< k$ korrekt sein.
- Hat C_0 die Tiefe k, so haben die $\alpha\,/\,\beta$-Komponenten eine geringere Tiefe, und diejenigen, die keine Literale sind, erscheinen mit einer gewissen Vielfachheit an neuen Knoten auf dem Stack. Nach Annahme können all diese neuen Knoten aber in endlicher Zeit entfernt werden, was den Stack $\langle C_i : 0 < i < n \rangle$ übrig läßt.

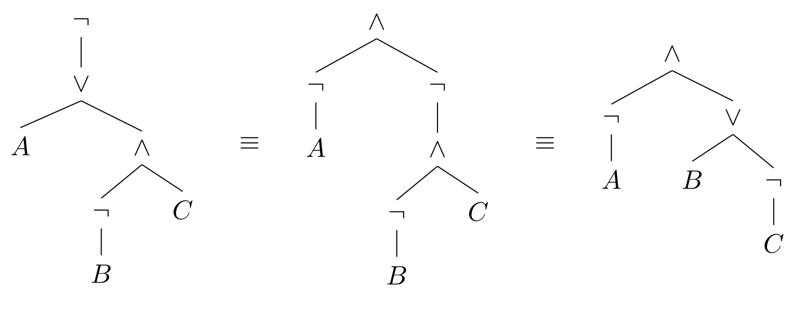
Ein entsprechendes Argument für eine Queue WL wird m.E. viel unübersichtlicher.

Präsenzaufgabe 3

Zeigen Sie, dass nicht zu jeder Formel A eine (bis auf Kommutativität von $\wedge$ und $\vee$) eindeutig bestimmte äquivalente Formel A' in den Junktoren $\neg$, $\wedge$ und $\vee$ mit minimaler Baumdarstellung existiert.

Lösungsvorschlag:

Folgende Formeln entstehen durch Anwendung der de Morgan'schen Regeln; andere Rechenregeln sind nicht anwendbar:



Die äußeren Bäume haben 7 Knoten und 6 Kanten, unterscheiden sich aber in der Tiefe: links beträgt sie 5, rechts dagegen 4. Die rechte Formel liegt zudem in NNF vor.

Insofern stellt sich die Frage, ob zu jeder Formel A wenigstens eine (bis auf Kommutativität von $\wedge$ und $\vee$) eindeutig bestimmte äquivalente Formel A' in NNF mit minimaler Baumdarstellung existiert.

Hausaufgabe 4 [12 PUNKTE]

Eine Formel in KNF bzw. DNF, in der n verschiedene Atome vorkommen, liegt in **kanonischer KNF** bzw. **DNF** vor, wenn

- ▷ jede Klausel bzw. Co-Klausel jedes der n Atome genau einmal enthält;
- ▷ keine Klausel bzw. Co-Klausel mehrfach vorkommt (wobei die Reihenfolge der Literale keine Rolle spielt).

Wir betrachten die aussagenlogische Formel $A = (\neg p \wedge q \to \neg r) \wedge \neg(\neg q \vee r)$.

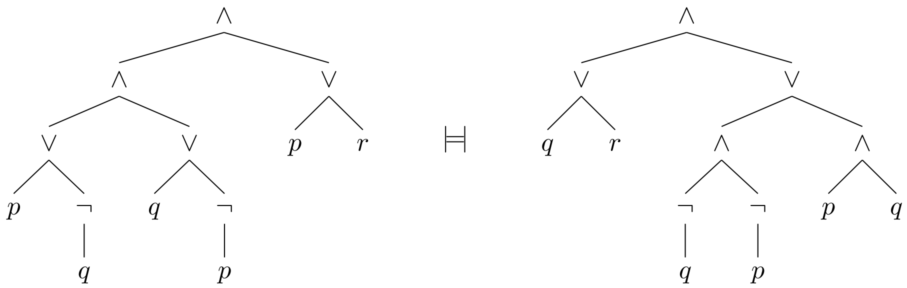
(a) [4 PUNKTE] Stellen Sie die Wahrheitstabelle auf.

(b) [6 PUNKTE] Erklären Sie möglichst präzise und mit Begründung, wie man direkt aus einer Wahrheitstabelle für eine ausagenlogische Formel B mit n verschiedenen Atomen eine kDNF für B extrahieren kann (ohne Umweg über eine kKNF o.Ä.).

(c) [2 PUNKTE] Wenden Sie das Verfahren auf Ihre Tabelle für A in Teil (a) an.

Hausaufgabe 5 [15 PUNKTE]

(1) [10 PUNKTE] Zeigen oder widerlegen Sie:



(2) [5 PUNKTE] Kann zu jeder Formel $A \in \mathcal{F}$ eine (bis auf die Kommutativität von $\wedge$ und $\vee$) eindeutig bestimmte „beste NNF“ A' existieren, deren Länge/Tiefe/Knoten- und Kantenzahl minimal ist? [Hinweis: betrachten Sie nicht unbedingt die Formeln aus Teil (1), sondern nur geeignete Teilformeln.]

Hausaufgabe 6 [12 PUNKTE]

Wandeln Sie die Formel $((p \to q) \to r) \wedge (\neg r \to (r \to p))$ um in eine äquivalente

(a) [3 PUNKTE] NNF;

(b) [2 PUNKTE] KNF;

(c) [6 PUNKTE] kanonische KNF (verl. Aufgabe 4). [Hinweis: starten Sie mit dem Ergebnis von (b) und erklären Sie, wie zu kurze Klauseln um die fehlenden Variablen ergänzt werden können.]

Abgabe bis Montag, 2018-06-04, 13:15, im Kasten neben IZ 343