# Einführung in die Logik

Aufgabenblatt 7, 2018-06-11

## Präsenzaufgabe 1

Die Signatur $S$ enthalte drei Funktionssymbole $g$, $f$, $c$ mit den Stelligkeiten 3, 1 bzw. 0, und zwei Relationssymbole $r$, $s$ jeweils mit Stelligkeit 2. Entscheiden Sie, welche der folgenden Ausdrücke korrekt gebildete Infix-Darstellungen prädikatenlogischer Terme oder Formeln dieser Signatur sind ($x$, $y$, $z$ seien Variablen). Falls ein Term vorliegt, zeichnen Sie den Baum; falls weder ein Term noch eine Formel vorliegt, begründen Sie dies.

(a) $f(f(c))$

(b) $r(r(c,x),y)$

(c) $g(f(g(x,f(y),z)),z,f(c))$

(d) $r(x,y) \to (\exists z : s(z,y))$

(e) $\forall x : \exists y : (r(c,f(x,c)) \land ((\forall z : s(c,c)) \lor r(g(h(x),c,c),z)))$

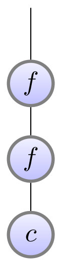
(f) $x \doteq g(x,x,f(x)) \lor \exists c : f(x) = c$

(g) $\exists x : \forall y : r(x,y) \lor s(y,g(c,c,x))f(x) = g(x,z,f(y))$

*Lösungsvorschlag:*

Vorüberlegung: Sobald Relationssymbole oder die Gleichheit auftreten, kann es sich nicht mehr um Terme handeln.

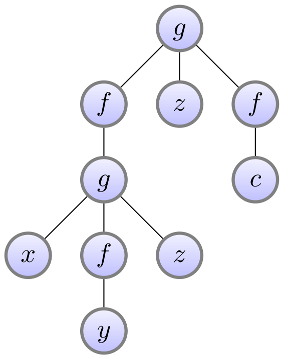
(a) Term



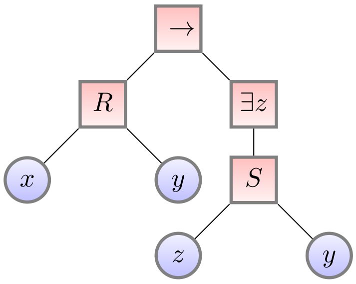

(b) $r(r(c,x),y)$ ist weder ein Term (da Relationssymbole auftreten), noch eine atomare Formel, da das erste Argument des äußeren Relationssymbols $r$ kein Term ist.

Achtung: Terme und Formeln sind rein syntaktische Konstrukte. In einem konkreten $S$-Model $\mathcal{M} = \langle D, I \rangle$ mit $\mathbb{B} \subseteq D$ kann die Interpretation $D \times D \xrightarrow{r^{\mathcal{M}}} \mathbb{B}$ auch Boole'sche Werte im Argument verarbeiten, für jede Blegung $\sigma \in D^V$ ist der Ausdruck $r^{\mathcal{M}}(r^{\mathcal{M}}(c^{\mathcal{M}}, \sigma(x)), \sigma(y))$ dann wohldefiniert. Falls er mit der Interpretation eines Terms oder einer Formel in $x$ und $y$ übereinstimmt ist das aber bloß Zufall. So ein Einzelfall ist nicht geeignet, der Zeichenkette $r(r(c,x),y)$ eine Bedeutung als Term oder Formel zu verleihen. In anderen Modellen braucht $\mathbb{B} \subseteq D$ schließlich nicht zu gelten.

(c) Term



(d) Formel:



(e) keine Formel; in der ersten Instanz von $R$ hat das zweite Argument $f$ zwei Argumente statt nur eins.

(f) Da die Signatur eine Konstante $c$ beinhaltet, dürfen wir keine Variable mit $c$ benennen, insofern handelt es sich bei $\exists c:$ nicht um einen zulässigen Junktor und der Ausdruck ist keine korrekte Formel. (Bei einer Signatur ohne Konstante $c$ wäre dieser Teil des Ausdrucks aber eine korrekte Formel.)

(g) keine Formel; die Konkatenation von $S(y, g(c, c, x))$ und $f(x)$ ist nicht definiert.

**Präsenzaufgabe 2**

(1) Warum muß die zu bearbeitende Formel im Davis-Putnam-Verfahren mindestens in NNF vorleigen? D.h., an welcher Stelle versagt andernfalls das Verfahren? Geben Sie ein konkretes Beispiel an!

(2) Wir betrachten eine KNF-Formel $A = \{K_i : i < n\}$ in Mengenschreibweise. Außerdem gelte $K_j \subset K_k$ für zwei Indizes $j$ und $k$. Zeigen Sie $A \models\!\!\!\!\!=\!\!| A - \{K_k\}$, d.h., die Oberklausel $K_k$ kann ohne Änderung der Semantk aus $A$ entfernt werden.

*Lösungsvorschlag:*

(1) Schon die Pure-Literal Regel schlägt fehl: betrachte etwa

$$A = (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$$

in DNF (aus Aufgabe 4, Blatt 5). $A$ ist äquivalent zu $(\neg p \wedge q \to \neg r) \wedge \neg(\neg q \vee r)$ und damit zu $B = (r \to p \vee \neg q) \wedge \neg(\neg q \vee r)$.

Hier treten $p$ und $r$, lokal betrachtet, jeweils nur nur positiv auf, während $q$ positiv und negativ erscheint. Nach der PLR sollten zunächst $p$ und $r$ durch $\top$ substituiert werden, wodurch im 2. Argument der Konjunktion $\perp$ entsteht, was nicht erfüllbar ist.

(2) Für jede Belegung $\varphi$ mit $\tilde{\varphi}(K_j) = 1$ gilt auch $\tilde{\varphi}(K_k) = 1$, während aus $\tilde{\varphi}(K_k) = 0$ ebenso $\tilde{\varphi}(K_j) = 0$ folgt. Also gilt immer $\tilde{\varphi}(K_j) \leq \tilde{\varphi}(K_k)$, weshalb $\tilde{\varphi}(K_k)$ nichts zum Infimum beiträgt, welches $\tilde{\varphi}(A)$ bestimmt:

$$\tilde{\varphi}(A) = \inf\{\tilde{\varphi}(K_i) \mid i < n\} = \inf\{\tilde{\varphi}(K_i) \mid i < n, i \neq k\}$$

**Hausaufgabe 3** [16 PUNKTE]

Beweisen Sie im Hilbert Kalkül $\mathcal{F}_0$:

(a) [6 PUNKTE] Falls $\Sigma \cup \{\neg A\}$ inkonsistent ist, dann gilt $\Sigma \vdash A$ (die Umkehrung gilt in jedem deduktiven System, vergl. Aufgabe 3/6(2).

(b) [6 PUNKTE] $\neg(A \to B) \vdash B \to A$.

(c) [4 PUNKTE] $\vdash A \to (\neg B \to \neg(A \to B))$.

Außer den Axiomen Ax1, Ax2 und Ax3 dürfen Sie die in Aufgabe 2, Blatt 4, gelisteten Eergebnisse alle verwenden, ebenso das Deduktionstheorem, aber *nicht* die Vollständigkeit von $\mathcal{F}_0$.

**Hausaufgabe 4** [8 PUNKTE]

[NNF in der Prädikatenlogik]

Idee: Wenn die einzigen Negationen direkt vor atomaren PL-Formeln auftreten, dann wollen wir von einer PL-Formel in NNF sprechen.

Um die Existenz derartiger Normalformen zu garantieren, ist einzig zu klären, wie Negationen vor Quantoren wegtransformiert werden können. Zeigen Sie:

$$\neg\forall x A \models\!\!\!\!\dashv \exists x(\neg A) \quad \text{und} \quad \neg\exists x B \models\!\!\!\!\dashv \forall x(\neg B)$$

[Später wird gezeigt, dass man alle Quantoren nach vorne schieben kann (Pränex-Normalform). Daher genügt es, die Begriffe KNF bzw. DNF auf quantorenfreie PL-Formeln zu übertragen, indem man die atomaren Formeln der Aussagenlogik durch diejenigen der Prädikatenlogik ersetzt, denn atomare Formeln enthalten keine Quantoren.]

**Hausaufgabe 5** [10 PUNKTE]

[Mächtigkeit von Domänen]

**Definition**: Eine $S$-Struktur $\mathcal{M} = \langle D, I \rangle$ erfüllt eine Formel $A \in FO(S)$, geschrieben $\mathcal{M} \models A$, sofern $\mathcal{M}[\![A]\!](\sigma) = 1$ für alle $\sigma \in D^V$.

Für eine $S$-Struktur $\mathcal{M} = \langle D, I \rangle$ schreiben wir $|\mathcal{M}|$ für $|D|$, die Mächtigkeit von D. Wir nennen $\mathcal{M}$ endlich, falls die Menge $D$ endlich ist.

(a) [2 PUNKTE] Geben Sie eine abgeschlossene Formel $A$ an, für die gilt: $\mathcal{M} \models A$ genau dann, wenn $|\mathcal{M}| = 1$.

(b) [6 PUNKTE] Sei $B \in FO(S)$ eine abgeschlossene Formel, in der das Symbol „ $=$ “ nicht vorkommt. Wie kann aus einem endlichen Modell $\mathcal{M}$ für $B$ ein Model $\mathcal{M}_1$ für $B$ konstruiert werden, so dass $|\mathcal{M}_1| = |\mathcal{M}| + 1$ gilt?

(c) [2 PUNKTE] Schließen Sie aus (b), dass es keine Formel gibt, die ohne „ $=$ “ auskommt und äquivalent zu Ihrer obigen Formel $A$ ist.

**Hausaufgabe 6** [8 PUNKTE]

Die Signatur $\Sigma$ enthalte eine Konstante $c$, ein einstelliges Funktionssymbol $f$, ein dreistelliges Funktionssymbol $g$ und zwei 2-stellige Prädikatssymbole $r$ und $s$. Welcher der folgenden Ausdrücke

(1) $\forall x : \exists y : r(z, f(x)) \wedge \forall z : (s(c, c) \vee r(g(f(x), z, y), z))$

(2) $\exists x : \forall y : (r(x, y) \rightarrow s(y, g(c, c, y)) \wedge f(x) = g(x, z, f(y)))$

ist eine korrekte prädikatenlogische Formel für die gegebene Signatur? Zeichnen Sie ggf. den vollständigen Syntaxbaum und bewerten Sie das Auftreten aller Variablen als gebunden oder frei.

**Abgabe bis Montag, 2018-06-18, 13:15, im Kasten neben IZ 343**