Einführung in die Logik

Aufgabenblatt 9, 2018-06-25

Präsenzaufgabe 1

In der Vorlesung und den Folien wurde die Sematik einer Formel $A \in \boldsymbol{FO}(S)$ bezogen auf eine S-Struktur $\mathcal{M} = \langle D, I \rangle$ definiert als Funktion

$$\mathcal{M}[\![A]\!] : D^V \longrightarrow \mathbb{B}$$

(vergl. Definition 4.16). Da zwischen Funktionen $D^V \longrightarrow \mathbb{B}$ und Teilmengen von D^V eine bijektive Beziehung besteht (Stichwort: charakteristische Funktion), kann man die Semantik auch mit Hilfe solcher Teilmengen formulieren.

(1) Definieren Sie die Semantik zunächst atomarer Formeln und dann rekursiv aller prädikatenlogischer Formeln als derartige Teilmengen. [Hinweis: verwenden Sie Mengenoperationen.]

(2) Wie muß mit dieser neuen Formulierung der Semantik die Folgerelation $\Sigma \models A$ definiert werden? (Eine solche Definition für die Prädikatenlogik scheint in den Folien bisher zu fehlen.)

Lösungsvorschlag:

Beachte: Unter diesen Voraussetzungen wollen wir auch die Interpretationen von Prädikaten $p_{/k} \in \boldsymbol{Pred}$ als Teilmengen von D^k auffassen.

(1)
- ▷ $\mathcal{M}[\![t_0 = t_1]\!] := \{\, \sigma \in D^V : \mathcal{M}[\![t_0]\!](\sigma) = \mathcal{M}[\![t_1]\!](\sigma) \,\}$
  (Dies ist auch als *Egalisator* der beiden Funktionen $\mathcal{M}[\![t_0]\!]$ und $\mathcal{M}[\![t_1]\!]$ von D^V nach D bekannt.)
- ▷ $\mathcal{M}[\![p(t_0, \ldots, t_{n-1})]\!] = \{\, \sigma \in D^V : \langle \mathcal{M}[\![t_0]\!](\sigma), \ldots, \mathcal{M}[\![t_{n-1}]\!](\sigma) \rangle \in p^{\mathcal{M}} \}$
- ▷ $\mathcal{M}[\![\neg B]\!] := D^V - \mathcal{M}[\![B]\!]$
- ▷ $\mathcal{M}[\![B \wedge C]\!] := \mathcal{M}[\![B]\!] \cap \mathcal{M}[\![C]\!]$
- ▷ $\mathcal{M}[\![B \vee C]\!] := \mathcal{M}[\![B]\!] \cup \mathcal{M}[\![C]\!]$
- ▷ $\mathcal{M}[\![B \to C]\!] := \big(D^V - \mathcal{M}[\![B]\!]\big) \cup \mathcal{M}[\![C]\!]$
- ▷ $\mathcal{M}[\![\forall x\, B]\!] := \bigcap \{\, \mathcal{M}[\![B]\!]\{x/d\}^{-1} : d \in D \,\}$
- ▷ $\mathcal{M}[\![\exists x\, B]\!] := \bigcup \{\, \mathcal{M}[\![B]\!]\{x/d\}^{-1} : d \in D \,\}$

In den letzten beiden Schritten haben wir $\{x/d\}$ als „Substitutionsfunktion“ von D^V auf sich aufgefaßt, die Belegungen $\sigma \in D^V$ an der Stelle $x \in V$ dahingehend abwandelt, dass der Funktionswert auf $d \in D$ gesetzt wird. Das entsprechende Urbild von $\mathcal{M}[\![B]\!] \subseteq D^V$ ist dann

$$\mathcal{M}[\![B]\!]\{x/d\}^{-1} = \{\, \sigma \in D^V : \sigma\{x/d\} \in \mathcal{M}[\![B]\!] \,\}$$

Einschub für Interessierte (nicht in der Übung besprechen): Alternativ kann man $\{x/d\}$ auch als Singleton „Kontext“ auffassen, d.h., als partielle Funktion $V \xrightarrow{\Gamma} D$ mit endlichem Definitionsbereich $U \subseteq V$, hier $U = \{x\}$. Über jedem Kontext Γ mit Definitionsbereich U interessiert uns dann nur noch die Menge D^{V-U} der „Restbelegungen“ $V - U \longrightarrow D$ mit deren Hilfe sich Γ zu einer totalen Funktion in D^V erweitern läßt. Die entsprechende Potenzmenge wollen wir die *Faser* über Γ nennen und mit $F(\Gamma)$ bezeichnen. Elemente von $F(\Gamma)$ entsprechen also Teilmengen von D^V, bei denen alle Belegungen auf $U \subseteq V$ mit Γ übereinstimmen.

Man beachte, dass die Kontexte partiell geordnet sind: $U \xrightarrow{\Gamma} D$ und $U' \xrightarrow{\Gamma'} D$ erfüllen $\Gamma \leq \Gamma'$ falls Γ mit der Einschränkung von Γ' auf $U \subseteq U'$ übereinstimmt. Das liefert eine Abbildung ϑ von D^{V-U} nach $D^{V-U'}$, die $V - U \xrightarrow{\tau} D$ auf die potentiell kleinere Menge $V - U'$ einschränkt. (Anders betrachtet werden Belegungen $V \xrightarrow{\sigma} D$, die auf U mit Γ übereinstimmen, auf den Elementen von $U' - U$ so modifiziert, dass sie auf U' mit Γ' übereinstimmen.) Zwischen den Fasern von Γ und Γ' liefert ϑ nun drei kanonische Abbildungen, von denen uns hier aber nur die Urbildabbildung $F(\Gamma') \xrightarrow{\vartheta^{-1}} F(\Gamma)$ interessiert.

Die Idee ist nun, die Teilmenge $\mathcal{M}[\![Qx\, B]\!]$ in der Faser über $\Gamma = \emptyset$ zu bestimmen, indem man in jedem Kontext $\Gamma = \{x/d\}$, $d \in D$, die dortige Teilmenge $\mathcal{M}[\![B]\!]$ bestimmen, und deren Urbild unter der passenden Modifikaition zu betrachten (weil der eine Kontext leer ist, stimmt die Modifikation mit $\{x/d\}$ überein). Diese Urbilder sind nun entweder zu schneiden ($\forall x\, B$) oder zu vereinigen ($\exists x\, B$).

(2) Für $A, B \in \boldsymbol{FO}(S)$ und $\Sigma \subseteq \boldsymbol{FO}(S)$ kann $B \models A$ sinnvollerweise nur bedeuten, dass für jede S-Struktur $\mathcal{M}$ gelten muss

$$\mathcal{M}[\![B]\!] \subseteq \mathcal{M}[\![A]\!]$$

Man beachte, dass in diesem Fall $B \to A$ allgemeingültig ist und somit gilt

$$\mathcal{M}[\![B \to A]\!] = \mathcal{M}[\![\neg B \vee A]\!] = \mathcal{M}[\![\neg B]\!] \cup \mathcal{M}[\![A]\!] = D^V$$

Für $\Sigma \models A$ erzwingt dies folgende Definition: für jede S-Struktur $\mathcal{M}$ muss gelten

$$\bigcap \{\, \mathcal{M}[\![B]\!] \,:\, B \in \Sigma \,\} \subseteq \mathcal{M}[\![A]\!]$$

[Nach wie vor irritierend ist die Bezeichnung $\supset$, die manche Logiker für $\to$ verwenden.]

Hausaufgabe 2 [12 PUNKTE]

(Vergl. Aufgabe 4, Blatt 4.) Im Vorgriff auf Folie 141 erwähnen wir den Kompaktheitssatz der Prädikatenlogik:

> Eine Formelmenge $\Sigma \subseteq \boldsymbol{FO}(S)$ ist genau dann erfüllbar, wenn dies für jede endliche Teilmenge von Σ gilt.

Dabei bedeutet Erfüllbarkeit die Existenz einer S-Struktur $\mathcal{M} = \langle D, I \rangle$ und einer Belegung $\sigma \in D^V$, so dass $\mathcal{M}[\![B]\!](\sigma) = 1$ für jede Formel $B \in \Sigma$.

Gegeben sei $A \in \boldsymbol{FO}(S)$, die für jedes $n \in I\!N$ ein Model $\mathcal{M}_n = \langle D_n, I_n \rangle$ besitzt mit $|D_n| \geq n$.

(1) [3 PUNKTE] Geben Sie für jedes $n \in I\!N$ eine Formel $B_n \in \boldsymbol{FO}(S)$ an, so dass für jedes S-Struktur $\mathcal{M} = \langle D, I \rangle$ gilt: $\mathcal{M}$ erfüllt B_n genau dann, wenn $|D| \geq n$.

(2) [3 PUNKTE] Zeigen Sie unter Verwendung des Kompaktheitssatztes, dass die Formelmenge $\Sigma = \{\, A \wedge B_n \,:\, n \in I\!N \,\}$ erfüllbar ist.

(3) [3 PUNKTE] Zeigen Sie, dass A ein Model mit unendlichem Datenbereich besitzt. [Hinweis: betrachten Sie eine Model für Σ.]

(4) [3 PUNKTE] Schließen Sie, dass es keine Formel E gibt, für die genau die S-Strukturen mit endlichem Datenbereich Modelle sind.

Hausaufgabe 3 [12 PUNKTE]

Wir betrachten die Signatur Σ der Arithmetik mit zwei Konstanten 0 und 1, zwei zweistelligen Funktionensymbolen $+$ und $\cdot$ einem zweistelligen Prädikatensymbol $<$. Viele Aussagen über natürliche Zahlen (also die Σ- Struktur mit Trägermenge $I\!N$ und der üblichen Interpretation der Symbole in Σ) lassen sich als prädikatenlogische Formeln über Σ ausdrücken.

Beispiel: Der Aussage „ x ist eine gerade Zahl“ entspricht die Formel $\exists y : (x = y + y)$ mit einer freien Variable x.

Transformieren Sie die folgenden Aussagen in prädikatenlogische Formeln über Σ:

(a) [3 PUNKTE] „ x teilt $y+1$.“

(b) [4 PUNKTE] „ x ist eine Primzahl.“

(c) [4 PUNKTE] „Es gibt unendlich viele Primzahlen“

(d) [5 PUNKTE] „Jede gerade Zahl ≥ 4 läßt sich als Summe zweier Primzahlen darstellen.“

(e) [5 PUNKTE] „Alle Zahlen mit ungeradem Quadrat sind ungerade.“

Hausaufgabe 4 [14 PUNKTE]

Begründen Sie ihre Antworten ausführlich:

(a) [9 PUNKTE] Die Signatur S möge mindestens ein einstelliges Prädikatensymbol p enthalten. Wir betrachten einen Term t, in dem die Variable x nicht vorkommt. Ist die Formel $p(t) \leftrightarrow \forall x : (x = t \rightarrow p(x))$ allgemeingültig?

(b) [5 PUNKTE] Bleibt die Antwort dieselbe, wenn x im Term t vorkommt?

Abgabe bis Montag, 2018-07-01, 13:15, im Kasten neben IZ 343