



Einführung in die Logik

Aufgabenblatt 4, 2019-06-14

Hausaufgabe 1 [16 PUNKTE]

Wenden Sie das Davis-Putnam-Verfahren an um zu zeigen:

- (a) $p \wedge q, q \rightarrow r \models r$
- (b) $p \rightarrow r, q \rightarrow s, p \vee q \models r \vee s$
- (c) $\neg q, p \rightarrow q \models \neg q$
- (d) $\models \neg(p \rightarrow q) \rightarrow q \rightarrow p$

Hausaufgabe 2 [12 PUNKTE]

- (a) [4 PUNKTE] Bestimmen Sie die duale Formel zu $F = \neg((p \wedge q) \vee (r \wedge \neg s))$ schrittweise anhand der rekursiven Definition auf Folie 87.
- (b) [5 PUNKTE] Für jede Bewertung φ definieren wir $\neg\varphi$ durch $\neg\varphi(p) = 1 - \varphi(p)$. Zeigen Sie, dass für jede Formel A gilt: $\widehat{\neg\varphi}(d(A)) = 1 - \widehat{\varphi}(A)$.
- (c) [3 PUNKTE] Verwenden Sie (b) um nachzuweisen, dass eine Formel A genau dann eine Tautologie ist, wenn $d(A)$ unerfüllbar ist.

Hausaufgabe 3 [12 PUNKTE]

Zeigen Sie mittels graphischer Resolution, dass folgende Formel in KNF unerfüllbar ist:

$$(\neg p \vee s) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (r \vee q \vee s) \wedge (q \vee \neg s) \wedge (\neg q \vee s) \wedge (\neg q \vee \neg s)$$

oder in Mengenschreibweise

$$\{\{\neg p, s\}, \{p, q, \neg r\}, \{r, q, s\}, \{q, \neg s\}, \{\neg q, s\}, \{\neg q, \neg s\}\}$$

Geben Sie explizit an, in welcher Reihenfolge der Variablen Sie Resolventen bilden, und strukturieren Sie den Graphen so, dass diese Reihenfolge deutlich wird! Sie brauchen keine Farben zu verwenden, aber wenn sie subsummierte Klauseln streichen, schreiben Sie auf, welche Variable beim Bilden von Resolventen für welche gestrichene Klausel verantwortlich war.

Hausaufgabe 4 [12 PUNKTE]

Im Folgenden fassen wir Klauseln wieder als Mengen von Literalen auf. Wenn n atomare Formeln (=Variablen) zur Verfügung stehen, wieviele verschiedene Klauseln kann man formen,

- (a) in denen jede Variable höchstens einmal auftritt?
- (b) in denen maximal zwei Literale auftreten und deren Variablen verschieden sind?
- (c) in denen maximal drei Literale auftreten und deren Variablen verschieden sind?

Was schließen Sie daraus für die Anzahl der Schritte bei der Resolutionsmethode, wenn die Ausgangsformel in KNF nur Klauseln enthält, die den Bedingungen (b) bzw. (c) genügen?

Hausaufgabe 5 [12 PUNKTE]

Die Signatur $\mathcal{S} = \{g_{/3}, f_{/1}, c_{/0}; R_{/2}, S_{/2}\}$ enthalte drei Funktionssymbole g, f, c mit den Stelligkeiten 3, 1 bzw. 0, und zwei Relationssymbole R, S jeweils mit Stelligkeit 2. Entscheiden Sie, welche der folgenden Ausdrücke korrekt gebildete Infix-Darstellungen prädikatenlogischer Terme oder Formeln dieser Signatur sind (x, y, z seien Variablen). Falls ein Term oder eine Formel vorliegt, zeichnen Sie den Syntax-Baum (etwa Terme blau, Formeln rot); falls weder ein Term noch eine Formel vorliegt, begründen Sie dies.

- (a) $f(f(c))$
- (b) $R(R(c, x), y)$
- (c) $g(f(g(x, f(y), z)), z, f(c))$
- (d) $R(x, y) \rightarrow (\exists z : S(z, y))$
- (e) $\forall x : \exists y : (R(c, f(x, c)) \wedge ((\forall z : S(c, c)) \vee R(g(h(x), c, c), z)))$
- (f) $x \doteq g(x, x, f(x)) \vee \exists c : f(x) \doteq c$
- (g) $\exists x : \forall y : R(x, y) \vee S(y, g(c, c, x)) \rightarrow f(x) \doteq g(x, z, f(y))$

Hausaufgabe 6 [12 PUNKTE]

Wir betrachten die Signatur $\mathcal{S} = \{R_{/2}\}$ ohne Funktionssymbole und mit einem zweistelligen Prädikatensymbol R . Die \mathcal{S} -Strukturen entsprechen damit gerichteten Graphen $G = \langle V, R \rangle$ mit Knotenmenge V und Kantenmenge $R \subseteq V \times V$. (Wenn keine Verwechslungen möglich sind, kann man auf die notationelle Unterscheidung zwischen der Signatur-Komponente R und seiner Interpretation in der Menge V verzichten.)

Viele Aussagen über Graphen (auch ungerichtete) lassen sich als prädikatenlogische Formeln über \mathcal{S} ausdrücken.

Beispiel: Der Aussage „Jeder Knoten von G hat einen Vorgänger oder einen Nachfolger“ entspricht die Formel $\forall x : \exists y : (R(x, y) \vee R(y, x))$.

Geben Sie Formeln in der Theorie der Graphen an, die besagen dass ein gegebener Graph ungerichtet ist und

- (a) [4 PUNKTE] höchstens vier Knoten hat;
- (b) [4 PUNKTE] mindestens 3 Knoten hat;
- (c) [4 PUNKTE] mindestens eine Schleife hat;
- (d) [4 PUNKTE] eine Clique ist, d.h. alle Paare verschiedener Knoten formen eine Kante und es gibt keine Schleifen;
- (e) [6 PUNKTE] in jedem Knoten ein Pfad mit mindestens drei verschiedenen Kanten startet