3. Großübung (27.5.19)

Notation: $\Gamma \vdash A$ bedeutet:
A lässt sich in K_0 mit Annahme Γ beweisen
(hierbei ist Γ eine Liste / Menge von Formeln).
Wir wissen: K_0 ist vollständig und korrekt, also
$\Gamma \vdash A$ gdw. $\Gamma \models A$.
Insb.: $\vdash A$ (A lässt sich ohne Annahmen beweisen)
gdw. $\models A$ gdw. A Tautologie.
Dies wollen wir im Folgenden aber nicht verwenden.

Regeln von K_0:

$\forall A, B, C \in \mathcal{F}_0$ gilt:

$\vdash A \to (B \to A)$	Ax1
$\vdash (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$	Ax2
$\vdash (\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$	Ax3
$A, A \to B \vdash B$ (oder $\dfrac{A \quad A \to B}{B}$)	MP

Folgende Theoreme sind aus der Vorlesung bekannt

$\vdash A \to A$ Th1

$\vdash \neg\neg A \to A$ Th2

$\vdash \neg B \to (B \to A)$ Th3

$\vdash B \to \neg\neg B$ Th4

$\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ Th5

$\vdash A \to (\neg B \to \neg(A \to B))$ Th6

$\vdash (A \to B) \to (A \to \neg B) \to \neg A$ Th7

$\vdash (B \to A) \to (\neg B \to A) \to A$ Th8

$\forall A, B \in f_0$.

Das Deduktionstheorem (DT) zeigt

$$\Gamma, A \vdash B \quad \text{gdw.} \quad \Gamma \vdash A \to B.$$

Es wird üblicherweise in Richtung „$\Leftarrow$" angewandt, um die zu zeigende Aussage zu vereinfachen.

Achtung: Kann nur angewandt werden, wenn der äußerste Operator „$\to$" ist.

z.B. „$\vdash \neg(A \to B)$" DT nicht anwendbar

Achtung: Klammerung beachten

$\vdash A \to (B \to C)$ $\cancel{\Longleftrightarrow}$ $A \to B \vdash C$

falsch

$\overset{DT}{\Longleftrightarrow}$ $A \vdash B \to C$

$\overset{DT}{\Longleftrightarrow}$ $A, B \vdash C$

Ein weiteres wichtiges Hilfsmittel ist die
<u>Inkonsistenzregel</u> (Blatt 2, Aufgabe 2, (3))

$\Gamma \vdash \neg A$ gdw. $\Gamma \cup \{A\}$ <u>inkonsistent</u>/widersprüchlich
d.h. $\exists$ Formel B mit
$\Gamma, A \vdash B$ und $\Gamma, A \vdash \neg B$

<u>Beweis</u>

„$\Rightarrow$" $\Sigma \vdash \neg A \Rightarrow \Sigma, A \vdash \neg A$ (Beweis wie vorher, ohne Verwendung von A)

und

$\Sigma, A \vdash A$ (Beweis: 0. A Annahme)

$\Rightarrow \Sigma \cup \{A\}$ inkonsistent

„$\Leftarrow$" Ang. $\exists B$ mit $\Gamma, A \vdash B$, $\Gamma, A \vdash \neg B$

$\overset{2\times \text{Deduktionstheorem}}{\Longrightarrow}$ $\Gamma \vdash A \to B$ (*)

und $\Gamma \vdash A \to \neg B$ (**)

Wir beweisen $\Gamma \vdash \neg A$

0. $A \to B$ (*)
1. $A \to \neg B$ (**)
2. $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$ Th7
3. $(A \to \neg B) \to \neg A$ MP 0,2
4. $\neg A$ MP 1,3 $\blacksquare$

Übliche Vorgehensweise: (meistens optimal, aber nicht immer)

- Verwende Deduktionstheorem so oft wie möglich
- Fall 1: Äußerster Operator auf der rechten Seite ist nun „$\neg$"
  $\rightarrow$ Verwende Inkonsistenzregel, um „$\neg$" zu entfernen
  Zeige Inkonsistenz
- Fall 2: Rechte Seite ist einzelne Variable
  (Führe Beweis direkt)

Bsp: $\vdash \neg(A \to B) \to \neg B$

$\overset{DT}{\Leftrightarrow}$ $\neg(A \to B) \vdash \neg B$

$\underset{IR}{\Leftrightarrow}$ $\neg(A \to B), B$ inkonsistent

0.	B	Annahm
1.	$B \to (A \to B)$	Ax 1
2.	$A \to B$	MP 0,1
3.	$\neg(A \to B)$	Annahm

„Widerspruch" (Inkonsistenz)

$\square$

Bsp: $\vdash \neg(A \to A) \to \neg(A \to B)$

Beweis ohne Inkonsistenzregel & D.T. ist kompliziert:

0.	$A \to A$	Th1
1.	$(A \to A) \to \neg\neg(A \to A)$	Th4
2.	$\neg\neg(A \to A)$	MP 0,1
3.	$\neg\neg(A \to A) \to (\neg(A \to A) \to \neg(A \to B))$	Th3
4.	$\neg(A \to A) \to \neg(A \to B)$ $\blacksquare$	MP 2,3

Beweis mit IR & DT ist einfach:

$\vdash \neg(A \to A) \to \neg(A \to B)$

$\overset{DT}{\iff} \neg(A \to A) \vdash \neg(A \to B)$

$\overset{IR}{\iff} \neg(A \to A),\ A \to B$ inkons.

0. $\neg(A \to A)$ Annahme
1. $A \to A$ Th1

$\blacksquare$

Bsp: $\vdash (B \to \neg A) \to (A \to \neg B)$

$\overset{DT}{\Longleftarrow}$ $B \to \neg A \vdash A \to \neg B$

$\overset{DT}{\Longleftarrow}$ $B \to \neg A, A \vdash \neg B$

$\overset{IR}{\Longleftarrow}$ $B \to \neg A, A, B$ inkonsistent

0. $B \to \neg A$ Annahm
1. B Annahm
2. $\neg A$ MP 1,0
3. A Annahm

$\blacksquare$

Bsp: $B \to (\neg A \to C), (\neg A \to C) \to (B \to \neg A), \neg C \vdash \neg B$

$\overset{IR}{\Longleftarrow}$ $B \to (\neg A \to C), (\neg A \to C) \to (B \to \neg A), \neg C, B$ inkons.

0. B Annahm
1. $B \to (\neg A \to C)$ Annahm
2. $\neg A \to C$ MP 0,1
3. $(\neg A \to C) \to (B \to \neg A)$ Ann.
4. $B \to \neg A$ MP 2,3
5. $\neg A$ MP 0,4
6. C MP 5,2
7. $\neg C$ Annahme $\blacksquare$

Bsp: $\vdash A \to \neg((B \to \neg\neg B) \to (A \to \neg(B \to B)))$

$\overset{DT}{\Longleftarrow}$ $A \vdash \neg((B \to \neg\neg B) \to (A \to \neg(B \to B)))$

$\overset{IB}{\Longleftarrow}$ $A, (B \to \neg\neg B) \to (A \to \neg(B \to B))$ inkonsistent

0. $(B \to \neg\neg B) \to (A \to \neg(B \to B))$ Annahme
1. $B \to \neg\neg B$ Th 4
2. $A \to \neg(B \to B)$ MP 1,0
3. A Annahme
4. $\neg(B \to B)$ MP 3,2
5. $B \to B$ Th 1

$\blacksquare$

Ko: • wenige Beweisregeln *
• Spricht nur über Formeln mit $\neg, \rightarrow$ **

$\Rightarrow$ Beweise umständlich * **

abe Korrektheit * ** und Vollständigkeit **
„leicht" zu zeigen.

Es gibt andere Kalküle für die Aussagenlogik
z.B. Gentzen - Sequenkalkül

• Spricht über Formeln über $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$
• 11 Beweisregeln (davon 3 Axiome)

- leichter anzuwenden
- Beweis von Vollständigkeit & Korrektheit sind komplex

Kalküle spielen in Teilen der Theoretischen Informatik eine wichtige Rolle

Für die Algorithmik der Aussagenlogik werden in der Praxis aber andere Verfahren eingesetzt (DPLL & Resolution).