4. Großübung (17.6.19)

Algorithmik der Aussagenlogik:

- Davis-Putnam
- Resolution
- Tableaux

Wichtigestes algorithmisches Problem der Aussagenlogik:

Erfüllbarkeit (SAT) — von „satisfiability"

Eingabe: Formel $A \in \mathcal{F}(\mathcal{AT})$ in KNF (Konjunktive Normalform)

Frage: Ist A erfüllbar?

Andere Probleme lassen sich darauf zurück führen.

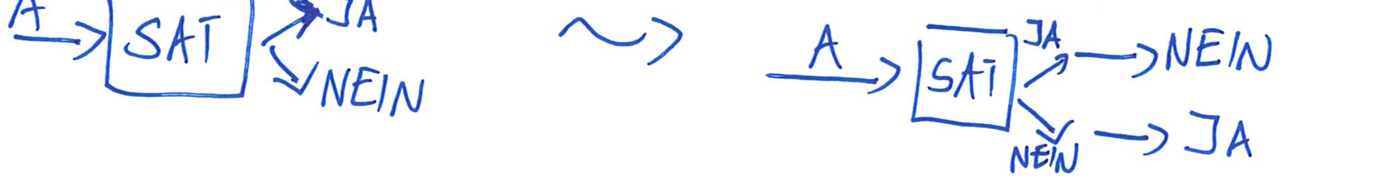
- Unerfüllbarkeit gegeben A, Frage: A unerfüllbar?

ist das Komplementproblem zu Erfüllbarkeit.

→ überprüfe Erfüllbarkeit, invertiere Ergebnis

Algo für Erfüllbarkeit

Algo für Unerfüllbarkeit



- <u>Validität</u> <u>gegeben</u> A, <u>Frage</u>: A Tautologie?

Nutze: A Tautologie $\Leftrightarrow$ $\neg A$ unerfüllbar

Denn: Die Belegungen, die $\neg A$ erfüllen, erfüllen A nicht.

$\Rightarrow$ Jede Belegung erfüllt A
$\Leftrightarrow$ Keine Belegung erfüllt $\neg A$

- <u>Implikation</u> <u>gegeben</u> Formelmenge Γ, Formel A
<u>Frage</u>: Gilt $\Gamma \models A$?

Nutze: $\Gamma \models A$ gdw. $\Gamma \cup \{\neg A\}$ unerfüllbar

Warum: $\Gamma \models A \Leftrightarrow \bigwedge_{B\in\Gamma} B \models A$ (wenn Γ endlich)

$\Leftrightarrow \bigwedge_{B\in\Gamma} B \to A$ Tautologie // semantisches Deduktionstheorem

$\Leftrightarrow \neg(\bigwedge_{B\in\Gamma} B \to A)$ unerfüllbar // siehe oben

$\Leftrightarrow \neg(\neg \bigwedge_{B\in\Gamma} B \vee A)$ "

$\Leftrightarrow \bigwedge_{B\in\Gamma} B \wedge \neg A$ "

$\Leftrightarrow \Gamma \cup \{\neg A\}$ unerfüllbar.

Unterschiedliche Verfahren erfordern unterschiedliche Normalformen:

- Tableaux: Elimination von „$\leftrightarrow$"
- Davis-Putnam: NNF (für Split & Pure)
  bzw. KNF (für Unit & Subsum.)
- Resolution: KNF

<u>Beispiel:</u> Wollen überprüfen, ob

$$A \equiv ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow \neg(\neg r \wedge p)$$

eine Tautologie ist.

Möglichkeit 1: Transformiere $\neg A$ in KNF

Möglichkeit 2: Transformiere A in DNF, negiere dann

$$\begin{aligned}
A &\mathrel{=\!\mid\!\models} \neg((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \vee \neg(\neg r \wedge p) \\
&\mathrel{=\!\mid\!\models} \neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)) \vee \neg(\neg r \wedge p) \\
&\mathrel{=\!\mid\!\models} (\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee r)) \vee \neg\neg r \vee \neg p \\
&\mathrel{=\!\mid\!\models} (\neg\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg\neg q \wedge \neg r) \vee \neg\neg r \vee \neg p \\
&\mathrel{=\!\mid\!\models} (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r) \vee r \vee \neg p \quad \text{in DNF}
\end{aligned}$$

Nun lässt sich $\neg A$ in KNF leicht berechnen

- Vertausche $\wedge$ und $\vee$
- Vertausche $\neg p$ und p (für alle Variablen)

$$\neg A \mathrel{=\!\mid\!\models} (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge \neg r \wedge p \quad \text{in KNF}$$

Kurze Übersicht der Verfahren, Details siehe Folien / Skript

Davis-Putnam

Sei A in KNF

4 Regeln:

Notation aus den Folien

- **Split**: A erfüllbar $\Leftrightarrow$ $\underbrace{A[p \mapsto 1]}_{}$ oder $A[p \mapsto 0]$ erfüllbar

  $[p/\top]$ $\quad$ $[p/\bot]$

- **Pure**: Wenn p pur positiv in A: A erfüllbar $\Leftrightarrow$ $A[p \mapsto 1]$ erfüllbar

  nur nicht-negierte Vorkommen

  Wenn p pur negativ in A: A erfüllbar $\Leftrightarrow$ $A[p \mapsto 0]$ erfüllbar

- **Unit**: Wenn A von der Form $A' \wedge (p)$:

  Unit-Klausel

  A erfüllbar $\Leftrightarrow$ $A'[p \mapsto 1]$ $(= A[p \mapsto 1])$ erfüllbar

  Wenn $A \equiv A' \wedge (\neg p)$:

  A erfüllbar $\Leftrightarrow$ $A'[p \mapsto 0]$ erfüllbar

- **Subsumption**: Wenn $A \equiv A' \wedge K \wedge K'$ mit $K \subseteq K'$:

  A erfüllbar $\Leftrightarrow$ $A' \wedge K$ erfüllbar

  Weglassen der größeren Klausel
  Die kleinere Klausel ist schwieriger zu erfüllen.

Wenn $A \equiv A' \wedge K'$, und K' ist trivial ($K' = \ldots \vee q \vee \neg q$), dann

A erfüllbar $\Leftrightarrow$ A' erfüllbar.

Durch Anwenden der Regeln entsteht ein Binärbaum.

- Alle Äste enden mit $0 / \bot$: Formel unerfüllbar
- Mind. 1 Ast endet mit $1 / \top$: Formel erfüllbar (erfüllende Belegung kann abgelesen werden)

Die Auswahl der Regeln & Variablen hat keinen Einfluss auf die Korrektheit – man erhält immer das richtige Ergebnis.

<u>ABER</u>: Geschickte Auswahlen verkürzen den Rechenweg.

<u>Tipp</u>: Unit zuerst
Split zuletzt
Häufig vorkommende Variablen zuerst.

Bsp DP1

$\neg A$ in KNF von vorhin

$(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg r) \wedge (p)$

wird zu 0, literal fällt weg

wird zu 1, Klausel fällt weg

$\downarrow p \mapsto 1$ Unit

$(q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg r)$

$\downarrow r \mapsto 0$ Unit

$(q) \wedge (\neg q)$

$\downarrow q \mapsto 1$ Unit

0

$\Rightarrow \neg A$ unerfüllbar

$\Rightarrow A$ Tautologie.

Bsp D2

$$(p \vee \neg r \vee \neg s \vee \neg t) \wedge (\neg r \vee \neg s) \wedge (r \vee \neg t) \wedge (r \vee t) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (q \vee r \vee s) \wedge (\neg r \vee s) \wedge (\neg q \vee \neg r \vee s \vee$$

Subsum Subsum

$\downarrow$ 2x Subsumption

$$(\neg r \vee \neg s) \wedge (r \vee \neg t) \wedge (r \vee t) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (q \vee r \vee s) \wedge (\neg r \vee s)$$

Split

$r \mapsto 1$:

$$(\neg s) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (s)$$

$\downarrow$ $s \mapsto 0$ Unit

$$1 \wedge (\ldots \vee 1) \wedge 0 = 0$$

$r \mapsto 0$:

$$(\neg t) \wedge (t) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (q \vee s)$$

$\downarrow$ $t \mapsto 0$ Unit

$$0$$

$\Rightarrow$ Formel unerfüllbar.

Bsp DP3: // Aus Zeitgründen nicht in Großübung gemacht

$(\neg p) \wedge (\neg t \vee q \vee p) \wedge (\neg s \vee \neg q) \wedge (s \vee \neg q \vee t) \wedge (r \vee \neg p) \wedge (\neg r) \wedge (\neg s \vee \neg q \vee s)$

$\downarrow$ $p \mapsto 0$ Unit

$(\neg t \vee q) \wedge (\neg s \vee \neg q) \wedge (s \vee \neg q \vee t) \wedge (\neg r) \wedge (\neg s \vee \neg q \vee s)$

$\downarrow$ $r \mapsto 0$ Unit (und auch pure)

$(\neg t \vee q) \wedge (\neg s \vee \neg q) \wedge (s \vee \neg q \vee t) \wedge (\neg s \vee \neg q \vee s)$

ist trivial (und wird von $(\neg s \vee \neg q)$ subsummiert)

$\downarrow$ Subsumption

$(\neg t \vee q) \wedge (\neg s \vee \neg q) \wedge (s \vee \neg q \vee t)$

Split

$t \mapsto 1$:

$(q) \wedge (\neg s \vee \neg q)$

$\downarrow$ $q \mapsto 1$ Unit

$(\neg s)$

$\downarrow$ $s \mapsto 0$ Unit

1 //

$t \mapsto 0$:

$(\neg s \vee \neg q) \wedge (s \vee \neg q)$

$\downarrow$ $q \mapsto 0$ Pure

1 //

Unnötig, da wir links bereits herausgefunden haben, dass die Formel erfüllbar ist.

Formel ist erfüllbar, z.B. mit Belegung
$p \mapsto 0, r \mapsto 0, t \mapsto 1, q \mapsto 1, s \mapsto 0$.

Resolution

Reichere Formel (in KNF) durch neue Klauseln, so genannte Resolventen, an.

Klausel $K_1 = K_1' \vee p$
Klausel $K_2 = K_2' \vee \neg p$
Resolvente ist $K_1' \vee K_2'$

Lemma: $A \equiv A' \wedge K_1 \wedge K_2$, ($K_1, K_2$ wie oben)
dann $A \models\!\mid A \wedge (K_1' \vee K_2')$

Ziel: Erzeuge durch "resolvieren" die leere Klausel

$$\bigvee \emptyset \models\!\mid \bot \,/\, \text{false} \,/\, 0$$

(⊥ ist das neutrale Element der Disjunktion)

$\rightsquigarrow A \models\!\mid A \wedge \ldots \wedge \bot \models\!\mid \bot$
$\Rightarrow A$ unerfüllbar

Hinweise:

- Auch hier ist die geschickte Auswahl der Resolutionsschritte wichtig, um einen kurzen Rechenweg zu erhalten.
- Resolution ist nur praktikabel, um Unerfüllbarkeit zu zeigen.

Bsp Res 1

$(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg r) \wedge (p)$ — $\neg A$ in KNF von vorhin

In Mengenschreibweise:

$\{\neg p, \underline{q}\}$ $\{\neg q, \underline{r}\}$ $\{\underline{\neg r}\}$ $\{\underline{p}\}$

1

$\{\underline{\neg q}\}$

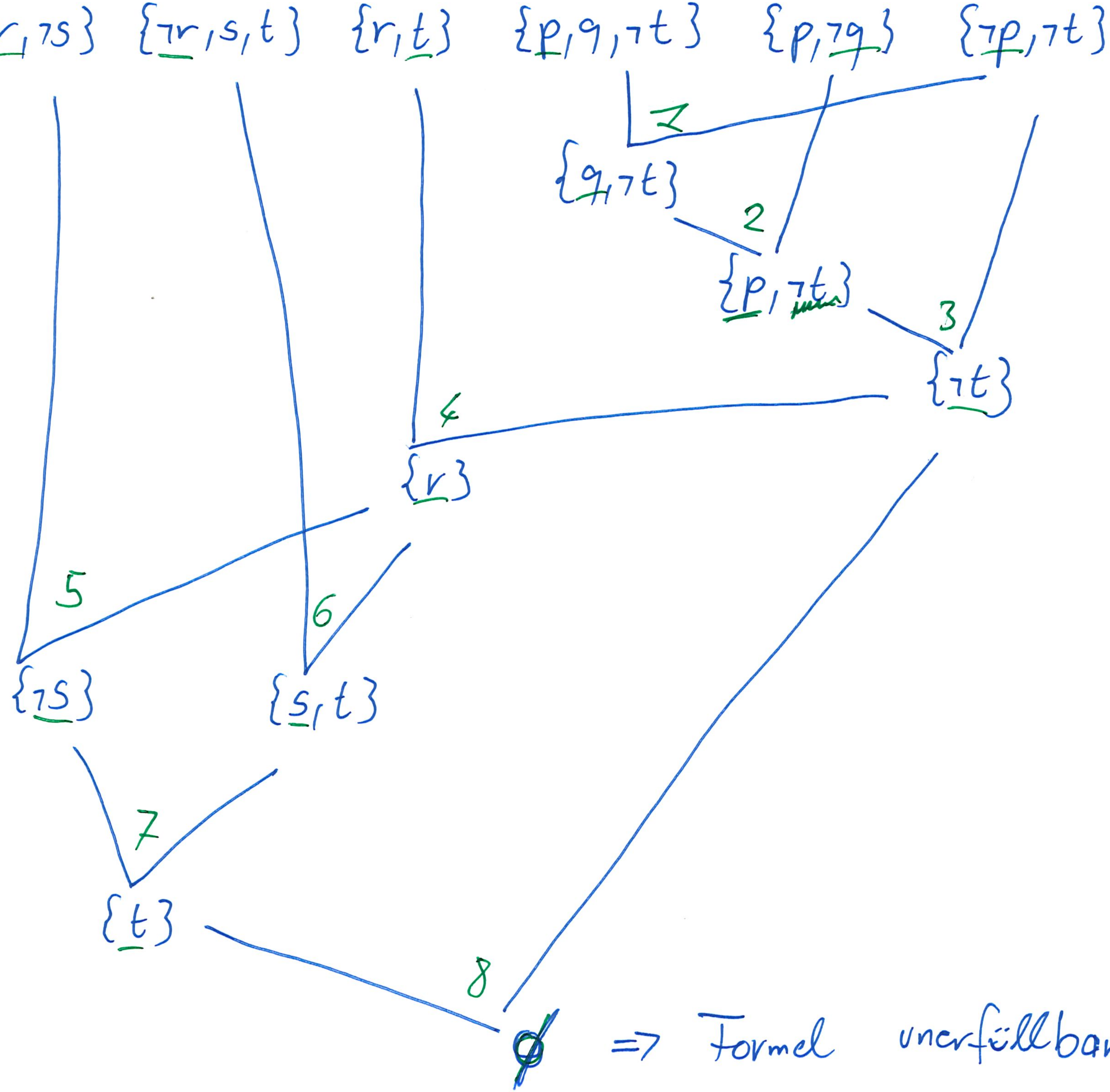
2

$\{\underline{\neg p}\}$

3

$\emptyset \Rightarrow \neg A$ unerfüllbar.

Bsp Res 2



$\Rightarrow$ Formel unerfüllbar

Tableaux

Konstruiere Binärbaum, dessen Knoten aus Formelmengen bestehen

α-Regeln: Reichere den aktuellen Knoten mit Formeln an

$$\frac{\neg\neg A}{A} \qquad \frac{A \land B}{\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}} \qquad \frac{\neg(A \lor B)}{\begin{matrix} \neg A \\ \neg B \end{matrix}} \qquad \frac{\neg(A \to B)}{\begin{matrix} A \\ \neg B \end{matrix}}$$

Wenn keine α-Regeln mehr andwendbar sind:

β-Regeln: Erzeuge neue Kindknoten

$$\frac{A \lor B}{A \mid B} \qquad \frac{\neg(A \land B)}{\neg A \mid \neg B} \qquad \frac{A \to B}{\neg A \mid B}$$

- Alle Äste widersprüchlich "geschlossen": Formel unerfüllbar
- Mind 1 Ast vollständig (alle Regeln angewandt) & nicht widersprüchlich "offen":

  Formel erfüllbar, Literale im Ast liefern erfüllende Belegung.

Bsp T1:

$\neg(((p \to q) \land (q \to r)) \to \neg(\neg r \land p))$ 0 // $\neg A$ von vorhin

$(p \to q) \land (q \to r)$ 1

$\neg\neg(\neg r \land p)$ 2

α-Regel $\dfrac{\neg(A \to B)}{\begin{array}{c} A \\ \neg B \end{array}}$

$p \to q$ 3

$q \to r$ 4

$\neg r \land p$ 5

$\neg r$ 6

p 7

β-Regel auf 3

$\boxed{\neg p}$ 8 ⚡ zu 7 | $\boxed{q}$ 9

β-Regel auf 4.

$\boxed{\neg q}$ ⚡ zu 9. | $\boxed{r}$ ⚡ zu 6.

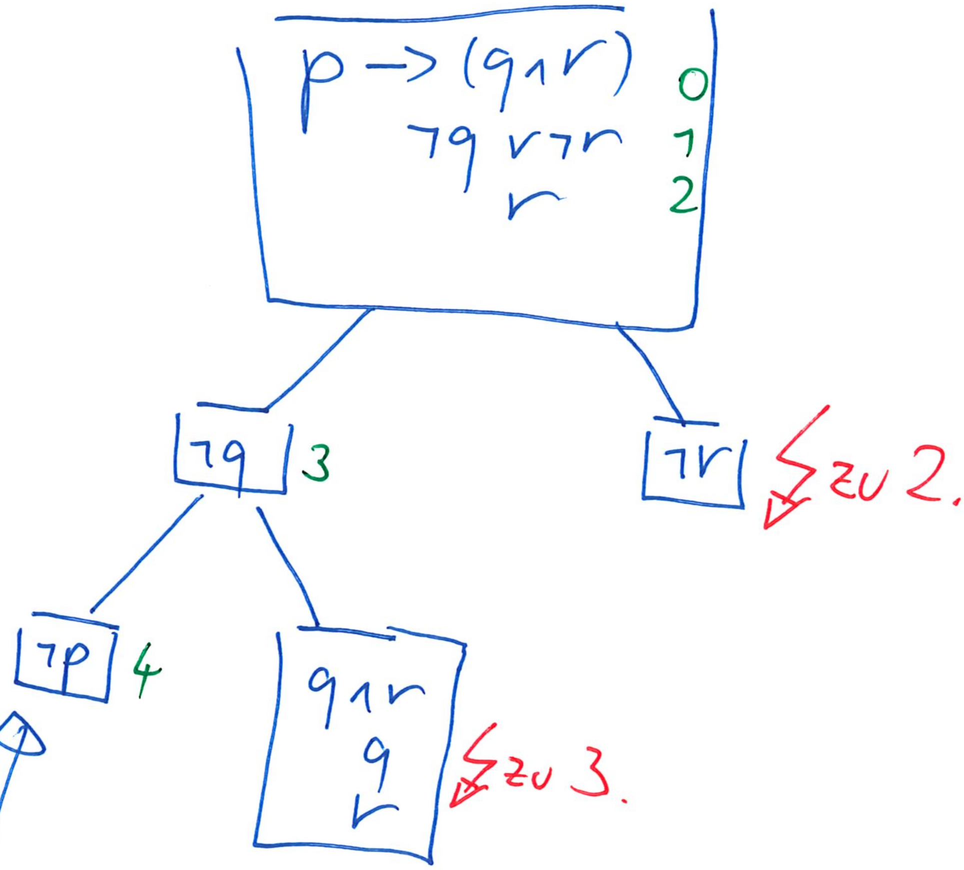
$\Rightarrow$ $\neg A$ unerfüllbar.

Bsp T2

Überprüfe, ob Formelmenge

$$\{p \to (q \land r),\ \neg q \lor \neg r,\ r\}$$

erfüllbar.



Dieser Ast ist vollständig & offen (nicht widersprüchlich)

⇒ Formelmenge erfüllbar, z.B. mit

$r \mapsto 1$ (2)

$q \mapsto 0$ (3)

$p \mapsto 0$ (4)

Bsp T3: // Aus Zeitgründen nicht in Großübung gemacht

$(p \to (q \land r)) \land ((r \to \neg q) \land p)$ 0

$p \to (q \land r)$ 1

$(r \to \neg q) \land p$ 2

$r \to \neg q$ 3

p 4

β auf 1

$\neg p$ ↯ 4

$q \land r$ 5

q 6

r 7

β auf 3

$\neg r$ ↯ 7

$\neg q$ ↯ 6

$\Rightarrow$ Formel unerfüllbar.

Bsp T4

$\neg((p\lor((q\land r)\land(p\lor\neg p)))\to((p\lor q)\land(p\lor r)))$ 0

$p\lor((q\land r)\land(p\lor\neg p))$ 1

$\neg((p\lor q)\land(p\lor r))$ 2

β auf 1

p 3

β auf 2

$\neg(p\lor q)$

$\neg p$ ↯3

$\neg q$

$\neg(p\lor r)$

$\neg p$ ↯3

$\neg r$

$(q\land r)\land(p\lor\neg p)$ 4

$q\land r$ 5

q 7

r 8

$p\lor\neg p$ 6

β auf 2

$\neg(p\lor q)$

$\neg p$

$\neg q$ ↯7

$\neg(p\lor r)$

$\neg p$

$\neg r$ ↯8

$\Rightarrow$ Formel unerfüllbar.