6. Großübung (15.7.19)

Skoleminisierung

- Pränex-Normalform (PNF):
  Alle Quantoren vorne: $Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n : A$
  mit $Q_i \in \{\exists, \forall\}$ und A quantorfrei
- bereinigte PNF:
  Alle Variablen x_i unterschiedlich
- Skolem(normal)form:
  Nur „$\forall$"-Quantoren

Bsp:

$$A \equiv \neg\Big((\forall y : q(y)) \vee \big(\neg \forall x : \big((q(x) \vee r(x)) \wedge \exists z : (\neg p(z) \vee \neg r(x)) \big)\big)\Big)$$

mit $q/1, p/1, r/1$ einstellige Prädikate

Schritt 1: Bereinigen.
Hier: Formel ist schon bereinigt

Schritt 2: Pränexnormalform

A De Morgan

$$\models\!\!\!\!\!\dashv \; \neg \forall y : q(y) \;\wedge\; \neg\neg \forall x : \big((q(x) \vee r(x)) \wedge \exists z : (\neg p(z) \vee \neg r(x)) \big)$$

$\neg \forall y : B \models\!\!\!\dashv \exists y : \neg B$, analog mit „$\forall$" und „$\exists$" getauscht

$$\models\!\!\!\!\!\dashv \; \exists y : \neg q(y) \;\wedge\; \forall x \dots$$

Nun stehen keine Negationen mehr vor den Quantoren, wir können also die Regel

$$(\forall x : A) \wedge B \models\!\!\!\!\!\dashv \forall x : (A \wedge B) \quad \text{wenn } x \text{ nicht frei in } B$$

(und die analogen Regeln für „$\vee$" und „$\exists$") anwenden, um PNF herzustellen

Wdh: $(\exists y : \neg q(y)) \wedge (\forall x : ((q(x) \vee r(x)) \wedge \exists z : (\neg p(z) \vee \neg r(x))))$

$\models\mid \exists y : (\neg q(y) \wedge \forall x : ((q(x) \vee r(x)) \wedge \exists z : (\neg p(z) \vee \neg r(x))))$

$\models\mid \exists y : (\neg q(y) \wedge \forall x \exists z : ((q(x) \vee r(x)) \wedge (\neg p(z) \vee \neg r(x)))$

$\models\mid \exists y \forall x \exists z : \neg q(y) \wedge (q(x) \vee r(x)) \wedge (\neg p(z) \vee \neg r(x))$

ist in bPNF

Schritt 3: Skolemisierung

Ersetze existentiell quantifizierte Variablen durch neue Funktionssymbole.

Ein Parameter pro vorangehende universell quantifizierte Variable.

Bsp:

$\forall w \forall x \exists y \forall z : q(x) \longrightarrow \forall w \forall x \forall z : q(a(w,x))$

werden zu Parametern

mit $a/2$ neues Funktionssymbol

Intuition: „$\forall x \exists y$" $\hat{=}$ zu jedem x kann ein passendes y gewählt werden

$\hat{=}$ Funktion $f(x)$, die jedem x das passende y zu ordnet.

Neue Formel ist zwar nicht logisch äquivalent (u.a. weil sich Signatur ändert), aber <u>erfüllbarkeitsäquivalent</u>

Im Bsp.:

$$\exists y \forall x \exists z: \neg q(y) \wedge (q(x) \vee r(x)) \wedge (\neg p(z) \vee \neg r(x))$$

$$\forall x: \neg q(a) \wedge (q(x) \vee r(x)) \wedge (\neg p(b(x)) \vee \neg r(x))$$

mit $a/0$, $b/1$ neue Funktionssymbole

In Schritt 2 kann man die Quantoren in unterschiedlicher Reihenfolge nach vorne ziehen

Bsp: $(\forall x \exists y: \dots) \wedge (\forall z: \dots)$

Möglichkeit 1: $\forall x \exists y \forall z: \dots \wedge \dots$

" 2 $\forall x \forall z \exists y: \dots \wedge \dots$

3 $\forall z \forall x \exists y: \dots \wedge \dots$

Nicht erlaubt ist z.B.

$$\exists y \forall x \forall z: \dots \wedge \dots$$

x & y haben die Reihenfolge getauscht ↯

Je nach Reihenfolge erhält man unterschiedliche Skolemisierungen.

Sie sind allerdings alle erfüllbarkeits-äquivalent.

Weiteres Bsp.:

$$\exists x : ((\exists x \forall y : q(x,y)) \rightarrow (\forall y : p(x,y)))$$

mit $q/2$, $p/2$ Prädikate

Umbenennung der Variablen

$$\mathrel{|{=}|} \exists x : ((\exists x' \forall y' : q(x',y')) \rightarrow (\forall y : p(x,y)))$$

bereinigt

$$\mathrel{|{=}|} \exists x : \neg(\exists x' \forall y' : q(x',y')) \vee (\forall y : p(x,y))$$

$$\mathrel{|{=}|} \exists x : (\forall x' \exists y' : \neg q(x',y')) \vee (\forall y : p(x,y))$$

$$\mathrel{|{=}|} \exists x \forall y \forall x' \exists y' : \neg q(x',y') \vee p(x,y)$$

bPNF

$$\rightsquigarrow$$

$$\forall y \forall x' : \neg q(x', b(y,x')) \vee p(a,y)$$

Skolemform

mit $a/0$, $b/2$ neue Funktionssymbole

Kompaktheitssatz der Prädikatenlogik

Sei Σ eine Formelmenge.

a) Σ erfüllbar gdw. alle endlichen Teilmengen $\Sigma_{fin} \subseteq \Sigma$ erfüllbar

b) Σ unerfüllbar gdw. es existiert $\Sigma_{fin} \subseteq \Sigma$ unerfüllbare endliche Teilmenge

c) Sei A Formel.

$\Sigma \models A$ gdw. es existiert endliche Teilmenge $\Sigma_{fin} \subseteq \Sigma$ mit $\Sigma_{fin} \models A$

Alle 3 Formulierungen sind äquivalent.

Beweis verwendet

- Skolemisierung
- Satz von Herbrand
- Kompaktheitssatz der Aussagenlogik

Der K.S. der Prädikatenlogik hat viele interessante Konsequenzen.

Wir zeigen mit dem K.S.:

Es gibt keine Formel, die Endlichkeit charakterisiert:

Sei S eine beliebige Signatur.

Es gibt keine Formel E so dass für jede S-Struktur $M = (D_M, I_M)$ gilt:

$M \models E$ (also $M[\![E]\!] = 1$) gdw. D_M endlich.

Beweis:

Wir konstruieren zunächst für jede natürliche Zahl n eine Formel B_n mit

$M \models B_n$ gdw. $|D_M| \geq n$ (M hat mind. n verschiedene Daten)

$B_0 \equiv \top$

$B_1 \equiv \exists x: x = x$

$B_2 \equiv \exists x \exists y: \underbrace{x \neq y}_{\text{Kurzschreibweise für } \neg(x=y)}$

$B_3 \equiv \exists x \exists y \exists z: x \neq y \land x \neq z \land y \neq z$

$\vdots$

$B_n \equiv \exists x_1 \ldots \exists x_n: \bigwedge_{\substack{i,j \in \{1,\ldots,n\} \\ i \neq j}} x_i \neq x_j$ für $n > 1$

Nun der eigentliche Beweis.

Angenommen es gäbe Formel E.

Betrachte die Formelmenge

$$\Sigma = \{ E \wedge B_n \mid n \in \mathbb{N} \}$$

Zeige: Σ erfüllbar.

Verwende Kompaktheitssatz.

Betrachte $\Sigma_{fin} \subseteq \Sigma$ beliebige endliche Teilmenge.

Σ_{fin} lässt sich schreiben als

$$\Sigma_{fin} = \{ E \wedge B_{n_1}, \ldots, E \wedge B_{n_k} \}$$

für geignet gewählte Zahlen $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$.

Intuitiv sagt $E \wedge B_{n_i}$: Datenbereich ist endlich, aber mindestens n_i groß.

Setze $n := \max\limits_{i=1,\ldots,k} n_i$ // Maximum über endlich viele Zahlen existiert

Betrachte $M_n = (D_n, I_n)$ mit $D_n = \{1, \ldots, n\}$.

Behauptung: $M_n \models \Sigma_{fin}$, M_n erfüllt Σ_{fin}

Denn: Für alle i: $M_n \models E \wedge B_{n_i}$, da

$M_n \models E$ (D_n ist endlich)

und $M_n \models B_{n_i}$ ($|D_n| = n \geq n_i$ nach Wahl von n)

Also: Jede endliche Teilmenge von Σ erfüllbar

$\overset{K.S.}{\Longrightarrow}$ Σ erfüllbar.

Sei M Struktur mit $M \models \Sigma$

$\Rightarrow$ $M \models E \wedge B_0$ // Dies ist eine Formel aus Σ

$\Rightarrow$ $M \models E$

$\Rightarrow$ Datenbereich von M endlich, also $|D_M| = m$ für $m \in \mathbb{N}$ geeignet.

Es gilt aber

$M \models E \wedge B_{m+1}$ // $m+1 \in \mathbb{N}$, also Formel aus Σ

$\Rightarrow$ $M \models B_{m+1}$

$\Rightarrow$ $|D_M| \geq m+1$ $\lightning$ $|D_M| = m < m+1$

Widerspruch: E existiert nicht $\square$

Analog: Es gibt keine Formel U, die Unendlichkeit (des Datenbereichs) charakterisiert.

Denn $E := \neg U$ würde dann Endlichkeit charakterisieren.

Beachte:

Es gibt Formeln, die Erzwingen, dass das Modell unendlich groß ist, z.B.

$$
\begin{aligned}
U = \;& \forall x \exists y: x \leq y \wedge x \neq y && // ① \\
& \wedge \forall x \forall y: (x \leq y \wedge y \leq x) \rightarrow x = y && // ② \\
& \wedge \forall x \forall y \forall z: (x \leq y \wedge y \leq z) \rightarrow x \leq z && // ③
\end{aligned}
$$

über der Signatur $(\{\leq/_2\}, \emptyset)$

Wegen ① gibt es zu jedem Element ein echt größeres, wegen Antisymmetrie ② und Transitivität ③ erhalten wir also eine unendlich lange echt aufsteigende Kette

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots$$

Aber: Es gibt Strukturen, die U nicht wahr machen, obwohl ihr Datenbereich unendlich ist, z.B.

$$M = (\mathbb{N}, I_M)$$

mit $\leq^M$ definiert, so dass $d \leq^M e$ immer wahr.

(Erfüllt ①, aber verletzt ② & ③)

Also: Prädikatenlogik erster Stufe ist zu schwach, um Endlichkeit auszudrücken.

Es gibt weitere Phänomene dieser Art:

- Existenz von Nichtstandardmodellen (NSM)

  Zu jeder Struktur M mit unendlichem Datenbereich gibt es ein NSM M', eine Struktur, die sich auf den abgeschlossenen Formeln gleich, aber auf den offenen Formeln anders verhält.

  => Prädikatenlogik erster Stufe ist zu schwach, um unendliche Strukturen eindeutig zu beschreiben.

  (Details: Siehe Folien und „Zusätzliche Notizen zu Nichtstandardmodellen" auf Website)

- Skolems Paradoxon

  Jede erfüllbare Formelmenge hat ein abzählbares Modell (Satz von Löwenheim-Skolem)

  => Prädikatenlogik erster Stufe ist zu schwach, um Überabzählbarkeit zu erzwingen

Aber: Mathematik, axiomatisiert in Prädikatenlogik erster Stufe (z.B. ZFC) kann die Existenz der überabzählbaren Menge $\mathbb{R}$ beweisen !?

(Details: Siehe Literatur)

In der Prädikatenlogik zweiter Stufe verschwinden diese Phänomene.
Dort gilt z.B. der Kompaktheitssatz nicht.