

Einführung in die Logik

Jürgen Koslowski
unter Mitwirkung von Thorsten Palm
basierend auf Materialien von Roland Meyer

Theoretical Computer Science
Technische Universität Braunschweig

SS 2019

https://www.tcs.cs.tu-bs.de/teaching/Logik_SS_2019.html

Kapitel 0

Überblick

Teil 1: Aussagenlogik

Ziel ist die Formalisierung des korrekten Schließens, d.h., aus einer Menge Γ als richtig angenommener **Prämissen** auf korrekte Weise **Schlüsse** A zu ziehen, so dass diese automatisch richtig sind, wenn das für die Prämissen gilt; Schreibweise $\Gamma \models A$.

Teil 1: Aussagenlogik

Ziel ist die Formalisierung des korrekten Schließens, d.h., aus einer Menge Γ als richtig angenommener **Prämissen** auf korrekte Weise **Schlüsse** A zu ziehen, so dass diese automatisch richtig sind, wenn das für die Prämissen gilt; Schreibweise $\Gamma \models A$.

Diese Schlußregeln sollen unabhängig vom jeweiligen konkreten Inhalt der zugrundeliegenden Aussagen gültig sein.

Teil 1: Aussagenlogik

Ziel ist die Formalisierung des korrekten Schließens, d.h., aus einer Menge Γ als richtig angenommener **Prämissen** auf korrekte Weise **Schlüsse** A zu ziehen, so dass diese automatisch richtig sind, wenn das für die Prämissen gilt; Schreibweise $\Gamma \models A$.

Diese Schlußregeln sollen unabhängig vom jeweiligen konkreten Inhalt der zugrundeliegenden Aussagen gültig sein.

Wir verwenden Methoden/Ergebnisse aus drei Bereichen der Mathematik. Hinsichtlich der **Syntax**, d.h., dem korrekten Aufbau von Formeln:

Teil 1: Aussagenlogik

Ziel ist die Formalisierung des korrekten Schließens, d.h., aus einer Menge Γ als richtig angenommener **Prämissen** auf korrekte Weise **Schlüsse** A zu ziehen, so dass diese automatisch richtig sind, wenn das für die Prämissen gilt; Schreibweise $\Gamma \models A$.

Diese Schlußregeln sollen unabhängig vom jeweiligen konkreten Inhalt der zugrundeliegenden Aussagen gültig sein.

Wir verwenden Methoden/Ergebnisse aus drei Bereichen der Mathematik. Hinsichtlich der **Syntax**, d.h., dem korrekten Aufbau von Formeln:

- **formale Sprachen**, um von unserer natürlichen Sprache zu abstrahieren;

Teil 1: Aussagenlogik

Ziel ist die Formalisierung des korrekten Schließens, d.h., aus einer Menge Γ als richtig angenommener **Prämissen** auf korrekte Weise **Schlüsse** A zu ziehen, so dass diese automatisch richtig sind, wenn das für die Prämissen gilt; Schreibweise $\Gamma \models A$.

Diese Schlußregeln sollen unabhängig vom jeweiligen konkreten Inhalt der zugrundeliegenden Aussagen gültig sein.

Wir verwenden Methoden/Ergebnisse aus drei Bereichen der Mathematik. Hinsichtlich der **Syntax**, d.h., dem korrekten Aufbau von Formeln:

- **formale Sprachen**, um von unserer natürlichen Sprache zu abstrahieren;
- **Funktionale Algebra**, speziell das Rekursionstheorem;

Teil 1: Aussagenlogik

Ziel ist die Formalisierung des korrekten Schließens, d.h., aus einer Menge Γ als richtig angenommener **Prämissen** auf korrekte Weise **Schlüsse** A zu ziehen, so dass diese automatisch richtig sind, wenn das für die Prämissen gilt; Schreibweise $\Gamma \models A$.

Diese Schlußregeln sollen unabhängig vom jeweiligen konkreten Inhalt der zugrundeliegenden Aussagen gültig sein.

Wir verwenden Methoden/Ergebnisse aus drei Bereichen der Mathematik. Hinsichtlich der **Syntax**, d.h., dem korrekten Aufbau von Formeln:

- **formale Sprachen**, um von unserer natürlichen Sprache zu abstrahieren;
- **Funktionale Algebra**, speziell das Rekursionstheorem;

Hinsichtlich der **Semantik**, d.h., der Interpretation der Formeln:

Teil 1: Aussagenlogik

Ziel ist die Formalisierung des korrekten Schließens, d.h., aus einer Menge Γ als richtig angenommener **Prämissen** auf korrekte Weise **Schlüsse** A zu ziehen, so dass diese automatisch richtig sind, wenn das für die Prämissen gilt; Schreibweise $\Gamma \models A$.

Diese Schlußregeln sollen unabhängig vom jeweiligen konkreten Inhalt der zugrundeliegenden Aussagen gültig sein.

Wir verwenden Methoden/Ergebnisse aus drei Bereichen der Mathematik. Hinsichtlich der **Syntax**, d.h., dem korrekten Aufbau von Formeln:

- **formale Sprachen**, um von unserer natürlichen Sprache zu abstrahieren;
- **Funktionale Algebra**, speziell das Rekursionstheorem;

Hinsichtlich der **Semantik**, d.h., der Interpretation der Formeln:

- **Ordnungstheorie**, da die Menge $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ der Wahrheitswerte auf natürliche Weise geordnet ist, was sich auf die Menge der aussagenlogischen Formeln überträgt.

Teil 2: Prädikatenlogik

Hier soll dann die genauere Analyse spezifischer mathematischer Strukturen ermöglicht werden, die mittels einer Signatur Σ aus formalen Funktions- und Relationssymbolen beschrieben werden können.

Teil 2: Prädikatenlogik

Hier soll dann die genauere Analyse spezifischer mathematischer Strukturen ermöglicht werden, die mittels einer Signatur Σ aus formalen Funktions- und Relationssymbolen beschrieben werden können.

Syntaktisch ersetzt man die atomaren Formeln der Aussagenlogik durch Aussagen darüber, ob für eine gegebene Variablenmenge die Terme in den Σ -Funktionssymbolen formal in den Σ -Relationen zueinander stehen.

Teil 2: Prädikatenlogik

Hier soll dann die genauere Analyse spezifischer mathematischer Strukturen ermöglicht werden, die mittels einer Signatur Σ aus formalen Funktions- und Relationssymbolen beschrieben werden können.

Syntaktisch ersetzt man die atomaren Formeln der Aussagenlogik durch Aussagen darüber, ob für eine gegebene Variablenmenge die Terme in den Σ -Funktionssymbolen formal in den Σ -Relationen zueinander stehen.

Erst dann kommen die aussagenlogischen Junktoren zum Einsatz, ergänzt durch weitere einstellige Junktoren, die aus den Variablen mit Hilfe sog. **Quantoren** \forall (für alle) und \exists (es gibt) gebildet werden, und diese Variablen binden (Stichwort: Quantifizierung).

Teil 2: Prädikatenlogik

Hier soll dann die genauere Analyse spezifischer mathematischer Strukturen ermöglicht werden, die mittels einer Signatur Σ aus formalen Funktions- und Relationssymbolen beschrieben werden können.

Syntaktisch ersetzt man die atomaren Formeln der Aussagenlogik durch Aussagen darüber, ob für eine gegebenen Variablenmenge die Terme in den Σ -Funktionssymbolen formal in den Σ -Relationen zueinander stehen.

Erst dann kommen die aussagenlogischen Junktoren zum Einsatz, ergänzt durch weitere einstellige Junktoren, die aus den Variablen mit Hilfe sog. **Quantoren** \forall (für alle) und \exists (es gibt) gebildet werden, und diese Variablen binden (Stichwort: Quantifizierung).

Die Semantik spielt sich dann in Σ -Strukturen ab, d.h., Mengen mit einer Instanziierung der Funktions- und Relationssymbole aus Σ .

Teil 1

Aussagenlogik

Kapitel 1

Syntax

Das Alphabet der Logik

Das Alphabet der Aussagenlogik verwendet drei Sorten von Symbolen:

Das Alphabet der Logik

Das Alphabet der Aussagenlogik verwendet drei Sorten von Symbolen:

- Ein hinreichend großer (oft abzählbar unendlicher) Vorrat \mathcal{A} von **Aussagen-Variablen** oder **atomaren Formeln**, um in jedem konkreten Fall von den eigentlichen Aussagen abstrahieren zu können;

Das Alphabet der Logik

Das Alphabet der Aussagenlogik verwendet drei Sorten von Symbolen:

- Ein hinreichend großer (oft abzählbar unendlicher) Vorrat \mathcal{A} von **Aussagen-Variablen** oder **atomaren Formeln**, um in jedem konkreten Fall von den eigentlichen Aussagen abstrahieren zu können;
- Abstraktionen der Bindewörter „und“, „oder“, „nicht“ etc. der natürlichen Sprache mittels einer endlichen Menge \mathcal{J} sog. **Junktoren** mit Namen gemäß ihrer intendierten Semantik (s.u):

\wedge	für ‚und‘, ‚Konjunktion‘	\top	für ‚wahr‘
\vee	für ‚oder‘, ‚Disjunktion‘	\perp	für ‚falsch‘
\rightarrow	für ‚[wenn...], dann‘	\leftrightarrow	für ‚genau dann wenn‘
\neg	für ‚nicht‘	...	

Das Alphabet der Logik

Das Alphabet der Aussagenlogik verwendet drei Sorten von Symbolen:

- Ein hinreichend großer (oft abzählbar unendlicher) Vorrat \mathcal{A} von **Aussagen-Variablen** oder **atomaren Formeln**, um in jedem konkreten Fall von den eigentlichen Aussagen abstrahieren zu können;
- Abstraktionen der Bindewörter „und“, „oder“, „nicht“ etc. der natürlichen Sprache mittels einer endlichen Menge \mathcal{J} sog. **Junktoren** mit Namen gemäß ihrer intendierten Semantik (s.u):

\wedge	für ‚und‘, ‚Konjunktion‘	\top	für ‚wahr‘
\vee	für ‚oder‘, ‚Disjunktion‘	\perp	für ‚falsch‘
\rightarrow	für ‚[wenn...], dann‘	\leftrightarrow	für ‚genau dann wenn‘
\neg	für ‚nicht‘	...	

- Klammern $($ und $)$ zum Auflösen eventueller Mehrdeutigkeiten.

Deren (disjunkte!) Vereinigung $\mathcal{J}[\mathcal{A}]$ bildet das **Alphabet** der Logik.

Die formale Sprache der Logik

Definition

Die formale **Sprache der Aussagenlogik** ist die kleinste Menge $\mathcal{F}[\mathcal{A}]$ von Wörtern über dem Alphabet $\mathcal{J}[\mathcal{A}]$ mit folgenden **Abschlußeigenschaften**:

Die formale Sprache der Logik

Definition

Die formale **Sprache der Aussagenlogik** ist die kleinste Menge $\mathcal{F}[\mathcal{A}]$ von Wörtern über dem Alphabet $\mathcal{J}[\mathcal{A}]$ mit folgenden **Abschlußeigenschaften**:

- $\mathcal{A} \cup \{\perp, \top\} \subseteq \mathcal{F}[\mathcal{A}]$;

Die formale Sprache der Logik

Definition

Die formale **Sprache der Aussagenlogik** ist die kleinste Menge $\mathcal{F}[\mathcal{A}]$ von Wörtern über dem Alphabet $\mathcal{J}[\mathcal{A}]$ mit folgenden **Abschlußeigenschaften**:

- $\mathcal{A} \cup \{\perp, \top\} \subseteq \mathcal{F}[\mathcal{A}]$;
- wenn $A \in \mathcal{F}[\mathcal{A}]$, dann $\neg A \in \mathcal{F}[\mathcal{A}]$;

Die formale Sprache der Logik

Definition

Die formale **Sprache der Aussagenlogik** ist die kleinste Menge $\mathcal{F}[\mathcal{A}]$ von Wörtern über dem Alphabet $\mathcal{J}[\mathcal{A}]$ mit folgenden **Abschlußeigenschaften**:

- $\mathcal{A} \cup \{\perp, \top\} \subseteq \mathcal{F}[\mathcal{A}]$;
- wenn $A \in \mathcal{F}[\mathcal{A}]$, dann $\neg A \in \mathcal{F}[\mathcal{A}]$;
- wenn $A, B \in \mathcal{F}[\mathcal{A}]$, dann $(A \star B) \in \mathcal{F}[\mathcal{A}]$ mit $\star \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.

Die formale Sprache der Logik

Definition

Die formale **Sprache der Aussagenlogik** ist die kleinste Menge $\mathcal{F}[\mathcal{A}]$ von Wörtern über dem Alphabet $\mathcal{J}[\mathcal{A}]$ mit folgenden **Abschlußeigenschaften**:

- $\mathcal{A} \cup \{\perp, \top\} \subseteq \mathcal{F}[\mathcal{A}]$;
- wenn $A \in \mathcal{F}[\mathcal{A}]$, dann $\neg A \in \mathcal{F}[\mathcal{A}]$;
- wenn $A, B \in \mathcal{F}[\mathcal{A}]$, dann $(A \star B) \in \mathcal{F}[\mathcal{A}]$ mit $\star \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.

Die Elemente von $\mathcal{F}[\mathcal{A}]$ heißen **Formeln**; diejenigen ohne Junktor kann man auch **molekular** nennen (im Unterschied zu den atomaren Formeln in \mathcal{A}).

Die formale Sprache der Logik

Definition

Die formale **Sprache der Aussagenlogik** ist die kleinste Menge $\mathcal{F}[\mathcal{A}]$ von Wörtern über dem Alphabet $\mathcal{J}[\mathcal{A}]$ mit folgenden **Abschlußeigenschaften**:

- $\mathcal{A} \cup \{\perp, \top\} \subseteq \mathcal{F}[\mathcal{A}]$;
- wenn $A \in \mathcal{F}[\mathcal{A}]$, dann $\neg A \in \mathcal{F}[\mathcal{A}]$;
- wenn $A, B \in \mathcal{F}[\mathcal{A}]$, dann $\langle\langle A \star B \rangle\rangle \in \mathcal{F}[\mathcal{A}]$ mit $\star \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.

Die Elemente von $\mathcal{F}[\mathcal{A}]$ heißen **Formeln**; diejenigen ohne Junktor kann man auch **molekular** nennen (im Unterschied zu den atomaren Formeln in \mathcal{A}).

Dies wird in der Informatik gelegentlich auch mit Hilfe einer „Grammatik“ in **Backus-Naur-Form**, kurz **BNF** ausgedrückt:

$$F ::= p \mid \perp \mid \top \mid \neg F \mid \langle\langle F \star F \rangle\rangle \quad \text{für } p \in \mathcal{A} \text{ und } \star \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$$

Algebra 1

Die Menge $\mathcal{J}[\mathcal{A}]^*$ aller Wörter über $\mathcal{J}[\mathcal{A}]$, d.h. die disjunkte Vereinigung

$$\mathcal{J}[\mathcal{A}]^* := \sum \{ \mathcal{J}[\mathcal{A}]^n : n \in \mathbb{N} \}$$

aller Mengen von Wörtern fester Länge, ist ein **Monoid** bzgl. Konkatenation (assoziativ) mit dem leeren Word ε als neutralem Element.

Algebra 1

Die Menge $\mathcal{J}[\mathcal{A}]^*$ aller Wörter über $\mathcal{J}[\mathcal{A}]$, d.h. die disjunkte Vereinigung

$$\mathcal{J}[\mathcal{A}]^* := \sum \{ \mathcal{J}[\mathcal{A}]^n : n \in \mathbb{N} \}$$

aller Mengen von Wörtern fester Länge, ist ein **Monoid** bzgl. Konkatenation (assoziativ) mit dem leeren Word ε als neutralem Element.

Um Eigenschaften von Formeln zu beweisen kann man versuchen, die Struktur des Monoids $\mathcal{J}[\mathcal{A}]^*$ auszunutzen, nämlich:

Algebra-Fakt

Jede Abbildung $\mathcal{J}[\mathcal{A}] \xrightarrow{\kappa} M$ läßt sich eindeutig zu einem Monoid-Homomorphismus $\mathcal{J}[\mathcal{A}]^* \xrightarrow{\bar{\kappa}} M$ fortsetzen.

Lemma

Jede Formel hat gleich viele öffnende wie schließende Klammern.

Lemma

Jede Formel hat gleich viele öffnende wie schließende Klammern.

1. Beweis

Die Menge \mathbb{Z} der ganzen Zahlen ist ein Monoid bzgl. der Addition $+$ mit neutralem Element 0 . Es handelt sich sogar um eine **Gruppe**, denn jedes Element n hat ein Inverses $-n$.

Lemma

Jede Formel hat gleich viele öffnende wie schließende Klammern.

1. Beweis

Die Menge \mathbb{Z} der ganzen Zahlen ist ein Monoid bzgl. der Addition $+$ mit neutralem Element 0 . Es handelt sich sogar um eine **Gruppe**, denn jedes Element n hat ein Inverses $-n$. Setze

$$\mathcal{J}[\mathcal{A}] \xrightarrow{\delta} \mathbb{Z} \quad , \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x = \langle \langle ; \\ -1 & \text{falls } x = \rangle \rangle, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Lemma

Jede Formel hat gleich viele öffnende wie schließende Klammern.

1. Beweis

Die Menge \mathbb{Z} der ganzen Zahlen ist ein Monoid bzgl. der Addition $+$ mit neutralem Element 0 . Es handelt sich sogar um eine **Gruppe**, denn jedes Element n hat ein Inverses $-n$. Setze

$$\mathcal{J}[\mathcal{A}] \xrightarrow{\delta} \mathbb{Z} \quad , \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x = \langle \langle \\ -1 & \text{falls } x = \rangle \rangle \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann mißt $\bar{\delta}$ die Differenz zwischen öffnenden und schließenden Klammern.

Lemma

Jede Formel hat gleich viele öffnende wie schließende Klammern.

1. Beweis

Die Menge \mathbb{Z} der ganzen Zahlen ist ein Monoid bzgl. der Addition $+$ mit neutralem Element 0 . Es handelt sich sogar um eine **Gruppe**, denn jedes Element n hat ein Inverses $-n$. Setze

$$\mathcal{J}[\mathcal{A}] \xrightarrow{\delta} \mathbb{Z}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x = \langle \langle ; \\ -1 & \text{falls } x = \rangle \rangle, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann mißt $\bar{\delta}$ die Differenz zwischen öffnenden und schließenden Klammern.

Indem man Formeln in nichtleere Wörter zerlegt **und ihren Aufbau beachtet** läßt sich zeigen, dass $\bar{\delta}$ alle Formeln auf 0 abbildet. □

Lemma

Jede Formel hat gleich viele öffnende wie schließende Klammern.

1. Beweis

Die Menge \mathbb{Z} der ganzen Zahlen ist ein Monoid bzgl. der Addition $+$ mit neutralem Element 0 . Es handelt sich sogar um eine **Gruppe**, denn jedes Element n hat ein Inverses $-n$. Setze

$$\mathcal{J}[\mathcal{A}] \xrightarrow{\delta} \mathbb{Z}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x = \langle; \\ -1 & \text{falls } x = \rangle, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann mißt δ die Differenz zwischen öffnenden und schließenden Klammern.

Indem man Formeln in nichtleere Wörter zerlegt **und ihren Aufbau beachtet** läßt sich zeigen, dass δ alle Formeln auf 0 abbildet. □

Aber δ bildet auch viele andere Wörter auf 0 ab, z.B. $\rangle \neg \langle \wedge ! ?$

Strukturelle Induktion

2. Beweis, nimmt den Aufbau der Formeln gleich ernst

Die Behauptung ist korrekt für die Elemente von $\mathcal{A} \cup \{\perp, \top\}$.

Strukturelle Induktion

2. Beweis, nimmt den Aufbau der Formeln gleich ernst

Die Behauptung ist korrekt für die Elemente von $\mathcal{A} \cup \{\perp, \top\}$.

Jede andere Formel $A \in \mathcal{F}[\mathcal{A}]$ ist länger und folglich durch eine der 5 Abschlußoperationen aus einfacheren Formeln entstanden. Es genügt also zu zeigen, dass diese Operationen jeweils dieselbe Anzahl von öffnenden wie schließenden Klammern zu denen hinzufügen, die bereits in den Argumenten enthalten sind. Aber das ist in allen 5 Fällen klar.

Strukturelle Induktion

2. Beweis, nimmt den Aufbau der Formeln gleich ernst

Die Behauptung ist korrekt für die Elemente von $\mathcal{A} \cup \{\perp, \top\}$.

Jede andere Formel $A \in \mathcal{F}[\mathcal{A}]$ ist länger und folglich durch eine der 5 Abschlußoperationen aus einfacheren Formeln entstanden. Es genügt also zu zeigen, dass diese Operationen jeweils dieselbe Anzahl von öffnenden wie schließenden Klammern zu denen hinzufügen, die bereits in den Argumenten enthalten sind. Aber das ist in allen 5 Fällen klar.

Achtung: Die Menge der Formeln trägt selber eine algebraische Struktur: einfache Formeln kombinieren sich eindeutig(!) zu komplizierteren. Daher wollen wir die Junktorenmenge \mathcal{J} von nun an als **Signatur** betrachten, also zusammen mit einer Abbildung $\mathcal{J} \xrightarrow{\text{ar}} \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, und zwar

$$\mathbf{ar}(\perp) = \mathbf{ar}(\top) = 0 \quad , \quad \mathbf{ar}(\neg) = 1 \quad ; \quad \mathbf{ar}(\star) = 2 \quad \text{für } \star \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$$

Signaturen, Terme und Strukturen (Algebra-Fakten)

In einer Signatur $\mathcal{S} \xrightarrow{\text{ar}} \mathbb{N}$ dient $f \in \mathcal{S}$ als **formales Funktionssymbol**.

¹subsumiert Algebra-Fakt von Folie 9

Signaturen, Terme und Strukturen (Algebra-Fakten)

In einer Signatur $\mathcal{S} \xrightarrow{\text{ar}} \mathbb{N}$ dient $f \in \mathcal{S}$ als **formales Funktionssymbol**.

- Über jeder Menge \mathcal{V} sog. **Variabler** können wir rekursiv die Menge **Term**(\mathcal{S}, \mathcal{V}) der syntaktischen **S-Terme** bilden, in BNF etwa:

$$t ::= v \mid f \langle t_0, \dots, t_{\text{ar}(f)-1} \rangle \quad \text{mit } v \in \mathcal{V} \quad \text{und } f \in \mathcal{J}$$

¹subsumiert Algebra-Fakt von Folie 9

Signaturen, Terme und Strukturen (Algebra-Fakten)

In einer Signatur $\mathcal{S} \xrightarrow{\text{ar}} \mathbb{N}$ dient $f \in \mathcal{S}$ als **formales Funktionssymbol**.

- Über jeder Menge \mathcal{V} sog. **Variabler** können wir rekursiv die Menge **Term**(\mathcal{S}, \mathcal{V}) der syntaktischen **S-Terme** bilden, in BNF etwa:

$$t ::= v \mid f \langle t_0, \dots, t_{\text{ar}(f)-1} \rangle \quad \text{mit } v \in \mathcal{V} \quad \text{und } f \in \mathcal{J}$$

- Über jeder nichtleeren Menge X kann man andererseits $f \in \mathcal{S}$ als konkrete Funktion $X^{\text{ar}(f)} \xrightarrow{f} X$ der entsprechenden **Stelligkeit interpretieren**. I.A. gibt es viele solche Interpretationen.

¹subsumiert Algebra-Fakt von Folie 9

Signaturen, Terme und Strukturen (Algebra-Fakten)

In einer Signatur $\mathcal{S} \xrightarrow{\text{ar}} \mathbb{N}$ dient $f \in \mathcal{S}$ als **formales Funktionssymbol**.

- Über jeder Menge \mathcal{V} sog. **Variabler** können wir rekursiv die Menge **Term**(\mathcal{S}, \mathcal{V}) der syntaktischen **S-Terme** bilden, in BNF etwa:

$$t ::= v \mid f \langle t_0, \dots, t_{\text{ar}(f)-1} \rangle \quad \text{mit } v \in \mathcal{V} \quad \text{und } f \in \mathcal{J}$$

- Über jeder nichtleeren Menge X kann man andererseits $f \in \mathcal{S}$ als konkrete Funktion $X^{\text{ar}(f)} \xrightarrow{f} X$ der entsprechenden **Stelligkeit interpretieren**. I.A. gibt es viele solche Interpretationen. Ein Paar aus **Trägermenge** und Interpretation $\langle X, I \rangle$ heißt **S-Algebra**.

¹subsumiert Algebra-Fakt von Folie 9

Signaturen, Terme und Strukturen (Algebra-Fakten)

In einer Signatur $\mathcal{S} \xrightarrow{\text{ar}} \mathbb{N}$ dient $f \in \mathcal{S}$ als **formales Funktionssymbol**.

- Über jeder Menge \mathcal{V} sog. **Variabler** können wir rekursiv die Menge **Term**(\mathcal{S}, \mathcal{V}) der syntaktischen **S-Terme** bilden, in BNF etwa:

$$t ::= v \mid f \langle t_0, \dots, t_{\text{ar}(f)-1} \rangle \quad \text{mit } v \in \mathcal{V} \quad \text{und } f \in \mathcal{J}$$

- Über jeder nichtleeren Menge X kann man andererseits $f \in \mathcal{S}$ als konkrete Funktion $X^{\text{ar}(f)} \xrightarrow{f} X$ der entsprechenden **Stelligkeit interpretieren**. I.A. gibt es viele solche Interpretationen. Ein Paar aus **Trägermenge** und Interpretation $\langle X, I \rangle$ heißt **S-Algebra**.
- Term**(\mathcal{S}, \mathcal{V}) wird selber **kanonisch** zu einer \mathcal{S} -Algebra vermöge

$$\bar{f}(t_0, \dots, t_{\text{ar}(f)-1}) := f \langle t_0, \dots, t_{\text{ar}(f)-1} \rangle$$

Signaturen, Terme und Strukturen (Algebra-Fakten)

In einer Signatur $\mathcal{S} \xrightarrow{\text{ar}} \mathbb{N}$ dient $f \in \mathcal{S}$ als **formales Funktionssymbol**.

- Über jeder Menge \mathcal{V} sog. **Variabler** können wir rekursiv die Menge **Term**(\mathcal{S}, \mathcal{V}) der syntaktischen **\mathcal{S} -Terme** bilden, in BNF etwa:

$$t ::= v \mid f \langle t_0, \dots, t_{\text{ar}(f)-1} \rangle \quad \text{mit } v \in \mathcal{V} \quad \text{und } f \in \mathcal{J}$$

- Über jeder nichtleeren Menge X kann man andererseits $f \in \mathcal{S}$ als konkrete Funktion $X^{\text{ar}(f)} \xrightarrow{I(f)} X$ der entsprechenden **Stelligkeit interpretieren**. I.A. gibt es viele solche Interpretationen. Ein Paar aus **Trägermenge** und Interpretation $\langle X, I \rangle$ heißt **\mathcal{S} -Algebra**.
- Term**(\mathcal{S}, \mathcal{V}) wird selber **kanonisch** zu einer \mathcal{S} -Algebra vermöge

$$\bar{f}(t_0, \dots, t_{\text{ar}(f)-1}) := f \langle t_0, \dots, t_{\text{ar}(f)-1} \rangle$$

- Rekursionssatz**¹: Jede Abbildung $\mathcal{V} \xrightarrow{\varphi} X$ läßt sich eindeutig zu einem \mathcal{S} -Homomorphismus **Term**(\mathcal{S}, \mathcal{V}) $\xrightarrow{\hat{\varphi}} \langle X, I \rangle$ fortsetzen mit

$$\hat{\varphi}(\bar{f}(t_0, \dots, t_{\text{ar}(f)-1})) = \bar{f}(\hat{\varphi}(t_0), \dots, \hat{\varphi}(t_{\text{ar}(f)-1}))$$

¹subsumiert Algebra-Fakt von Folie 9

Logik aus algebraischer Sicht

Beobachtung

$\mathcal{F}[\mathcal{A}]$ ist isomorph zu $\mathbf{Term}(\mathcal{J}, \mathcal{A})$; der Unterschied besteht in der Verwendung der Infix-Schreibweise für Formeln mit binären Junktoren \star , im Gegensatz zur Präfix-Schreibweise für Terme:

$$\langle\langle A \star B \rangle\rangle \quad \text{anstatt} \quad \star \langle\langle A, B \rangle\rangle$$

Logik aus algebraischer Sicht

Beobachtung

$\mathcal{F}[\mathcal{A}]$ ist isomorph zu $\mathbf{Term}(\mathcal{J}, \mathcal{A})$; der Unterschied besteht in der Verwendung der Infix-Schreibweise für Formeln mit binären Junktoren \star , im Gegensatz zur Präfix-Schreibweise für Terme:

$$\langle (A \star B) \rangle \quad \text{anstatt} \quad \star \langle (A, B) \rangle$$

Die kanonische \mathcal{J} -Algebrastruktur auf $\mathcal{F}[\mathcal{A}]$ ist gegeben durch

$$\begin{array}{ll}
 (\mathcal{F}[\mathcal{A}])^0 \xrightarrow{\perp} \mathcal{F}[\mathcal{A}]; & \bullet \mapsto \perp \\
 (\mathcal{F}[\mathcal{A}])^0 \xrightarrow{\top} \mathcal{F}[\mathcal{A}]; & \bullet \mapsto \top \\
 (\mathcal{F}[\mathcal{A}])^1 \xrightarrow{\neg} \mathcal{F}[\mathcal{A}]; & A \mapsto \neg A \\
 (\mathcal{F}[\mathcal{A}])^2 \xrightarrow{\star} \mathcal{F}[\mathcal{A}]; & \langle A, B \rangle \mapsto \langle (A \star B) \rangle
 \end{array}$$

Logik aus algebraischer Sicht

Beobachtung

$\mathcal{F}[\mathcal{A}]$ ist isomorph zu $\mathbf{Term}(\mathcal{J}, \mathcal{A})$; der Unterschied besteht in der Verwendung der Infix-Schreibweise für Formeln mit binären Junktoren \star , im Gegensatz zur Präfix-Schreibweise für Terme:

$$\langle (A \star B) \rangle \quad \text{anstatt} \quad \star \langle A, B \rangle$$

Die kanonische \mathcal{J} -Algebrastruktur auf $\mathcal{F}[\mathcal{A}]$ ist gegeben durch

$$\begin{array}{ll} (\mathcal{F}[\mathcal{A}])^0 \xrightarrow{\perp} \mathcal{F}[\mathcal{A}]; & \bullet \mapsto \perp \\ (\mathcal{F}[\mathcal{A}])^0 \xrightarrow{\top} \mathcal{F}[\mathcal{A}]; & \bullet \mapsto \top \\ (\mathcal{F}[\mathcal{A}])^1 \xrightarrow{\bar{\neg}} \mathcal{F}[\mathcal{A}]; & A \mapsto \neg A \\ (\mathcal{F}[\mathcal{A}])^2 \xrightarrow{\bar{\star}} \mathcal{F}[\mathcal{A}]; & \langle A, B \rangle \mapsto \langle (A \star B) \rangle \end{array}$$

Wir verwenden ab jetzt $\textcircled{\bullet} \in \mathcal{J}$ statt $\bar{\bullet}$ für die kanonischen Operationen $(\mathcal{F}[\mathcal{A}])^{\text{ar}(\textcircled{\bullet})} \rightarrow \mathcal{F}[\mathcal{A}]$ und ersetzen \langle und \rangle durch $($ bzw. $)$.

\mathcal{J} -Algebra

Alle wesentlichen Konstruktionen auf der \mathcal{J} -Algebra $\mathcal{F}[\mathcal{A}]$ werden nun mit Hilfe des Rekursionssatzes vorgenommen.

\mathcal{J} -Algebra

Alle wesentlichen Konstruktionen auf der \mathcal{J} -Algebra $\mathcal{F}[\mathcal{A}]$ werden nun mit Hilfe des Rekursionssatzes vorgenommen.

Beispiel

Länge $|A|$ = Anzahl aller $\mathcal{J}[\mathcal{A}]$ -Symbole in A : Verwende

\mathcal{J} -Algebra

Alle wesentlichen Konstruktionen auf der \mathcal{J} -Algebra $\mathcal{F}[\mathcal{A}]$ werden nun mit Hilfe des Rekursionssatzes vorgenommen.

Beispiel

Länge $|A|$ = Anzahl aller $\mathcal{J}[\mathcal{A}]$ -Symbole in A : Verwende

- die konstante Abbildung $\mathcal{A} \xrightarrow{1} \mathbb{N}$;

\mathcal{J} -Algebra

Alle wesentlichen Konstruktionen auf der \mathcal{J} -Algebra $\mathcal{F}[A]$ werden nun mit Hilfe des Rekursionssatzes vorgenommen.

Beispiel

Länge $|A|$ = Anzahl aller $\mathcal{J}[A]$ -Symbole in A : Verwende

- die konstante Abbildung $\mathcal{A} \xrightarrow{1} \mathbb{N}$;
- die folgenden Interpretationen von \mathcal{J} in \mathbb{N} :

$$\mathbb{N}^0 \xrightarrow{I(\perp)} \mathbb{N};$$

$$\bullet \mapsto 1$$

$$\mathbb{N}^0 \xrightarrow{I(\top)} \mathbb{N};$$

$$\bullet \mapsto 1$$

$$\mathbb{N}^1 \xrightarrow{I(\neg)} \mathbb{N};$$

$$n \mapsto n + 1$$

$$\mathbb{N}^2 \xrightarrow{I(\star)} \mathbb{N};$$

$$\langle n, m \rangle \mapsto n + m + 3$$

\mathcal{J} -Algebra

Alle wesentlichen Konstruktionen auf der \mathcal{J} -Algebra $\mathcal{F}[A]$ werden nun mit Hilfe des Rekursionssatzes vorgenommen.

Beispiel

Länge $|A|$ = Anzahl aller $\mathcal{J}[A]$ -Symbole in A : Verwende

- die konstante Abbildung $\mathcal{A} \xrightarrow{1} \mathbb{N}$;
- die folgenden Interpretationen von \mathcal{J} in \mathbb{N} :

$$\begin{array}{ll} \mathbb{N}^0 \xrightarrow{I(\perp)} \mathbb{N}; & \bullet \mapsto 1 \\ \mathbb{N}^0 \xrightarrow{I(\top)} \mathbb{N}; & \bullet \mapsto 1 \\ \mathbb{N}^1 \xrightarrow{I(\neg)} \mathbb{N}; & n \mapsto n + 1 \\ \mathbb{N}^2 \xrightarrow{I(\star)} \mathbb{N}; & \langle n, m \rangle \mapsto n + m + 3 \end{array}$$

Nun ist $\mathcal{F}[A] \xrightarrow{\llbracket \cdot \rrbracket} \mathbb{N}$ die eindeutige Fortsetzung von $\mathcal{A} \xrightarrow{1} \mathbb{N}$ zu einem \mathcal{J} -Homomorphismus nach $\langle \mathbb{N}, I \rangle$.

Beispiel (nochmal Klammerdifferenz $\bar{\delta}(A)$, s.o.)

Beispiel (nochmal Klammerdifferenz $\bar{\delta}(A)$, s.o.)

Beispiel (nochmal Klammerdifferenz $\bar{\delta}(A)$, s.o.)

- $\mathcal{A} \xrightarrow{\delta} \mathbb{Z}$ ist konstant mit Wert 0;

Beispiel (nochmal Klammerdifferenz $\bar{\delta}(A)$, s.o.)

- $\mathcal{A} \xrightarrow{\delta} \mathbb{Z}$ ist konstant mit Wert 0;
- Interpretiere \mathcal{J} in \mathbb{Z} wie folgt:

$$\mathbb{Z}^0 \xrightarrow{I(\perp)} \mathbb{Z};$$

$$\bullet \mapsto 0$$

$$\mathbb{Z}^0 \xrightarrow{I(\top)} \mathbb{Z};$$

$$\bullet \mapsto 0$$

$$\mathbb{Z}^1 \xrightarrow{I(\neg)} \mathbb{Z};$$

$$n \mapsto n$$

$$\mathbb{Z}^2 \xrightarrow{I(\star)} \mathbb{Z};$$

$$\langle n, m \rangle \mapsto n + m$$

Beispiel (nochmal Klammerdifferenz $\bar{\delta}(A)$, s.o.)

- $\mathcal{A} \xrightarrow{\delta} \mathbb{Z}$ ist konstant mit Wert 0;
- Interpretiere \mathcal{J} in \mathbb{Z} wie folgt:

$$\mathbb{Z}^0 \xrightarrow{I(\perp)} \mathbb{Z};$$

$$\bullet \mapsto 0$$

$$\mathbb{Z}^0 \xrightarrow{I(\top)} \mathbb{Z};$$

$$\bullet \mapsto 0$$

$$\mathbb{Z}^1 \xrightarrow{I(\neg)} \mathbb{Z};$$

$$n \mapsto n$$

$$\mathbb{Z}^2 \xrightarrow{I(\star)} \mathbb{Z};$$

$$\langle n, m \rangle \mapsto n + m$$

Nun ist die eindeutige Fortsetzung $\mathcal{F}[\mathcal{A}] \xrightarrow{\bar{\delta}} \mathbb{Z}$ von $\mathcal{A} \xrightarrow{1} \mathbb{Z}$ zu einem \mathcal{J} -Homomorphismus nach $\langle \mathbb{Z}, I \rangle$ ebenfalls konstant mit Wert 0.

Beispiel (nochmal Klammerdifferenz $\bar{\delta}(A)$, s.o.)

- $\mathcal{A} \xrightarrow{\delta} \mathbb{Z}$ ist konstant mit Wert 0;
- Interpretiere \mathcal{J} in \mathbb{Z} wie folgt:

$$\mathbb{Z}^0 \xrightarrow{I(\perp)} \mathbb{Z};$$

$$\bullet \mapsto 0$$

$$\mathbb{Z}^0 \xrightarrow{I(\top)} \mathbb{Z};$$

$$\bullet \mapsto 0$$

$$\mathbb{Z}^1 \xrightarrow{I(\neg)} \mathbb{Z};$$

$$n \mapsto n$$

$$\mathbb{Z}^2 \xrightarrow{I(\star)} \mathbb{Z};$$

$$\langle n, m \rangle \mapsto n + m$$

Nun ist die eindeutige Fortsetzung $\mathcal{F}[\mathcal{A}] \xrightarrow{\bar{\delta}} \mathbb{Z}$ von $\mathcal{A} \xrightarrow{1} \mathbb{Z}$ zu einem \mathcal{J} -Homomorphismus nach $\langle \mathbb{Z}, I \rangle$ ebenfalls konstant mit Wert 0.

Substitution

Für Formeln $A, B \in \mathcal{F}[\mathcal{A}]$ und ein Atom $q \in \mathcal{A}$ bezeichne $A[q/B]$ die Formel, die durch simultanes Ersetzen jedes Auftretens von q in A durch B entsteht.

Substitution

Für Formeln $A, B \in \mathcal{F}[\mathcal{A}]$ und ein Atom $q \in \mathcal{A}$ bezeichne $A[q/B]$ die Formel, die durch simultanes Ersetzen jedes Auftretens von q in A durch B entsteht. Genauer:

Definition

$\mathcal{F}[\mathcal{A}] \xrightarrow{[p/B]} \mathcal{F}[\mathcal{A}]$ ist die durch den Rekursionsatz eindeutig bestimmte Fortsetzung der Abbildung

$$\mathcal{A} \xrightarrow{f} \mathcal{F}[\mathcal{A}], \quad q \mapsto \begin{cases} B & \text{falls } q = p \\ q & \text{falls } q \neq p \end{cases}$$

bzgl. der kanonischen \mathcal{J} -Algebra-Struktur auf $\mathcal{F}[\mathcal{A}]$.

Klammerersparnisregeln

Um Klammern einzusparen, verabreden wir folgende

Bindungskonventionen

Klammerersparnisregeln

Um Klammern einzusparen, verabreden wir folgende

Bindungskonventionen

- Junktoren niedrigerer Stelligkeit binden stärker als solche höherer Stelligkeit.

Klammerersparnisregeln

Um Klammern einzusparen, verabreden wir folgende

Bindungskonventionen

- Junktoren niedrigerer Stelligkeit binden stärker als solche höherer Stelligkeit.
- \wedge und \vee binden gleich stark, aber stärker als \rightarrow und \leftrightarrow .

Klammerersparnisregeln

Um Klammern einzusparen, verabreden wir folgende

Bindungskonventionen

- Junktoren niedrigerer Stelligkeit binden stärker als solche höherer Stelligkeit.
- \wedge und \vee binden gleich stark, aber stärker als \rightarrow und \leftrightarrow .
- \rightarrow und \leftrightarrow binden gleich stark.

Klammerersparnisregeln

Um Klammern einzusparen, verabreden wir folgende

Bindungskonventionen

- Junktoren niedrigerer Stelligkeit binden stärker als solche höherer Stelligkeit.
- \wedge und \vee binden gleich stark, aber stärker als \rightarrow und \leftrightarrow .
- \rightarrow und \leftrightarrow binden gleich stark.
- binäre Junktoren assoziieren nach rechts, d.h., $A \star B \star C$ ist als $A \star (B \star C)$ zu interpretieren (anders als auf alten Folien!). Für $(A \star B) \star C$ gib es keine Vereinfachung.

Klammerersparnisregeln

Um Klammern einzusparen, verabreden wir folgende

Bindungskonventionen

- Junktoren niedrigerer Stelligkeit binden stärker als solche höherer Stelligkeit.
- \wedge und \vee binden gleich stark, aber stärker als \rightarrow und \leftrightarrow .
- \rightarrow und \leftrightarrow binden gleich stark.
- binäre Junktoren assoziieren nach rechts, d.h., $A \star B \star C$ ist als $A \star (B \star C)$ zu interpretieren (anders als auf alten Folien!). Für $(A \star B) \star C$ gib es keine Vereinfachung.

Achtung: Im Rahmen der Semantik werden wir später sehen, dass die binären Operatoren \wedge , \vee und \leftrightarrow auf Formeln modulo Äquivalenz tatsächlich assoziativ sein werden; für \rightarrow ist dies aber nicht der Fall!

Kapitel 2

Semantik

Der Wahrheitsbereich $\mathbb{B} = \{0, 1\}$

Als **Wahrheitswerte** wollen wir 1 für „wahr“ und 0 für „falsch“ verwenden.

Der Wahrheitsbereich $\mathbb{B} = \{0, 1\}$

Als **Wahrheitswerte** wollen wir 1 für „wahr“ und 0 für „falsch“ verwenden.
Die Wahrheitswerte unserer atomaren Formeln sollten beliebig wählbar sein:

Definition

Eine Abbildung $\mathcal{A} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{B}$ heißt **Belegung**. Ihre eindeutige Fortsetzung bzgl. der **kanonischen Interpretation** von \mathcal{J} in \mathbb{B} (wir lassen I weg)

$$\begin{array}{llll}
 \mathbb{B}^0 \xrightarrow{\perp} \mathbb{B}; & \bullet \mapsto 0 & \mathbb{B}^2 \xrightarrow{\wedge} \mathbb{B}; & \langle x, y \rangle \mapsto \inf\{x, y\} \\
 \mathbb{B}^0 \xrightarrow{\top} \mathbb{B}; & \bullet \mapsto 1 & \mathbb{B}^2 \xrightarrow{\vee} \mathbb{B}; & \langle x, y \rangle \mapsto \sup\{x, y\} \\
 \mathbb{B}^1 \xrightarrow{\neg} \mathbb{B}; & x \mapsto 1 - x & \mathbb{B}^2 \xrightarrow{\rightarrow} \mathbb{B}; & \langle x, y \rangle \mapsto \chi_{\leq}\langle x, y \rangle \\
 & & \mathbb{B}^2 \xrightarrow{\leftrightarrow} \mathbb{B}; & \langle x, y \rangle \mapsto \chi_{=} \langle x, y \rangle
 \end{array}$$

bezeichnen wir mit $\mathcal{A} \xrightarrow{\hat{\varphi}} \mathbb{B}$ und nennen sie **Bewertung**.

χ_R steht hier für die **charakteristische Funktion** der Menge $R \subseteq \mathbb{B} \times \mathbb{B}$.

Wahrheitstabellen

Die kanonische Interpretation von \mathcal{J} in \mathbb{B} läßt sich alternativ mittels Wahrheitstabellen darstellen:

		\neg	\wedge	\vee	\rightarrow	\leftrightarrow
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Wahrheitstabellen

Die kanonische Interpretation von \mathcal{J} in \mathbb{B} läßt sich alternativ mittels Wahrheitstabellen darstellen:

⊥
0

⊤
1

	¬
0	1
1	0

		∧	∨	→	↔
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Beispiel (Finde $\hat{\varphi}(\neg(p \wedge q) \rightarrow r)$ falls $\varphi(p) = 1$ und $\varphi(q) = \varphi(r) = 0$)

$$\neg(p \wedge q) \rightarrow r$$

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{1 \quad 0}_0}_1}_0$$

oder in „flacher“ Notation $\neg(p \wedge q) \rightarrow r$

$$1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

Boole'sche Funktionen

Für jede Formel A kann man fragen, welche Werte $\hat{\varphi}(A)$ annimmt, wenn φ alle Belegungen durchläuft. Da A nur endlich viele Atome enthält, etwa n , erhalten wir eine Funktion $\mathbb{B}^n \xrightarrow{f_A} \mathbb{B}$, die sich tabellarisch angeben läßt:

Beispiel

p	q	r	$p \vee q$	\rightarrow	$(q \leftrightarrow r)$	\wedge	\neg	$(p \vee \neg r)$
0	0	0	0	1	1	0	0	1 1
0	0	1	0	1	0	0	1	0 0
0	1	0	1	0	0	0	0	1 1
0	1	1	1	1	1	1	1	0 0
1	0	0	1	0	1	0	0	1 1
1	0	1	1	0	0	0	0	1 0
1	1	0	1	0	0	0	0	1 1
1	1	1	1	0	1	0	0	1 0

Logische Folgerung \models , Erfüllbar- und Allgemeingültigkeit

Definition

Logische Folgerung \models , Erfüllbar- und Allgemeingültigkeit

Definition

- A (bzw. Γ) heißt **erfüllbar**, wenn eine Belegung φ existiert mit $\hat{\varphi}(A) = 1$ (für jedes $A \in \Gamma$).

Logische Folgerung \models , Erfüllbar- und Allgemeingültigkeit

Definition

- A (bzw. Γ) heißt **erfüllbar**, wenn eine Belegung φ existiert mit $\hat{\varphi}(A) = 1$ (für jedes $A \in \Gamma$).
- Die **Erfüllungsrelation** ist gegeben durch $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{B}^{\mathcal{A}} \times \mathcal{F}[\mathcal{A}]$.

Logische Folgerung \models , Erfüllbar- und Allgemeingültigkeit

Definition

- A (bzw. Γ) heißt **erfüllbar**, wenn eine Belegung φ existiert mit $\hat{\varphi}(A) = 1$ (für jedes $A \in \Gamma$).
- Die **Erfüllungsrelation** ist gegeben durch $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{B}^{\mathcal{A}} \times \mathcal{F}[\mathcal{A}]$. Die zugehörige **Polarität** induziert je einen **Hüllenoperator** $\models(\)$ auf $\mathbb{B}^{\mathcal{A}}$ und $(\) \models$ auf $\mathcal{F}[\mathcal{A}]$.

Logische Folgerung \models , Erfüllbar- und Allgemeingültigkeit

Definition

- A (bzw. Γ) heißt **erfüllbar**, wenn eine Belegung φ existiert mit $\hat{\varphi}(A) = 1$ (für jedes $A \in \Gamma$).
- Die **Erfüllungsrelation** ist gegeben durch $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{B}^{\mathcal{A}} \times \mathcal{F}[\mathcal{A}]$. Die zugehörige **Polarität** induziert je einen **Hüllenoperator** $\models(\)$ auf $\mathbb{B}^{\mathcal{A}}$ und $(\)^{\models}$ auf $\mathcal{F}[\mathcal{A}]$. Schreib- bzw. Sprechweise: $\Gamma \models A$ für $A \in \Gamma^{\models}$; A **folgt logisch aus** Γ ;

Logische Folgerung \models , Erfüllbar- und Allgemeingültigkeit

Definition

- A (bzw. Γ) heißt **erfüllbar**, wenn eine Belegung φ existiert mit $\hat{\varphi}(A) = 1$ (für jedes $A \in \Gamma$).
- Die **Erfüllungsrelation** ist gegeben durch $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{B}^{\mathcal{A}} \times \mathcal{F}[\mathcal{A}]$. Die zugehörige **Polarität** induziert je einen **Hüllenoperator** $\models(\)$ auf $\mathbb{B}^{\mathcal{A}}$ und $(\) \models$ auf $\mathcal{F}[\mathcal{A}]$. Schreib- bzw. Sprechweise: $\Gamma \models A$ für $A \in \Gamma \models$; A **folgt logisch aus** Γ ; die Elemente von Γ heißen **Prämissen**.

Logische Folgerung \models , Erfüllbar- und Allgemeingültigkeit

Definition

- A (bzw. Γ) heißt **erfüllbar**, wenn eine Belegung φ existiert mit $\hat{\varphi}(A) = 1$ (für jedes $A \in \Gamma$).
- Die **Erfüllungsrelation** ist gegeben durch $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{B}^{\mathcal{A}} \times \mathcal{F}[\mathcal{A}]$. Die zugehörige **Polarität** induziert je einen **Hüllenoperator** $\models(\)$ auf $\mathbb{B}^{\mathcal{A}}$ und $(\) \models$ auf $\mathcal{F}[\mathcal{A}]$. Schreib- bzw. Sprechweise: $\Gamma \models A$ für $A \in \Gamma \models$; A **folgt logisch aus** Γ ; die Elemente von Γ heißen **Prämissen**.
- A heißt **allgemeingültig/Tautologie**, wenn jede Belegung A erfüllt.

Logische Folgerung \models , Erfüllbar- und Allgemeingültigkeit

Definition

- A (bzw. Γ) heißt **erfüllbar**, wenn eine Belegung φ existiert mit $\hat{\varphi}(A) = 1$ (für jedes $A \in \Gamma$).
- Die **Erfüllungsrelation** ist gegeben durch $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{B}^{\mathcal{A}} \times \mathcal{F}[\mathcal{A}]$. Die zugehörige **Polarität** induziert je einen **Hüllenoperator** $\models(\)$ auf $\mathbb{B}^{\mathcal{A}}$ und $(\)^{\models}$ auf $\mathcal{F}[\mathcal{A}]$. Schreib- bzw. Sprechweise: $\Gamma \models A$ für $A \in \Gamma^{\models}$; A **folgt logisch aus** Γ ; die Elemente von Γ heißen **Prämissen**.
- A heißt **allgemeingültig/Tautologie**, wenn jede Belegung A erfüllt. Schreibweise: $\models A$ für $A \in \emptyset^{\models} (= \mathcal{O}^{\circ}(\mathbb{B}^{\mathcal{A}}))$.

Logische Folgerung \models , Erfüllbar- und Allgemeingültigkeit

Definition

- A (bzw. Γ) heißt **erfüllbar**, wenn eine Belegung φ existiert mit $\hat{\varphi}(A) = 1$ (für jedes $A \in \Gamma$).
- Die **Erfüllungsrelation** ist gegeben durch $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{B}^{\mathcal{A}} \times \mathcal{F}[\mathcal{A}]$. Die zugehörige **Polarität** induziert je einen **Hüllenoperator** $\models(\)$ auf $\mathbb{B}^{\mathcal{A}}$ und $(\)^{\models}$ auf $\mathcal{F}[\mathcal{A}]$. Schreib- bzw. Sprechweise: $\Gamma \models A$ für $A \in \Gamma^{\models}$; A **folgt logisch aus** Γ ; die Elemente von Γ heißen **Prämissen**.
- A heißt **allgemeingültig/Tautologie**, wenn jede Belegung A erfüllt. Schreibweise: $\models A$ für $A \in \emptyset^{\models} (= \mathcal{O}^{\circ}(\mathbb{B}^{\mathcal{A}}))$.

Ob A erfüllbar oder allgemeingültig ist, entspricht der Existenz von Einsen, bzw. keinen Nullen, in der relevanten Spalte der Boole'schen Funktion f_A .

Logische Folgerung \models , Erfüllbar- und Allgemeingültigkeit

Definition

- A (bzw. Γ) heißt **erfüllbar**, wenn eine Belegung φ existiert mit $\hat{\varphi}(A) = 1$ (für jedes $A \in \Gamma$).
- Die **Erfüllungsrelation** ist gegeben durch $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{B}^{\mathcal{A}} \times \mathcal{F}[\mathcal{A}]$. Die zugehörige **Polarität** induziert je einen **Hüllenoperator** $\models(\)$ auf $\mathbb{B}^{\mathcal{A}}$ und $(\) \models$ auf $\mathcal{F}[\mathcal{A}]$. Schreib- bzw. Sprechweise: $\Gamma \models A$ für $A \in \Gamma \models$; A **folgt logisch aus** Γ ; die Elemente von Γ heißen **Prämissen**.
- A heißt **allgemeingültig/Tautologie**, wenn jede Belegung A erfüllt. Schreibweise: $\models A$ für $A \in \emptyset \models (= \mathcal{O}^\circ(\mathbb{B}^{\mathcal{A}}))$.

Ob A erfüllbar oder allgemeingültig ist, entspricht der Existenz von Einsen, bzw. keinen Nullen, in der relevanten Spalte der Boole'schen Funktion f_A .

Beobachtung.

A ist genau dann allgemeingültig, wenn $\neg A$ nicht erfüllbar ist. □

Charakterisierung von Unerfüllbarkeit

Lemma

Folgende Bedingungen sind für eine Formelmenge Γ äquivalent:

Charakterisierung von Unerfüllbarkeit

Lemma

Folgende Bedingungen sind für eine Formelmenge Γ äquivalent:

(0) Γ ist unerfüllbar.

Charakterisierung von Unerfüllbarkeit

Lemma

Folgende Bedingungen sind für eine Formelmenge Γ äquivalent:

- (0) Γ ist unerfüllbar.
- (1) $\Gamma \models A$ für alle Formeln A .

Charakterisierung von Unerfüllbarkeit

Lemma

Folgende Bedingungen sind für eine Formelmenge Γ äquivalent:

- (0) Γ ist unerfüllbar.
- (1) $\Gamma \models A$ für alle Formeln A .
- (2) $\Gamma \models \perp$.

Charakterisierung von Unerfüllbarkeit

Lemma

Folgende Bedingungen sind für eine Formelmenge Γ äquivalent:

- (0) Γ ist unerfüllbar.
- (1) $\Gamma \models A$ für alle Formeln A .
- (2) $\Gamma \models \perp$.
- (3) Es gibt eine Formel B mit $\Gamma \models B$ und $\Gamma \models \neg B$.

Charakterisierung von Unerfüllbarkeit

Lemma

Folgende Bedingungen sind für eine Formelmenge Γ äquivalent:

- (0) Γ ist unerfüllbar.
- (1) $\Gamma \models A$ für alle Formeln A .
- (2) $\Gamma \models \perp$.
- (3) Es gibt eine Formel B mit $\Gamma \models B$ und $\Gamma \models \neg B$.

Beweis.

(0) \Rightarrow (1): Klar, da A keine Bedingungen erfüllen muß.

Charakterisierung von Unerfüllbarkeit

Lemma

Folgende Bedingungen sind für eine Formelmenge Γ äquivalent:

- (0) Γ ist unerfüllbar.
- (1) $\Gamma \models A$ für alle Formeln A .
- (2) $\Gamma \models \perp$.
- (3) Es gibt eine Formel B mit $\Gamma \models B$ und $\Gamma \models \neg B$.

Beweis.

(0) \Rightarrow (1): Klar, da A keine Bedingungen erfüllen muß.

(1) \Rightarrow (2), (3): Trivial.

Charakterisierung von Unerfüllbarkeit

Lemma

Folgende Bedingungen sind für eine Formelmenge Γ äquivalent:

- (0) Γ ist unerfüllbar.
- (1) $\Gamma \models A$ für alle Formeln A .
- (2) $\Gamma \models \perp$.
- (3) Es gibt eine Formel B mit $\Gamma \models B$ und $\Gamma \models \neg B$.

Beweis.

(0) \Rightarrow (1): Klar, da A keine Bedingungen erfüllen muß.

(1) \Rightarrow (2), (3): Trivial.

(2), (3) \Rightarrow (0): Keine Belegung erfüllt \perp bzw. B und $\neg B$. □

Das semantische Deduktionstheorem

Prämissen lassen sich nach Bedarf zwischen externer Relation \models und internem Junktor \rightarrow verschieben:

Das semantische Deduktionstheorem

Prämissen lassen sich nach Bedarf zwischen externer Relation \models und internem Junktor \rightarrow verschieben:

Lemma

$\Gamma \cup \{B\} \models A$ genau dann wenn $\Gamma \models B \rightarrow A$.

Das semantische Deduktionstheorem

Prämissen lassen sich nach Bedarf zwischen externer Relation \models und internem Junktor \rightarrow verschieben:

Lemma

$\Gamma \cup \{B\} \models A$ genau dann wenn $\Gamma \models B \rightarrow A$.

Beweis.

(\Rightarrow): Erfüllt φ die Menge Γ , folgt aus $\hat{\varphi}(B) = 1$ nach Voraussetzung $\hat{\varphi}(A) = 1$, oder es gilt $\hat{\varphi}(B) \leq \hat{\varphi}(A)$. Beides impliziert $\hat{\varphi}(B \rightarrow A) = 1$.

Das semantische Deduktionstheorem

Prämissen lassen sich nach Bedarf zwischen externer Relation \models und internem Junktor \rightarrow verschieben:

Lemma

$\Gamma \cup \{B\} \models A$ genau dann wenn $\Gamma \models B \rightarrow A$.

Beweis.

(\Rightarrow): Erfüllt φ die Menge Γ , folgt aus $\hat{\varphi}(B) = 1$ nach Voraussetzung $\hat{\varphi}(A) = 1$, oder es gilt $\hat{\varphi}(B) \leq \hat{\varphi}(A)$. Beides impliziert $\hat{\varphi}(B \rightarrow A) = 1$.

(\Leftarrow): Mit $\Gamma \cup \{B\}$ erfüllt ψ auch Γ und $\{B\}$, nach Voraussetzung also $B \rightarrow A$. Aber $\hat{\psi}(B) = \hat{\psi}(B \rightarrow A) = 1$ erzwingt $\hat{\psi}(A) = 1$. \square

Das semantische Deduktionstheorem

Prämissen lassen sich nach Bedarf zwischen externer Relation \models und internem Junktor \rightarrow verschieben:

Lemma

$\Gamma \cup \{B\} \models A$ genau dann wenn $\Gamma \models B \rightarrow A$.

Beweis.

(\Rightarrow): Erfüllt φ die Menge Γ , folgt aus $\hat{\varphi}(B) = 1$ nach Voraussetzung $\hat{\varphi}(A) = 1$, oder es gilt $\hat{\varphi}(B) \leq \hat{\varphi}(A)$. Beides impliziert $\hat{\varphi}(B \rightarrow A) = 1$.

(\Leftarrow): Mit $\Gamma \cup \{B\}$ erfüllt ψ auch Γ und $\{B\}$, nach Voraussetzung also $B \rightarrow A$. Aber $\hat{\psi}(B) = \hat{\psi}(B \rightarrow A) = 1$ erzwingt $\hat{\psi}(A) = 1$. \square

Aufgrund der Expansivität des Hüllenoperators $(\)^\models$ folgt somit

Das semantische Deduktionstheorem

Prämissen lassen sich nach Bedarf zwischen externer Relation \models und internem Junktor \rightarrow verschieben:

Lemma

$\Gamma \cup \{B\} \models A$ genau dann wenn $\Gamma \models B \rightarrow A$.

Beweis.

(\Rightarrow): Erfüllt φ die Menge Γ , folgt aus $\hat{\varphi}(B) = 1$ nach Voraussetzung $\hat{\varphi}(A) = 1$, oder es gilt $\hat{\varphi}(B) \leq \hat{\varphi}(A)$. Beides impliziert $\hat{\varphi}(B \rightarrow A) = 1$.

(\Leftarrow): Mit $\Gamma \cup \{B\}$ erfüllt ψ auch Γ und $\{B\}$, nach Voraussetzung also $B \rightarrow A$. Aber $\hat{\psi}(B) = \hat{\psi}(B \rightarrow A) = 1$ erzwingt $\hat{\psi}(A) = 1$. \square

Aufgrund der Expansivität des Hüllenoperators $(\)^\models$ folgt somit

Korollar

Für alle Formeln A, B gilt: $B, B \rightarrow A \models A$.

Der Kompaktheitssatz (KPS)

Alle bisher eingeführten Begriffe sind entscheidbar, solange die Formelmengen endlich sind: dann kommen nur endlich viele Atome vor und man kann eine endliche Wahrheitstabelle aufstellen.

Der Kompaktheitssatz (KPS)

Alle bisher eingeführten Begriffe sind entscheidbar, solange die Formelmengen endlich sind: dann kommen nur endlich viele Atome vor und man kann eine endliche Wahrheitstabelle aufstellen.

Der folgende zentrale Satz besagt, dass man sich im Wesentlichen auf endliche Formelmengen beschränken kann:

Der Kompaktheitssatz (KPS)

Alle bisher eingeführten Begriffe sind entscheidbar, solange die Formelmengen endlich sind: dann kommen nur endlich viele Atome vor und man kann eine endliche Wahrheitstabelle aufstellen.

Der folgende zentrale Satz besagt, dass man sich im Wesentlichen auf endliche Formelmengen beschränken kann:

Definition

Γ heißt **endlich erfüllbar**, wenn jede endliche Teilmenge von Γ erfüllbar ist.

Der Kompaktheitssatz (KPS)

Alle bisher eingeführten Begriffe sind entscheidbar, solange die Formelmengen endlich sind: dann kommen nur endlich viele Atome vor und man kann eine endliche Wahrheitstabelle aufstellen.

Der folgende zentrale Satz besagt, dass man sich im Wesentlichen auf endliche Formelmengen beschränken kann:

Definition

Γ heißt **endlich erfüllbar**, wenn jede endliche Teilmenge von Γ erfüllbar ist.

Satz (Kompaktheitssatz)

Γ ist genau dann erfüllbar, wenn Γ endlich erfüllbar ist.

Der Kompaktheitssatz (KPS)

Alle bisher eingeführten Begriffe sind entscheidbar, solange die Formelmengen endlich sind: dann kommen nur endlich viele Atome vor und man kann eine endliche Wahrheitstabelle aufstellen.

Der folgende zentrale Satz besagt, dass man sich im Wesentlichen auf endliche Formelmengen beschränken kann:

Definition

Γ heißt **endlich erfüllbar**, wenn jede endliche Teilmenge von Γ erfüllbar ist.

Satz (Kompaktheitssatz)

Γ ist genau dann erfüllbar, wenn Γ endlich erfüllbar ist.

Die Notwendigkeit ist trivial, ebenso die Hinlänglichkeit, falls \mathcal{A} endlich ist (Kontraposition). Vor dem Beweis der Hinlänglichkeit für unendliches \mathcal{A} betrachten wir erst eine „Anwendung“ und einige Konsequenzen des KPS.

Ein Matching-Problem

Beispiel

Für eine Funktion $M \xrightarrow{T} P_f(F)$ ist eine injektive **Auswahlfunktion** gesucht, d.h., $M \xrightarrow{e} F$ mit $e(m) \in T(m)$ für alle $m \in M$.

Ein Matching-Problem

Beispiel

Für eine Funktion $M \xrightarrow{T} P_f(F)$ ist eine injektive **Auswahlfunktion** gesucht, d.h., $M \xrightarrow{e} F$ mit $e(m) \in T(m)$ für alle $m \in M$.

Aufgrund des KPS garantiert die Lösbarkeit für endliche Mengen M die Lösbarkeit auch für unendliches M .

Ein Matching-Problem

Beispiel

Für eine Funktion $M \xrightarrow{T} P_f(F)$ ist eine injektive **Auswahlfunktion** gesucht, d.h., $M \xrightarrow{e} F$ mit $e(m) \in T(m)$ für alle $m \in M$.

Aufgrund des KPS garantiert die Lösbarkeit für endliche Mengen M die Lösbarkeit auch für unendliches M .

Als Atome verwenden wir Symbole $p_{m,f}$, $\langle m, f \rangle \in M \times F$.

Ein Matching-Problem

Beispiel

Für eine Funktion $M \xrightarrow{T} P_f(F)$ ist eine injektive **Auswahlfunktion** gesucht, d.h., $M \xrightarrow{e} F$ mit $e(m) \in T(m)$ für alle $m \in M$.

Aufgrund des KPS garantiert die Lösbarkeit für endliche Mengen M die Lösbarkeit auch für unendliches M .

Als Atome verwenden wir Symbole $p_{m,f}$, $\langle m, f \rangle \in M \times F$.

Γ besteht aus drei Komponenten, die verschiedene Aspekt der Problemstellung umsetzen ($m, m' \in M$, $f, f' \in F$):

Ein Matching-Problem

Beispiel

Für eine Funktion $M \xrightarrow{T} P_f(F)$ ist eine injektive **Auswahlfunktion** gesucht, d.h., $M \xrightarrow{e} F$ mit $e(m) \in T(m)$ für alle $m \in M$.

Aufgrund des KPS garantiert die Lösbarkeit für endliche Mengen M die Lösbarkeit auch für unendliches M .

Als Atome verwenden wir Symbole $p_{m,f}$, $\langle m, f \rangle \in M \times F$.

Γ besteht aus drei Komponenten, die verschiedene Aspekt der Problemstellung umsetzen ($m, m' \in M$, $f, f' \in F$):

- Auswahleigenschaft: $H_m := \bigvee_{f \in T(m)} p_{m,f}$

Ein Matching-Problem

Beispiel

Für eine Funktion $M \xrightarrow{T} P_f(F)$ ist eine injektive **Auswahlfunktion** gesucht, d.h., $M \xrightarrow{e} F$ mit $e(m) \in T(m)$ für alle $m \in M$.

Agrund des KPS garantiert die Lösbarkeit für endliche Mengen M die Lösbarkeit auch für unendliches M .

Als Atome verwenden wir Symbole $p_{m,f}$, $\langle m, f \rangle \in M \times F$.

Γ besteht aus drei Komponenten, die verschiedene Aspekt der Problemstellung umsetzen ($m, m' \in M$, $f, f' \in F$):

- Auswahleigenschaft: $H_m := \bigvee_{f \in T(m)} p_{m,f}$
- Funktionalität: $I_{m;f,f'} := p_{m,f} \rightarrow \neg p_{m,f'}$ mit $f \neq f'$;

Ein Matching-Problem

Beispiel

Für eine Funktion $M \xrightarrow{T} P_f(F)$ ist eine injektive **Auswahlfunktion** gesucht, d.h., $M \xrightarrow{e} F$ mit $e(m) \in T(m)$ für alle $m \in M$.

Aufgrund des KPS garantiert die Lösbarkeit für endliche Mengen M die Lösbarkeit auch für unendliches M .

Als Atome verwenden wir Symbole $p_{m,f}$, $\langle m, f \rangle \in M \times F$.

Γ besteht aus drei Komponenten, die verschiedene Aspekt der Problemstellung umsetzen ($m, m' \in M$, $f, f' \in F$):

- Auswahleigenschaft: $H_m := \bigvee_{f \in T(m)} p_{m,f}$
- Funktionalität: $I_{m;f,f'} := p_{m,f} \rightarrow \neg p_{m,f'}$ mit $f \neq f'$;
- Injektivität: $J_{f;m,m'} := p_{m,f} \rightarrow \neg p_{m',f}$ mit $m \neq m'$.

Beispiel (Fortsetzung)

Die Existenz einer Γ erfüllenden Belegung folgt nach KPS aus der Erfüllbarkeit jeder endlichen Teilmenge.

Beispiel (Fortsetzung)

Die Existenz einer Γ erfüllenden Belegung folgt nach KPS aus der Erfüllbarkeit jeder endlichen Teilmenge.

Für endliches $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ setze

$$M_* := \{ m \in M : m \text{ tritt als Index in einer Formel von } \Gamma_0 \text{ auf} \}$$

Beispiel (Fortsetzung)

Die Existenz einer Γ erfüllenden Belegung folgt nach KPS aus der Erfüllbarkeit jeder endlichen Teilmenge.

Für endliches $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ setze

$$M_* := \{ m \in M : m \text{ tritt als Index in einer Formel von } \Gamma_0 \text{ auf} \}$$

Es gibt vier Möglichkeiten, wie $m \in M_*$ zustande kommen kann, via H_m , via $I_{m;f,f'}$, via $J_{f;m,m'}$ und via $J_{f;m',m}$.

Beispiel (Fortsetzung)

Die Existenz einer Γ erfüllenden Belegung folgt nach KPS aus der Erfüllbarkeit jeder endlichen Teilmenge.

Für endliches $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ setze

$$M_* := \{ m \in M : m \text{ tritt als Index in einer Formel von } \Gamma_0 \text{ auf} \}$$

Es gibt vier Möglichkeiten, wie $m \in M_*$ zustande kommen kann, via H_m , via $I_{m;f,f'}$, via $J_{f;m,m'}$ und via $J_{f;m',m}$.

M_* als endliche Menge erlaubt eine Lösung des Matching-Problems: Einschränkung der Konstruktion von Γ auf $m \in M_*$ liefert eine endliche Formelmenge Γ_* . Und jede Γ_* erfüllende Belegung erfüllt auch $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_*$.

Varianten des Kompaktheitssatzes

Korollar (wird auch oft als KPS bezeichnet).

$\Gamma \models A$ genau dann wenn $\Gamma_0 \models A$ für eine endliche Teilmenge $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$.

Varianten des Kompaktheitssatzes

Korollar (wird auch oft als KPS bezeichnet).

$\Gamma \models A$ genau dann wenn $\Gamma_0 \models A$ für eine endliche Teilmenge $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$.

Beweis.

$\Gamma \models A$ gdw. $\Gamma \cup \{\neg A\}$ unerfüllbar

gdw. $\Gamma \cup \{\neg A\}$ hat eine endliche unerfüllbare Teilmenge Γ_1

gdw. Γ hat eine endliche Teilmenge Γ_0 mit $\Gamma_0 \cup \{\neg A\}$ unerfüllbar

gdw. $\Gamma_0 \models A$ für eine endliche Teilmenge $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ □

Varianten des Kompaktheitssatzes

Korollar (wird auch oft als KPS bezeichnet).

$\Gamma \models A$ genau dann wenn $\Gamma_0 \models A$ für eine endliche Teilmenge $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$.

Beweis.

$\Gamma \models A$ gdw. $\Gamma \cup \{\neg A\}$ unerfüllbar

gdw. $\Gamma \cup \{\neg A\}$ hat eine endliche unerfüllbare Teilmenge Γ_1

gdw. Γ hat eine endliche Teilmenge Γ_0 mit $\Gamma_0 \cup \{\neg A\}$ unerfüllbar

gdw. $\Gamma_0 \models A$ für eine endliche Teilmenge $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ □

Korollar (KPS für $\neg\Gamma$).

Für eine Formelmeng Γ sind folgende Aussagen äquivalent:

Varianten des Kompaktheitssatzes

Korollar (wird auch oft als KPS bezeichnet).

$\Gamma \models A$ genau dann wenn $\Gamma_0 \models A$ für eine endliche Teilmenge $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$.

Beweis.

$\Gamma \models A$ gdw. $\Gamma \cup \{\neg A\}$ unerfüllbar

gdw. $\Gamma \cup \{\neg A\}$ hat eine endliche unerfüllbare Teilmenge Γ_1

gdw. Γ hat eine endliche Teilmenge Γ_0 mit $\Gamma_0 \cup \{\neg A\}$ unerfüllbar

gdw. $\Gamma_0 \models A$ für eine endliche Teilmenge $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ □

Korollar (KPS für $\neg\Gamma$).

Für eine Formelmeng Γ sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) Jede Belegung erfüllt mindestens eine Formel $B \in \Gamma$.

Varianten des Kompaktheitssatzes

Korollar (wird auch oft als KPS bezeichnet).

$\Gamma \models A$ genau dann wenn $\Gamma_0 \models A$ für eine endliche Teilmenge $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$.

Beweis.

$\Gamma \models A$ gdw. $\Gamma \cup \{\neg A\}$ unerfüllbar

gdw. $\Gamma \cup \{\neg A\}$ hat eine endliche unerfüllbare Teilmenge Γ_1

gdw. Γ hat eine endliche Teilmenge Γ_0 mit $\Gamma_0 \cup \{\neg A\}$ unerfüllbar

gdw. $\Gamma_0 \models A$ für eine endliche Teilmenge $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ □

Korollar (KPS für $\neg\Gamma$).

Für eine Formelmenge Γ sind folgende Aussagen äquivalent:

- (a) Jede Belegung erfüllt mindestens eine Formel $B \in \Gamma$.
- (b) Es gibt $B_i \in \Gamma$, $i < n$, so dass $B_0 \vee \dots \vee B_{n-1}$ allgemeingültig ist.

Zum KPS-Beweis

Lemma

Für jede Formelmenge Γ und jede Formel A gilt: ist Γ endlich erfüllbar, so auch $\Gamma \cup \{A\}$ oder $\Gamma \cup \{\neg A\}$.

Zum KPS-Beweis

Lemma

Für jede Formelmenge Γ und jede Formel A gilt: ist Γ endlich erfüllbar, so auch $\Gamma \cup \{A\}$ oder $\Gamma \cup \{\neg A\}$.

Beweis.

Nach Voraussetzung enthält jede unerfüllbare endliche Teilmenge von $\Gamma \cup \{A\}$ bzw. $\Gamma \cup \{\neg A\}$ die Formel A bzw. $\neg A$.

Zum KPS-Beweis

Lemma

Für jede Formelmenge Γ und jede Formel A gilt: ist Γ endlich erfüllbar, so auch $\Gamma \cup \{A\}$ oder $\Gamma \cup \{\neg A\}$.

Beweis.

Nach Voraussetzung enthält jede unerfüllbare endliche Teilmenge von $\Gamma \cup \{A\}$ bzw. $\Gamma \cup \{\neg A\}$ die Formel A bzw. $\neg A$.

Annahme: $\Gamma \cup \{A\}$ nicht endlich erfüllbar, also $\Gamma_0 \cup \{A\}$ nicht erfüllbar für eine endliche Teilmenge $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$.

Zum KPS-Beweis

Lemma

Für jede Formelmenge Γ und jede Formel A gilt: ist Γ endlich erfüllbar, so auch $\Gamma \cup \{A\}$ oder $\Gamma \cup \{\neg A\}$.

Beweis.

Nach Voraussetzung enthält jede unerfüllbare endliche Teilmenge von $\Gamma \cup \{A\}$ bzw. $\Gamma \cup \{\neg A\}$ die Formel A bzw. $\neg A$.

Annahme: $\Gamma \cup \{A\}$ nicht endlich erfüllbar, also $\Gamma_0 \cup \{A\}$ nicht erfüllbar für eine endliche Teilmenge $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$.

zu zeigen: $\Gamma \cup \{\neg A\}$ ist endlich erfüllbar. Betrachte $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$ endlich. Nach Voraussetzung hat $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$ eine erfüllende Belegung φ . Aufgrund der Annahme gilt nun $\hat{\varphi}(\neg A) = 1$. □

Jede Belegung φ erfüllt „die Hälfte“ aller Formeln, nämlich immer genau eine der Formeln A und $\neg A$. Die tatsächlich erfüllte Formel bezeichnen wir mit φA . Entsprechend schreiben wir $\varphi\Gamma = \{\varphi A : A \in \Gamma\}$ für die von φ erfüllten Varianten der Formeln einer Menge Γ . Beachte: $|\varphi\Gamma| = |\Gamma|$.

Jede Belegung φ erfüllt „die Hälfte“ aller Formeln, nämlich immer genau eine der Formeln A und $\neg A$. Die tatsächlich erfüllte Formel bezeichnen wir mit φA . Entsprechend schreiben wir $\varphi\Gamma = \{\varphi A : A \in \Gamma\}$ für die von φ erfüllten Varianten der Formeln einer Menge Γ . Beachte: $|\varphi\Gamma| = |\Gamma|$.

Definition

Unter einem **Literal** versteht man eine Formel aus $\mathcal{A} \cup \neg\mathcal{A}$.

Jede Belegung φ erfüllt „die Hälfte“ aller Formeln, nämlich immer genau eine der Formeln A und $\neg A$. Die tatsächlich erfüllte Formel bezeichnen wir mit φA . Entsprechend schreiben wir $\varphi\Gamma = \{\varphi A : A \in \Gamma\}$ für die von φ erfüllten Varianten der Formeln einer Menge Γ . Beachte: $|\varphi\Gamma| = |\Gamma|$.

Definition

Unter einem **Literal** versteht man eine Formel aus $\mathcal{A} \cup \neg\mathcal{A}$.

Beobachtung

Für jede Belegung φ ist $\varphi\mathcal{A}$ eine **maximale erfüllbare Literalmenge**, denn jedes Atom p oder seine Negation gehört zu $\varphi\mathcal{A}$, aber nicht beide.

Jede Belegung φ erfüllt „die Hälfte“ aller Formeln, nämlich immer genau eine der Formeln A und $\neg A$. Die tatsächlich erfüllte Formel bezeichnen wir mit φA . Entsprechend schreiben wir $\varphi\Gamma = \{\varphi A : A \in \Gamma\}$ für die von φ erfüllten Varianten der Formeln einer Menge Γ . Beachte: $|\varphi\Gamma| = |\Gamma|$.

Definition

Unter einem **Literal** versteht man eine Formel aus $\mathcal{A} \cup \neg\mathcal{A}$.

Beobachtung

Für jede Belegung φ ist $\varphi\mathcal{A}$ eine **maximale erfüllbare Literalmenge**, denn jedes Atom p oder seine Negation gehört zu $\varphi\mathcal{A}$, aber nicht beide.

Umgekehrt bestimmt jede maximale erfüllbare Literalmenge \mathcal{L} genau eine sie erfüllende Belegung $\varphi_{\mathcal{L}}$:

$$\varphi_{\mathcal{L}}(p) = \begin{cases} 1 & \text{falls } p \in \mathcal{L} \\ 0 & \text{falls } \neg p \in \mathcal{L} \end{cases}$$

Beweis (KPS, Hinlänglichkeit).

\mathcal{A} sei abzählbar^a unendlich und Γ endlich erfüllbar.

Beweis (KPS, Hinlänglichkeit).

\mathcal{A} sei abzählbar^a unendlich und Γ endlich erfüllbar.

Ziel: Finde eine maximale erfüllbare Literalmenge \mathcal{L}_* , so dass $\Gamma \cup \mathcal{L}_*$ endlich erfüllbar ist, denn die zugehörige Belegung φ_* erfüllt dann auch Γ :

Beweis (KPS, Hinlänglichkeit).

\mathcal{A} sei abzählbar^a unendlich und Γ endlich erfüllbar.

Ziel: Finde eine maximale erfüllbare Literalmenge \mathcal{L}_* , so dass $\Gamma \cup \mathcal{L}_*$ endlich erfüllbar ist, denn die zugehörige Belegung φ_* erfüllt dann auch Γ :

Ist \mathcal{A}_B die endliche Atom-Menge von $B \in \Gamma$, so hat

$\{B\} \cup \varphi_* \mathcal{A}_B \subseteq \Gamma \cup \mathcal{L}_*$ eine erfüllende Belegung φ_B , und diese stimmt auf \mathcal{A}_B mit φ_* überein, folglich auch auf B , also gilt $\hat{\varphi}_*(B) = 1$.

Beweis (KPS, Hinlänglichkeit).

\mathcal{A} sei abzählbar^a unendlich und Γ endlich erfüllbar.

Ziel: Finde eine maximale erfüllbare Literalmenge \mathcal{L}_* , so dass $\Gamma \cup \mathcal{L}_*$ endlich erfüllbar ist, denn die zugehörige Belegung φ_* erfüllt dann auch Γ :

Ist \mathcal{A}_B die endliche Atom-Menge von $B \in \Gamma$, so hat

$\{B\} \cup \varphi_* \mathcal{A}_B \subseteq \Gamma \cup \mathcal{L}_*$ eine erfüllende Belegung φ_B , und diese stimmt auf \mathcal{A}_B mit φ_* überein, folglich auch auf B , also gilt $\hat{\varphi}_*(B) = 1$.

Konstruktion von \mathcal{L}_* : Für eine Aufzählung p_i , $i \in \mathbb{N}$, von \mathcal{A} setze

$$\mathcal{L}_0 = \emptyset \quad , \quad \mathcal{L}_{n+1} = \begin{cases} \mathcal{L}_n \cup \{p_n\} & \text{falls } \Gamma \cup \mathcal{L}_n \cup \{p_n\} \text{ endlich erfüllbar} \\ \mathcal{L}_n \cup \{\neg p_n\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis (KPS, Hinlänglichkeit).

\mathcal{A} sei abzählbar^a unendlich und Γ endlich erfüllbar.

Ziel: Finde eine maximale erfüllbare Literalmenge \mathcal{L}_* , so dass $\Gamma \cup \mathcal{L}_*$ endlich erfüllbar ist, denn die zugehörige Belegung φ_* erfüllt dann auch Γ :

Ist \mathcal{A}_B die endliche Atom-Menge von $B \in \Gamma$, so hat

$\{B\} \cup \varphi_* \mathcal{A}_B \subseteq \Gamma \cup \mathcal{L}_*$ eine erfüllende Belegung φ_B , und diese stimmt auf \mathcal{A}_B mit φ_* überein, folglich auch auf B , also gilt $\hat{\varphi}_*(B) = 1$.

Konstruktion von \mathcal{L}_* : Für eine Aufzählung p_i , $i \in \mathbb{N}$, von \mathcal{A} setze

$$\mathcal{L}_0 = \emptyset \quad , \quad \mathcal{L}_{n+1} = \begin{cases} \mathcal{L}_n \cup \{p_n\} & \text{falls } \Gamma \cup \mathcal{L}_n \cup \{p_n\} \text{ endlich erfüllbar} \\ \mathcal{L}_n \cup \{\neg p_n\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Wegen des Lemmas ist jede der Mengen $\Gamma \cup \mathcal{L}_n$ endlich erfüllbar.

Beweis (KPS, Hinlänglichkeit).

\mathcal{A} sei abzählbar^a unendlich und Γ endlich erfüllbar.

Ziel: Finde eine maximale erfüllbare Literalmenge \mathcal{L}_* , so dass $\Gamma \cup \mathcal{L}_*$ endlich erfüllbar ist, denn die zugehörige Belegung φ_* erfüllt dann auch Γ :

Ist \mathcal{A}_B die endliche Atom-Menge von $B \in \Gamma$, so hat

$\{B\} \cup \varphi_* \mathcal{A}_B \subseteq \Gamma \cup \mathcal{L}_*$ eine erfüllende Belegung φ_B , und diese stimmt auf \mathcal{A}_B mit φ_* überein, folglich auch auf B , also gilt $\hat{\varphi}_*(B) = 1$.

Konstruktion von \mathcal{L}_* : Für eine Aufzählung p_i , $i \in \mathbb{N}$, von \mathcal{A} setze

$$\mathcal{L}_0 = \emptyset \quad , \quad \mathcal{L}_{n+1} = \begin{cases} \mathcal{L}_n \cup \{p_n\} & \text{falls } \Gamma \cup \mathcal{L}_n \cup \{p_n\} \text{ endlich erfüllbar} \\ \mathcal{L}_n \cup \{\neg p_n\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Wegen des Lemmas ist jede der Mengen $\Gamma \cup \mathcal{L}_n$ endlich erfüllbar. Dasselbe gilt für $\mathcal{L}_* = \bigcup \{ \mathcal{L}_n : n \in \mathbb{N} \}$, da jede endliche Teilmenge bereits in einem \mathcal{L}_k und das Atom p_n in \mathcal{L}_{n+1} enthalten ist. \square

^a Im überabzählbaren Fall braucht man eine transfinite Konstruktion für \mathcal{L}_* .

Die kanonische Ordnung und Äquivalenz auf $\mathcal{F}[A]$

Lemma

Eine kanonische Quasi-Ordnung $B \sqsubseteq A$ auf $\mathcal{F}[A]$ wird durch

$$\begin{aligned} \{B\} \models A & \text{ gdw. } \hat{\varphi}(B) = 1 \text{ impliziert } \hat{\varphi}(A) = 1 \text{ für alle } \varphi \in \mathbb{B}^A \\ & \text{ gdw. } \hat{\varphi}(B) \leq \hat{\varphi}(A) \text{ für alle } \varphi \in \mathbb{B}^A \\ & \text{ gdw. } \hat{\varphi}(B \rightarrow A) = 1 \text{ für alle } \varphi \in \mathbb{B}^A \end{aligned}$$

definiert. Wir betrachten sie als **Externalisierung** des Junktors \rightarrow . □

Die kanonische Ordnung und Äquivalenz auf $\mathcal{F}[A]$

Lemma

Eine kanonische Quasi-Ordnung $B \sqsubseteq A$ auf $\mathcal{F}[A]$ wird durch

$$\begin{aligned} \{B\} \models A & \text{ gdw. } \hat{\varphi}(B) = 1 \text{ impliziert } \hat{\varphi}(A) = 1 \text{ für alle } \varphi \in \mathbb{B}^A \\ & \text{ gdw. } \hat{\varphi}(B) \leq \hat{\varphi}(A) \text{ für alle } \varphi \in \mathbb{B}^A \\ & \text{ gdw. } \hat{\varphi}(B \rightarrow A) = 1 \text{ für alle } \varphi \in \mathbb{B}^A \end{aligned}$$

definiert. Wir betrachten sie als **Externalisierung** des Junktors \rightarrow . □

Definition

\models sei die von \sqsubseteq induzierte ÄR, die **Externalisierung** des Junktors \leftrightarrow .

Die kanonische Ordnung und Äquivalenz auf $\mathcal{F}[A]$

Lemma

Eine kanonische Quasi-Ordnung $B \sqsubseteq A$ auf $\mathcal{F}[A]$ wird durch

$$\begin{aligned} \{B\} \models A \quad \text{gdw.} \quad \hat{\varphi}(B) = 1 \quad \text{impliziert} \quad \hat{\varphi}(A) = 1 \quad \text{für alle} \quad \varphi \in \mathbb{B}^A \\ \text{gdw.} \quad \hat{\varphi}(B) \leq \hat{\varphi}(A) \quad \text{für alle} \quad \varphi \in \mathbb{B}^A \\ \text{gdw.} \quad \hat{\varphi}(B \rightarrow A) = 1 \quad \text{für alle} \quad \varphi \in \mathbb{B}^A \end{aligned}$$

definiert. Wir betrachten sie als **Externalisierung** des Junktors \rightarrow . □

Definition

\models sei die von \sqsubseteq induzierte ÄR, die **Externalisierung** des Junktors \leftrightarrow .

Die kanonische Quasi-Ordnung auf $\mathcal{F}[A]$ mit \models zu bezeichnen kann Missverständnisse begünstigen. Wir wenden \models nie auf Formelmengen an.

Die \mathcal{J} -Algebra der $\mathcal{F}[\mathcal{A}]$ -Äquivalenzklassen

Semantisch interessieren uns nur noch **Formeln modulo \equiv** , also die \mathcal{J} -Algebra $\mathcal{F}[\mathcal{A}]/\equiv$ der Äquivalenzklassen.

Die \mathcal{J} -Algebra der $\mathcal{F}[\mathcal{A}]$ -Äquivalenzklassen

Semantisch interessieren uns nur noch **Formeln modulo \equiv** , also die \mathcal{J} -Algebra $\mathcal{F}[\mathcal{A}]/\equiv$ der Äquivalenzklassen.

Aber warum bilden die Ä-Klassen überhaupt eine \mathcal{J} -Algebra?

Die \mathcal{J} -Algebra der $\mathcal{F}[\mathcal{A}]$ -Äquivalenzklassen

Semantisch interessieren uns nur noch **Formeln modulo \equiv** , also die \mathcal{J} -Algebra $\mathcal{F}[\mathcal{A}]/\equiv$ der Äquivalenzklassen.

Aber warum bilden die Ä-Klassen überhaupt eine \mathcal{J} -Algebra?

Satz

\equiv ist eine Kongruenzrelation, d.h., aus $A \equiv B$ und $C \equiv D$ folgt

Die \mathcal{J} -Algebra der $\mathcal{F}[\mathcal{A}]$ -Äquivalenzklassen

Semantisch interessieren uns nur noch **Formeln modulo \equiv** , also die \mathcal{J} -Algebra $\mathcal{F}[\mathcal{A}]/\equiv$ der Äquivalenzklassen.

Aber warum bilden die Ä-Klassen überhaupt eine \mathcal{J} -Algebra?

Satz

\equiv ist eine Kongruenzrelation, d.h., aus $A \equiv B$ und $C \equiv D$ folgt

- $\neg A \equiv \neg B$;

Beweis.

In den HA war untersucht worden, wie sich die kanonischen Operationen auf $\mathcal{F}[\mathcal{A}]$ mit der kanonischen Ordnung vertragen. Exemplarisch: wenn $A \sqsubseteq B$ und $C \sqsubseteq D$, dann auch $A \wedge C \sqsubseteq B \wedge D$. Nach Voraussetzung gilt aber auch $A \sqsupseteq B$ und $C \sqsupseteq D$, also $A \wedge C \sqsupseteq B \wedge D$, d.h., $A \wedge C \equiv B \wedge D$. \square

Die \mathcal{J} -Algebra der $\mathcal{F}[\mathcal{A}]$ -Äquivalenzklassen

Semantisch interessieren uns nur noch **Formeln modulo \equiv** , also die \mathcal{J} -Algebra $\mathcal{F}[\mathcal{A}]/\equiv$ der Äquivalenzklassen.

Aber warum bilden die Ä-Klassen überhaupt eine \mathcal{J} -Algebra?

Satz

\equiv ist eine Kongruenzrelation, d.h., aus $A \equiv B$ und $C \equiv D$ folgt

- $\neg A \equiv \neg B$;
- $A \star C \equiv B \star D$

Beweis.

In den HA war untersucht worden, wie sich die kanonischen Operationen auf $\mathcal{F}[\mathcal{A}]$ mit der kanonischen Ordnung vertragen. Exemplarisch: wenn $A \sqsubseteq B$ und $C \sqsubseteq D$, dann auch $A \wedge C \sqsubseteq B \wedge D$. Nach Voraussetzung gilt aber auch $A \sqsupseteq B$ und $C \sqsupseteq D$, also $A \wedge C \sqsupseteq B \wedge D$, d.h., $A \wedge C \equiv B \wedge D$. \square

Folgende Rechenregeln reflektieren das Verhalten der kanonischen Interpretation der Junktoren in \mathbb{B} , siehe Folien 18, 19.

Man kann sie leicht mittels Wahrheitstabellen nachweisen:

Folgende Rechenregeln reflektieren das Verhalten der kanonischen Interpretation der Junktoren in \mathbb{B} , siehe Folien 18, 19.

Man kann sie leicht mittels Wahrheitstabellen nachweisen:

Satz (HA)

Folgende Rechenregeln reflektieren das Verhalten der kanonischen Interpretation der Junktoren in \mathbb{B} , siehe Folien 18, 19.

Man kann sie leicht mittels Wahrheitstabellen nachweisen:

Satz (HA)

- \neg ist *selbstinvers*, d.h., $\neg\neg A \vDash A$.

Folgende Rechenregeln reflektieren das Verhalten der kanonischen Interpretation der Junktoren in \mathbb{B} , siehe Folien 18, 19.

Man kann sie leicht mittels Wahrheitstabellen nachweisen:

Satz (HA)

- \neg ist *selbstinvers*, d.h., $\neg\neg A \vDash A$.
- \wedge und \vee sind

Folgende Rechenregeln reflektieren das Verhalten der kanonischen Interpretation der Junktoren in \mathbb{B} , siehe Folien 18, 19.

Man kann sie leicht mittels Wahrheitstabellen nachweisen:

Satz (HA)

- \neg ist *selbstinvers*, d.h., $\neg\neg A \vDash A$.
- \wedge und \vee sind
 - *idempotent*, d.h., $A \wedge A \vDash A \vDash A \vee A$.

Folgende Rechenregeln reflektieren das Verhalten der kanonischen Interpretation der Junktoren in \mathbb{B} , siehe Folien 18, 19.

Man kann sie leicht mittels Wahrheitstabellen nachweisen:

Satz (HA)

- \neg ist *selbstinvers*, d.h., $\neg\neg A \vDash A$.
- \wedge und \vee sind
 - *idempotent*, d.h., $A \wedge A \vDash A \vDash A \vee A$.
 - *assoziativ*, d.h., $(A \star B) \star C \vDash A \star B \star C$ für $\star \in \{\wedge, \vee\}$.

Folgende Rechenregeln reflektieren das Verhalten der kanonischen Interpretation der Junktoren in \mathbb{B} , siehe Folien 18, 19.

Man kann sie leicht mittels Wahrheitstabellen nachweisen:

Satz (HA)

- \neg ist *selbstinvers*, d.h., $\neg\neg A \vDash A$.
- \wedge und \vee sind
 - *idempotent*, d.h., $A \wedge A \vDash A \vDash A \vee A$.
 - *assoziativ*, d.h., $(A \star B) \star C \vDash A \star B \star C$ für $\star \in \{\wedge, \vee\}$.
 - *kommutativ*, d.h., $A \star B \vDash B \star A$ für $\star \in \{\wedge, \vee\}$.

Folgende Rechenregeln reflektieren das Verhalten der kanonischen Interpretation der Junktoren in \mathbb{B} , siehe Folien 18, 19.

Man kann sie leicht mittels Wahrheitstabellen nachweisen:

Satz (HA)

- \neg ist *selbstinvers*, d.h., $\neg\neg A \vDash A$.
- \wedge und \vee sind
 - *idempotent*, d.h., $A \wedge A \vDash A \vDash A \vee A$.
 - *assoziativ*, d.h., $(A \star B) \star C \vDash A \star B \star C$ für $\star \in \{\wedge, \vee\}$.
 - *kommutativ*, d.h., $A \star B \vDash B \star A$ für $\star \in \{\wedge, \vee\}$.
 - mit *neutralem Element* \top bzw. \perp , d.h., $A \wedge \top \vDash A \vDash A \vee \perp$.

Folgende Rechenregeln reflektieren das Verhalten der kanonischen Interpretation der Junktoren in \mathbb{B} , siehe Folien 18, 19.

Man kann sie leicht mittels Wahrheitstabellen nachweisen:

Satz (HA)

- \neg ist *selbstinvers*, d.h., $\neg\neg A \vDash A$.
- \wedge und \vee sind
 - *idempotent*, d.h., $A \wedge A \vDash A \vDash A \vee A$.
 - *assoziativ*, d.h., $(A \star B) \star C \vDash A \star B \star C$ für $\star \in \{\wedge, \vee\}$.
 - *kommutativ*, d.h., $A \star B \vDash B \star A$ für $\star \in \{\wedge, \vee\}$.
 - mit *neutralem Element* \top bzw. \perp , d.h., $A \wedge \top \vDash A \vDash A \vee \perp$.
- \perp und \top sind *absorbierend* bzgl. \wedge bzw. \vee , d.h., $A \wedge \perp \vDash \perp$ und $A \vee \top \vDash \top$.

Folgende Rechenregeln reflektieren das Verhalten der kanonischen Interpretation der Junktoren in \mathbb{B} , siehe Folien 18, 19.

Man kann sie leicht mittels Wahrheitstabellen nachweisen:

Satz (HA)

- \neg ist *selbstinvers*, d.h., $\neg\neg A \vDash A$.
- \wedge und \vee sind
 - *idempotent*, d.h., $A \wedge A \vDash A \vDash A \vee A$.
 - *assoziativ*, d.h., $(A \star B) \star C \vDash A \star B \star C$ für $\star \in \{\wedge, \vee\}$.
 - *kommutativ*, d.h., $A \star B \vDash B \star A$ für $\star \in \{\wedge, \vee\}$.
 - mit *neutralem Element* \top bzw. \perp , d.h., $A \wedge \top \vDash A \vDash A \vee \perp$.
- \perp und \top sind *absorbierend* bzgl. \wedge bzw. \vee , d.h., $A \wedge \perp \vDash \perp$ und $A \vee \top \vDash \top$.
- es gelten die *Absorptionsregeln*

$$A \wedge (A \vee B) \vDash A \quad \text{und} \quad A \vee (A \wedge B) \vDash A$$



Notationelle Konvention + weitere Rechenregeln

Die Assoziativität von \wedge und \vee rechtfertigt folgende Schreibweise:

Notationelle Konvention + weitere Rechenregeln

Die Assoziativität von \wedge und \vee rechtfertigt folgende Schreibweise:

Notation

$$\bigwedge_{i < 0} A_i := \top, \quad \bigwedge_{i < n+1} A_i := \left(\bigwedge_{i < n} A_i \right) \wedge A_n, \quad \text{und dual mit } \bigvee \text{ für } \vee$$

Notationelle Konvention + weitere Rechenregeln

Die Assoziativität von \wedge und \vee rechtfertigt folgende Schreibweise:

Notation

$$\bigwedge_{i < 0} A_i := \top, \quad \bigwedge_{i < n+1} A_i := \left(\bigwedge_{i < n} A_i \right) \wedge A_n, \quad \text{und dual mit } \bigvee \text{ für } \vee$$

Satz (HA)

Notationelle Konvention + weitere Rechenregeln

Die Assoziativität von \wedge und \vee rechtfertigt folgende Schreibweise:

Notation

$$\bigwedge_{i<0} A_i := \top, \quad \bigwedge_{i<n+1} A_i := \left(\bigwedge_{i<n} A_i \right) \wedge A_n, \quad \text{und dual mit } \bigvee \text{ für } \vee$$

Satz (HA)

① Es gelten die *De Morgan'schen Regeln*:

$$\neg \bigwedge_{i<n} A_i \equiv \bigvee_{i<n} \neg A_i \quad \text{sowie} \quad \neg \bigvee_{i<n} A_i \equiv \bigwedge_{i<n} \neg A_i$$

Notationelle Konvention + weitere Rechenregeln

Die Assoziativität von \wedge und \vee rechtfertigt folgende Schreibweise:

Notation

$$\bigwedge_{i<0} A_i := \top, \quad \bigwedge_{i<n+1} A_i := \left(\bigwedge_{i<n} A_i \right) \wedge A_n, \quad \text{und dual mit } \bigvee \text{ für } \vee$$

Satz (HA)

- ① Es gelten die *De Morgan'schen Regeln*:

$$\neg \bigwedge_{i<n} A_i \equiv \bigvee_{i<n} \neg A_i \quad \text{sowie} \quad \neg \bigvee_{i<n} A_i \equiv \bigwedge_{i<n} \neg A_i$$

- ② Es gelten die *Distributivgesetze*:

$$A \wedge \bigvee_{i<n} B_i \equiv \bigvee_{i<n} (A \wedge B_i) \quad \text{sowie} \quad A \vee \bigwedge_{i<n} B_i \equiv \bigwedge_{i<n} (A \vee B_i)$$

Funktional vollständige Junktorenmengen

Im Hinblick auf die Wahrheitstabellen 19 stellen wir fest, dass es 2^{2^n} n -stellige Boole'sche Funktionen 20 gibt.

Funktional vollständige Junktorenmengen

Im Hinblick auf die Wahrheitstabellen 19 stellen wir fest, dass es 2^{2^n} n -stellige Boole'sche Funktionen 20 gibt.

Wie die De Morganschen Regeln zeigen, sind die durch \mathcal{J} spezifizierten Funktionen redundant: neben \vee können z.B. auch \rightarrow und \leftrightarrow eliminiert werden, ohne die Ausdrucksfähigkeit zu mindern.

Funktional vollständige Junktorenmengen

Im Hinblick auf die Wahrheitstabellen 19 stellen wir fest, dass es 2^{2^n} n -stellige Boole'sche Funktionen 20 gibt.

Wie die De Morganschen Regeln zeigen, sind die durch \mathcal{J} spezifizierten Funktionen redundant: neben \vee können z.B. auch \rightarrow und \leftrightarrow eliminiert werden, ohne die Ausdrucksfähigkeit zu mindern.

Definition

Eine Menge \mathcal{I} von Junktorsymbolen mit vorgegebener Semantik (= Wahrheitstabelle) heißt **funktional vollständig**, falls jede Boole'sche Funktion $\mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$ als f_A für geeignetes $A \in \mathbf{Term}(\mathcal{K}, \mathcal{A})$ dargestellt werden kann.

Funktional vollständige Junktoren Mengen

Im Hinblick auf die Wahrheitstabellen 19 stellen wir fest, dass es 2^{2^n} n -stellige Boole'sche Funktionen 20 gibt.

Wie die De Morganschen Regeln zeigen, sind die durch \mathcal{J} spezifizierten Funktionen redundant: neben \vee können z.B. auch \rightarrow und \leftrightarrow eliminiert werden, ohne die Ausdrucksfähigkeit zu mindern.

Definition

Eine Menge \mathcal{I} von Junktorsymbolen mit vorgegebener Semantik (= Wahrheitstabelle) heißt **funktional vollständig**, falls jede Boole'sche Funktion $\mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$ als f_A für geeignetes $A \in \mathbf{Term}(\mathcal{K}, \mathcal{A})$ dargestellt werden kann.

Satz (HA)

\mathcal{J} ist funktional vollständig.

Funktional vollständige Junktorenmengen

Im Hinblick auf die Wahrheitstabellen 19 stellen wir fest, dass es 2^{2^n} n -stellige Boole'sche Funktionen 20 gibt.

Wie die De Morganschen Regeln zeigen, sind die durch \mathcal{J} spezifizierten Funktionen redundant: neben \vee können z.B. auch \rightarrow und \leftrightarrow eliminiert werden, ohne die Ausdrucksfähigkeit zu mindern.

Definition

Eine Menge \mathcal{I} von Junktorsymbolen mit vorgegebener Semantik (= Wahrheitstabelle) heißt **funktional vollständig**, falls jede Boole'sche Funktion $\mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$ als f_A für geeignetes $A \in \mathbf{Term}(\mathcal{K}, \mathcal{A})$ dargestellt werden kann.

Satz (HA)

\mathcal{J} ist funktional vollständig.

Ist \mathcal{I} funktional vollständig, so auch jede Junktor-Menge \mathcal{I}' , deren Junktoren alle Junktoren aus \mathcal{I} simulieren können.

Post'scher Vollständigkeitssatz

Für $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$ endlich heißt $A \in \mathcal{F}[\mathcal{A}_0]$

Post'scher Vollständigkeitssatz

Für $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$ endlich heißt $A \in \mathcal{F}[\mathcal{A}_0]$

- \perp / \top -erhaltend, falls $\hat{\varphi}(A) = 0/1$ für jede Belegung φ , die auf \mathcal{A}_0 den Wert 0/1 annimmt;

Post'scher Vollständigkeitssatz

Für $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$ endlich heißt $A \in \mathcal{F}[\mathcal{A}_0]$

- **\perp / \top -erhaltend**, falls $\hat{\varphi}(A) = 0/1$ für jede Belegung φ , die auf \mathcal{A}_0 den Wert 0/1 annimmt;
- **monoton**, falls $\hat{\varphi}(A) \leq \hat{\psi}(A)$ für alle Belegungen φ und ψ , die $\varphi(p) \leq \psi(p)$ für alle $p \in \mathcal{A}_0$ erfüllen;

Post'scher Vollständigkeitssatz

Für $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$ endlich heißt $A \in \mathcal{F}[\mathcal{A}_0]$

- **\perp / \top -erhaltend**, falls $\hat{\varphi}(A) = 0/1$ für jede Belegung φ , die auf \mathcal{A}_0 den Wert 0/1 annimmt;
- **monoton**, falls $\hat{\varphi}(A) \leq \hat{\psi}(A)$ für alle Belegungen φ und ψ , die $\varphi(p) \leq \psi(p)$ für alle $p \in \mathcal{A}_0$ erfüllen;
- **linear**, falls für jedes Atom $p \in \mathcal{A}_0$ und jede Belegung φ

Post'scher Vollständigkeitssatz

Für $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$ endlich heißt $A \in \mathcal{F}[\mathcal{A}_0]$

- **\perp / \top -erhaltend**, falls $\hat{\varphi}(A) = 0/1$ für jede Belegung φ , die auf \mathcal{A}_0 den Wert 0/1 annimmt;
- **monoton**, falls $\hat{\varphi}(A) \leq \hat{\psi}(A)$ für alle Belegungen φ und ψ , die $\varphi(p) \leq \psi(p)$ für alle $p \in \mathcal{A}_0$ erfüllen;
- **linear**, falls für jedes Atom $p \in \mathcal{A}_0$ und jede Belegung φ
 - entweder $\hat{\varphi}(A[p/\neg p]) = \hat{\varphi}(A)$ (dann heißt p **Dummy-Variable**);

Post'scher Vollständigkeitssatz

Für $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$ endlich heißt $A \in \mathcal{F}[\mathcal{A}_0]$

- **\perp / \top -erhaltend**, falls $\hat{\varphi}(A) = 0/1$ für jede Belegung φ , die auf \mathcal{A}_0 den Wert 0/1 annimmt;
- **monoton**, falls $\hat{\varphi}(A) \leq \hat{\psi}(A)$ für alle Belegungen φ und ψ , die $\varphi(p) \leq \psi(p)$ für alle $p \in \mathcal{A}_0$ erfüllen;
- **linear**, falls für jedes Atom $p \in \mathcal{A}_0$ und jede Belegung φ
 - entweder $\hat{\varphi}(A[p/\neg p]) = \hat{\varphi}(A)$ (dann heißt p **Dummy-Variable**);
 - oder $\hat{\varphi}(A[p/\neg p]) = 1 - \hat{\varphi}(A)$,

Post'scher Vollständigkeitssatz

Für $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$ endlich heißt $A \in \mathcal{F}[\mathcal{A}_0]$

- **\perp / \top -erhaltend**, falls $\hat{\varphi}(A) = 0/1$ für jede Belegung φ , die auf \mathcal{A}_0 den Wert 0/1 annimmt;
- **monoton**, falls $\hat{\varphi}(A) \leq \hat{\psi}(A)$ für alle Belegungen φ und ψ , die $\varphi(p) \leq \psi(p)$ für alle $p \in \mathcal{A}_0$ erfüllen;
- **linear**, falls für jedes Atom $p \in \mathcal{A}_0$ und jede Belegung φ
 - entweder $\hat{\varphi}(A[p/\neg p]) = \hat{\varphi}(A)$ (dann heißt p **Dummy-Variable**);
 - oder $\hat{\varphi}(A[p/\neg p]) = 1 - \hat{\varphi}(A)$,
- **selbst-dual**, falls $\hat{\varphi}(A) = 1 - \hat{\varphi}(A[p/\neg p : p \in \mathcal{A}_0])$ für jede Belegung φ .

Post'scher Vollständigkeitsatz

Für $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$ endlich heißt $A \in \mathcal{F}[\mathcal{A}_0]$

- **\perp / \top -erhaltend**, falls $\hat{\varphi}(A) = 0/1$ für jede Belegung φ , die auf \mathcal{A}_0 den Wert 0/1 annimmt;
- **monoton**, falls $\hat{\varphi}(A) \leq \hat{\psi}(A)$ für alle Belegungen φ und ψ , die $\varphi(p) \leq \psi(p)$ für alle $p \in \mathcal{A}_0$ erfüllen;
- **linear**, falls für jedes Atom $p \in \mathcal{A}_0$ und jede Belegung φ
 - entweder $\hat{\varphi}(A[p/\neg p]) = \hat{\varphi}(A)$ (dann heißt p **Dummy-Variable**);
 - oder $\hat{\varphi}(A[p/\neg p]) = 1 - \hat{\varphi}(A)$,
- **selbst-dual**, falls $\hat{\varphi}(A) = 1 - \hat{\varphi}(A[p/\neg p : p \in \mathcal{A}_0])$ für jede Belegung φ .

Satz (Post'scher Vollständigkeitsatz)

Eine Junktormenge \mathcal{K} ist vollständig, wenn **Term**(\mathcal{K}, \mathcal{A}) je eine Formel enthält, die eine der obigen Eigenschaften **nicht** hat. □

Kapitel 3

Deduktion allgemein

Wozu Deduktion?

Bisher konnten wir die Erfüllbarkeit einer Formel oder einer Formelmenge nur mit semantischen Mitteln überprüfen. Wegen $\Gamma \models A$ gdw. $\Gamma \cup \{\neg A\}$ unerfüllbar schließt das den Nachweis korrekter Schlussfolgerungen mit ein.

Wozu Deduktion?

Bisher konnten wir die Erfüllbarkeit einer Formel oder einer Formelmenge nur mit semantischen Mitteln überprüfen. Wegen $\Gamma \models A$ gdw. $\Gamma \cup \{\neg A\}$ unerfüllbar schließt das den Nachweis korrekter Schlussfolgerungen mit ein.

Mit wachsender Atom-Zahl nimmt der Aufwand, Wahrheitstabellen zu erstellen, exponentiell zu, stößt also bald an Grenzen.

Wozu Deduktion?

Bisher konnten wir die Erfüllbarkeit einer Formel oder einer Formelmenge nur mit semantischen Mitteln überprüfen. Wegen $\Gamma \models A$ gdw. $\Gamma \cup \{\neg A\}$ unerfüllbar schließt das den Nachweis korrekter Schlussfolgerungen mit ein.

Mit wachsender Atom-Zahl nimmt der Aufwand, Wahrheitstabellen zu erstellen, exponentiell zu, stößt also bald an Grenzen.

Nach hinreichend vielen Beispielen wird man aber feststellen, dass man bestimmte korrekte Schlüsse allein anhand der Form, also der Syntax, ihrer Prämissen und der Schlussfolgerung erkennen und so den Aufwand einer semantischen Überprüfung vermeiden kann. Auf diese Weise erhält man verschiedene sog. **deduktive Systeme**.

Wozu Deduktion?

Bisher konnten wir die Erfüllbarkeit einer Formel oder einer Formelmenge nur mit semantischen Mitteln überprüfen. Wegen $\Gamma \models A$ gdw. $\Gamma \cup \{\neg A\}$ unerfüllbar schließt das den Nachweis korrekter Schlussfolgerungen mit ein.

Mit wachsender Atom-Zahl nimmt der Aufwand, Wahrheitstabellen zu erstellen, exponentiell zu, stößt also bald an Grenzen.

Nach hinreichend vielen Beispielen wird man aber feststellen, dass man bestimmte korrekte Schlüsse allein anhand der Form, also der Syntax, ihrer Prämissen und der Schlussfolgerung erkennen und so den Aufwand einer semantischen Überprüfung vermeiden kann. Auf diese Weise erhält man verschiedene sog. **deduktive Systeme**.

Idealerweise sollten die logische Folgerrelation \models mit der Herleitungsrelation \vdash eines deduktiven Systems übereinstimmen.

Wozu Deduktion?

Bisher konnten wir die Erfüllbarkeit einer Formel oder einer Formelmenge nur mit semantischen Mitteln überprüfen. Wegen $\Gamma \models A$ gdw. $\Gamma \cup \{\neg A\}$ unerfüllbar schließt das den Nachweis korrekter Schlussfolgerungen mit ein.

Mit wachsender Atom-Zahl nimmt der Aufwand, Wahrheitstabellen zu erstellen, exponentiell zu, stößt also bald an Grenzen.

Nach hinreichend vielen Beispielen wird man aber feststellen, dass man bestimmte korrekte Schlüsse allein anhand der Form, also der Syntax, ihrer Prämissen und der Schlussfolgerung erkennen und so den Aufwand einer semantischen Überprüfung vermeiden kann. Auf diese Weise erhält man verschiedene sog. **deduktive Systeme**.

Idealerweise sollten die logische Folgerrelation \models mit der Herleitungsrelation \vdash eines deduktiven Systems übereinstimmen.

Deduktive Systeme sind aber nicht auf den Bereich der Logik beschränkt.

Schlussregeln und Theoreme

Definition

Ein **deduktives System** $\mathcal{K} = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$ (\mathcal{K} für **Kalkül**) besteht aus

Schlussregeln und Theoreme

Definition

Ein **deduktives System** $\mathcal{K} = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$ (\mathcal{K} für **Kalkül**) besteht aus

- einer Menge \mathcal{F} von sog. **Formeln**;

Schlussregeln und Theoreme

Definition

Ein **deduktives System** $\mathcal{K} = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$ (\mathcal{K} für **Kalkül**) besteht aus

- einer Menge \mathcal{F} von sog. **Formeln**;
- einer Menge $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{F}^* \times \mathcal{F}$ sog. **Schlussregeln**, oder kurz **Regeln**.

Schlussregeln und Theoreme

Definition

Ein **deduktives System** $\mathcal{K} = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$ (\mathcal{K} für **Kalkül**) besteht aus

- einer Menge \mathcal{F} von sog. **Formeln**;
- einer Menge $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{F}^* \times \mathcal{F}$ sog. **Schlussregeln**, oder kurz **Regeln**.

Alternative Schreibweise für Regeln (mit **Prämissen** A_i und **Konklusion** B):

$$\frac{A_0, A_1, \dots, A_{k-1}}{B} \quad \text{anstatt} \quad \langle A_0, A_1, \dots, A_{k-1}; B \rangle \in \mathcal{R}$$

Schlussregeln und Theoreme

Definition

Ein **deduktives System** $\mathcal{K} = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$ (\mathcal{K} für **Kalkül**) besteht aus

- einer Menge \mathcal{F} von sog. **Formeln**;
- einer Menge $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{F}^* \times \mathcal{F}$ sog. **Schlussregeln**, oder kurz **Regeln**.

Alternative Schreibweise für Regeln (mit **Prämissen** A_i und **Konklusion** B):

$$\frac{A_0, A_1, \dots, A_{k-1}}{B} \quad \text{anstatt} \quad \langle A_0, A_1, \dots, A_{k-1}; B \rangle \in \mathcal{R}$$

Die Menge **Ax**(\mathcal{K}) der **Axiome** besteht aus den Konklusionen von Regeln ohne Prämissen, also mit $k = 0$. Ihr Abschluss unter den Regeln bildet die Menge **Thm**(\mathcal{K}) der **Theoreme**.

Schlussregeln und Theoreme

Definition

Ein **deduktives System** $\mathcal{K} = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$ (\mathcal{K} für **Kalkül**) besteht aus

- einer Menge \mathcal{F} von sog. **Formeln**;
- einer Menge $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{F}^* \times \mathcal{F}$ sog. **Schlussregeln**, oder kurz **Regeln**.

Alternative Schreibweise für Regeln (mit **Prämissen** A_i und **Konklusion** B):

$$\frac{A_0, A_1, \dots, A_{k-1}}{B} \quad \text{anstatt} \quad \langle A_0, A_1, \dots, A_{k-1}; B \rangle \in \mathcal{R}$$

Die Menge **Ax**(\mathcal{K}) der **Axiome** besteht aus den Konklusionen von Regeln ohne Prämissen, also mit $k = 0$. Ihr Abschluss unter den Regeln bildet die Menge **Thm**(\mathcal{K}) der **Theoreme**.

Regeln werden oft in **Schemata** zusammengefasst, mit Formel-Variablen.

Erste Beispiele

Beispiel (Ein deduktives System für partielle Syntax)

Mit der eingeschränkten Junktormenge $\mathcal{J}_0 = \{\neg, \rightarrow\}$ und den Klammern $($ und $)$ das Alphabet $\mathcal{J}_0[\mathcal{A}]$.

Erste Beispiele

Beispiel (Ein deduktives System für partielle Syntax)

Mit der eingeschränkten Junktormenge $\mathcal{J}_0 = \{\neg, \rightarrow\}$ und den Klammern $\langle \langle$ und $\rangle \rangle$ das Alphabet $\mathcal{J}_0[\mathcal{A}]$. Das deduktive System $\mathcal{K}_{\text{syn}} = \langle \mathcal{F}_{\text{syn}}, \mathcal{R}_{\text{syn}} \rangle$ verwendet als Formelmenge ganz $\mathcal{J}_0[\mathcal{A}]^*$ und

Erste Beispiele

Beispiel (Ein deduktives System für partielle Syntax)

Mit der eingeschränkten Junktormenge $\mathcal{J}_0 = \{\neg, \rightarrow\}$ und den Klammern $\langle \langle$ und $\rangle \rangle$ das Alphabet $\mathcal{J}_0[\mathcal{A}]$. Das deduktive System $\mathcal{K}_{\text{syn}} = \langle \mathcal{F}_{\text{syn}}, \mathcal{R}_{\text{syn}} \rangle$ verwendet als Formelmenge ganz $\mathcal{J}_0[\mathcal{A}]^*$ und

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\text{syn}} := & \mathcal{A} \cup \{ \langle A, \neg A \rangle : A \in \mathcal{J}_0[\mathcal{A}]^* \} \\ & \cup \{ \langle A, B; \langle A \rightarrow B \rangle \rangle : A, B \in \mathcal{J}_0[\mathcal{A}]^* \} \end{aligned}$$

Erste Beispiele

Beispiel (Ein deduktives System für partielle Syntax)

Mit der eingeschränkten Junktormenge $\mathcal{J}_0 = \{\neg, \rightarrow\}$ und den Klammern $\langle \langle$ und $\rangle \rangle$ das Alphabet $\mathcal{J}_0[\mathcal{A}]$. Das deduktive System $\mathcal{K}_{\text{syn}} = \langle \mathcal{F}_{\text{syn}}, \mathcal{R}_{\text{syn}} \rangle$ verwendet als Formelmenge ganz $\mathcal{J}_0[\mathcal{A}]^*$ und

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\text{syn}} := & \mathcal{A} \cup \{ \langle A, \neg A \rangle : A \in \mathcal{J}_0[\mathcal{A}]^* \} \\ & \cup \{ \langle A, B; \langle A \rightarrow B \rangle \rangle : A, B \in \mathcal{J}_0[\mathcal{A}]^* \} \end{aligned}$$

oder als Regelschemata mit

$$\frac{}{\overline{v}} \quad (v) \quad (v \in \mathcal{A}) \quad , \quad \frac{A}{\neg A} \quad (\neg) \quad \text{und} \quad \frac{A \quad B}{\langle A \rightarrow B \rangle} \quad (\rightarrow)$$

Erste Beispiele

Beispiel (Ein deduktives System für partielle Syntax)

Mit der eingeschränkten Junktormenge $\mathcal{J}_0 = \{\neg, \rightarrow\}$ und den Klammern $\langle \rangle$ und $\llbracket \rrbracket$ das Alphabet $\mathcal{J}_0[\mathcal{A}]$. Das deduktive System $\mathcal{K}_{\text{syn}} = \langle \mathcal{F}_{\text{syn}}, \mathcal{R}_{\text{syn}} \rangle$ verwendet als Formelmenge ganz $\mathcal{J}_0[\mathcal{A}]^*$ und

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\text{syn}} := & \mathcal{A} \cup \{ \langle A, \neg A \rangle : A \in \mathcal{J}_0[\mathcal{A}]^* \} \\ & \cup \{ \langle A, B; \llbracket A \rightarrow B \rrbracket \rangle : A, B \in \mathcal{J}_0[\mathcal{A}]^* \} \end{aligned}$$

oder als Regelschemata mit

$$\frac{}{\nu} \quad (\nu) \quad (\nu \in \mathcal{A}) \quad , \quad \frac{A}{\neg A} \quad (\neg) \quad \text{und} \quad \frac{A \quad B}{\llbracket A \rightarrow B \rrbracket} \quad (\rightarrow)$$

Die Atome (Elemente aus \mathcal{A}) sind die Axiome, während die Theoreme die aus dem Syntax-Kapitel bekannten Aussageformen, d.h., Formeln in den Junktoren \neg und \rightarrow sind.

Beispiel (Ein deduktives System $\mathcal{K}_{Ar} = \langle \mathcal{F}_{Ar}, \mathcal{R}_{Ar} \rangle$ für die Arithmetik)

Setze $\mathcal{F}_{Ar} := \mathbb{Q}$, die Menge der rationalen Zahlen. \mathcal{R}_{Ar} liefern folgende Schemata

$$\frac{}{1} \quad (1) \quad , \quad \frac{x \quad y}{xy} \quad (\times) \quad \text{und} \quad \frac{x \quad y}{x - y} \quad (-)$$

Hierbei durchlaufen x und y alle rationalen Zahlen. Man mache sich klar, dass die Theoreme genau die ganzen Zahlen sind.

Beispiel (Ein deduktives System $\mathcal{K}_{Ar} = \langle \mathcal{F}_{Ar}, \mathcal{R}_{Ar} \rangle$ für die Arithmetik)

Setze $\mathcal{F}_{Ar} := \mathbb{Q}$, die Menge der rationalen Zahlen. \mathcal{R}_{Ar} liefern folgende Schemata

$$\frac{}{1} \quad (1) \quad , \quad \frac{x \quad y}{xy} \quad (\times) \quad \text{und} \quad \frac{x \quad y}{x - y} \quad (-)$$

Hierbei durchlaufen x und y alle rationalen Zahlen. Man mache sich klar, dass die Theoreme genau die ganzen Zahlen sind. Z.B. -2 erhält man mit

$$\begin{array}{r} \frac{}{1} \quad (1) \quad \frac{}{1} \quad (1) \\ \hline 0 \quad \frac{}{1} \quad (-) \\ \hline -1 \quad \frac{}{1} \quad (-) \quad \frac{}{1} \quad (1) \\ \hline -2 \quad \frac{}{1} \quad (-) \end{array}$$

Beispiel (Ein deduktives System $\mathcal{K}_{Ar} = \langle \mathcal{F}_{Ar}, \mathcal{R}_{Ar} \rangle$ für die Arithmetik)

Setze $\mathcal{F}_{Ar} := \mathbb{Q}$, die Menge der rationalen Zahlen. \mathcal{R}_{Ar} liefern folgende Schemata

$$\frac{}{1} \quad (1) \quad , \quad \frac{x \quad y}{xy} \quad (\times) \quad \text{und} \quad \frac{x \quad y}{x - y} \quad (-)$$

Hierbei durchlaufen x und y alle rationalen Zahlen. Man mache sich klar, dass die Theoreme genau die ganzen Zahlen sind. Z.B. -2 erhält man mit

$$\frac{\frac{}{1} \quad (1) \quad \frac{}{1} \quad (1)}{0} \quad \frac{}{1} \quad (-) \quad \frac{}{1} \quad (1) \quad \frac{}{1} \quad (-)}{-1} \quad \frac{}{1} \quad (1) \quad \frac{}{1} \quad (-)}{-2}$$

Man kann diese Kombination von Regeln als eine Art gerichteten „Baum“ verstehen, mit Axiomen als Blättern und den „Bruchstrichen“ der Regeln als Knoten mit $k \in \mathbb{N}$ Eingabe-Kanten und genau einer Ausgabe-Kante. Alternativ sind die Regeln Kanten eines sog. „Multigraphen“.

Herleitungen (auch Beweise genannt)

Definition

Eine **Herleitung** einer Formel A im deduktiven System $\mathcal{K} = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$ ist ein Wort $\langle A_i : i < n \rangle \in \mathcal{F}^*$ mit

Herleitungen (auch Beweise genannt)

Definition

Eine **Herleitung** einer Formel A im deduktiven System $\mathcal{K} = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$ ist ein Wort $\langle A_i : i < n \rangle \in \mathcal{F}^*$ mit

- $A_{n-1} = A$

Herleitungen (auch Beweise genannt)

Definition

Eine **Herleitung** einer Formel A im deduktiven System $\mathcal{K} = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$ ist ein Wort $\langle A_i : i < n \rangle \in \mathcal{F}^*$ mit

- $A_{n-1} = A$
- zu jedem $j < n$ gibt es eine Indexfolge $i \in (j-1)^*$ derart, dass $\langle \langle A_{i_k} : k < t \rangle; A_j \rangle$ eine Schlussregel ist; i heißt **Begründung** für A_j .

Herleitungen (auch Beweise genannt)

Definition

Eine **Herleitung** einer Formel A im deduktiven System $\mathcal{K} = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$ ist ein Wort $\langle A_i : i < n \rangle \in \mathcal{F}^*$ mit

- $A_{n-1} = A$
- zu jedem $j < n$ gibt es eine Indexfolge $i \in (j-1)^*$ derart, dass $\langle \langle A_{i_k} : k < t \rangle; A_j \rangle$ eine Schlussregel ist; i heißt **Begründung** für A_j .

$A \in \mathcal{F}$ heißt **herleitbar**, wenn es eine Herleitung von A gibt.

Herleitungen (auch Beweise genannt)

Definition

Eine **Herleitung** einer Formel A im deduktiven System $\mathcal{K} = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$ ist ein Wort $\langle A_i : i < n \rangle \in \mathcal{F}^*$ mit

- $A_{n-1} = A$
- zu jedem $j < n$ gibt es eine Indexfolge $i \in (j-1)^*$ derart, dass $\langle \langle A_{i_k} : k < t \rangle; A_j \rangle$ eine Schlussregel ist; i heißt **Begründung** für A_j .

$A \in \mathcal{F}$ heißt **herleitbar**, wenn es eine Herleitung von A gibt.

Beispiel

Eine mögliche Herleitung von -42 im obigen deduktiven System \mathcal{K}_{Ar} ist

$$\langle 1, 0, -1, -2, 4, -6, 36, -42 \rangle$$

Herleitungen (auch Beweise genannt)

Definition

Eine **Herleitung** einer Formel A im deduktiven System $\mathcal{K} = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$ ist ein Wort $\langle A_i : i < n \rangle \in \mathcal{F}^*$ mit

- $A_{n-1} = A$
- zu jedem $j < n$ gibt es eine Indexfolge $i \in (j-1)^*$ derart, dass $\langle \langle A_{i_k} : k < t \rangle; A_j \rangle$ eine Schlussregel ist; i heißt **Begründung** für A_j .

$A \in \mathcal{F}$ heißt **herleitbar**, wenn es eine Herleitung von A gibt.

Beispiel

Eine mögliche Herleitung von -42 im obigen deduktiven System \mathcal{K}_{Ar} ist

$$\langle 1, 0, -1, -2, 4, -6, 36, -42 \rangle$$

Der entsprechende Baum, der -42 im Regelabschluss des Axioms 1 verortet, hat 71 Knoten und der Teilbaum für -2 tritt neunmal darin auf.

Satz

Eine Formel ist genau dann ein Theorem, wenn sie herleitbar ist.

Satz

Eine Formel ist genau dann ein Theorem, wenn sie herleitbar ist.

Beweis.

Die Hinlänglichkeit folgt mittels Induktion über die Länge der Herleitung, die Notwendigkeit mittels Induktion über den Aufbau von Theoremen.

Satz

Eine Formel ist genau dann ein Theorem, wenn sie herleitbar ist.

Beweis.

Die Hinlänglichkeit folgt mittels Induktion über die Länge der Herleitung, die Notwendigkeit mittels Induktion über den Aufbau von Theoremen. \square

Obiges Beispiel zeigt, wie viel kürzer Herleitungen sein können, verglichen mit der expliziten Angabe des Regel-Abschlusses ausgehend von bestimmten Axiomen. Sie enthalten viel weniger Redundanz.

Satz

Eine Formel ist genau dann ein Theorem, wenn sie herleitbar ist.

Beweis.

Die Hinlänglichkeit folgt mittels Induktion über die Länge der Herleitung, die Notwendigkeit mittels Induktion über den Aufbau von Theoremen. \square

Obiges Beispiel zeigt, wie viel kürzer Herleitungen sein können, verglichen mit der expliziten Angabe des Regel-Abschlusses ausgehend von bestimmten Axiomen. Sie enthalten viel weniger Redundanz.

Definition

Unter einer **expliziten Herleitung** versteht man eine vertikale Auflistung der Folgenglieder mit ihrer Nummer und ihrer Begründung, samt Kurzname der verwendeten Regel.

Beispiel

Explizite Herleitung von $((\neg p \rightarrow \neg\neg q) \rightarrow \neg\neg p)$ in \mathcal{K}_{syn} :

Beispiel

Explizite Herleitung von $((\neg p \rightarrow \neg\neg q) \rightarrow \neg\neg p)$ in \mathcal{K}_{syn} :

0. p

(ν)

Beispiel

Explizite Herleitung von $((\neg p \rightarrow \neg\neg q) \rightarrow \neg\neg p)$ in \mathcal{K}_{syn} :

- | | |
|-------------|-------------|
| 0. p | (ν) |
| 1. $\neg p$ | $(\neg), 0$ |

Beispiel

Explizite Herleitung von $((\neg p \rightarrow \neg\neg q) \rightarrow \neg\neg p)$ in \mathcal{K}_{syn} :

- | | |
|-------------|-------------|
| 0. p | (ν) |
| 1. $\neg p$ | $(\neg), 0$ |
| 2. q | (ν) |

Beispiel

Explizite Herleitung von $((\neg p \rightarrow \neg\neg q) \rightarrow \neg\neg p)$ in \mathcal{K}_{syn} :

0.	p	(ν)
1.	$\neg p$	$(\neg), 0$
2.	q	(ν)
3.	$\neg q$	$(\neg), 2$

Beispiel

Explizite Herleitung von $\langle\langle \neg p \rightarrow \neg\neg q \rangle\rangle \rightarrow \neg\neg p$ in \mathcal{K}_{syn} :

0.	p	(ν)
1.	$\neg p$	$(\neg), 0$
2.	q	(ν)
3.	$\neg q$	$(\neg), 2$
4.	$\neg\neg q$	$(\neg), 3$

Beispiel

Explizite Herleitung von $\llbracket (\neg p \rightarrow \neg\neg q) \rightarrow \neg\neg p \rrbracket$ in \mathcal{K}_{syn} :

0.	p	(ν)
1.	$\neg p$	$(\neg), 0$
2.	q	(ν)
3.	$\neg q$	$(\neg), 2$
4.	$\neg\neg q$	$(\neg), 3$
5.	$\llbracket (\neg p \rightarrow \neg\neg q) \rrbracket$	$(\rightarrow), 1, 4$

Beispiel

Explizite Herleitung von $\langle\langle \neg p \rightarrow \neg\neg q \rangle\rangle \rightarrow \neg\neg p$ in \mathcal{K}_{syn} :

0.	p	(ν)
1.	$\neg p$	$(\neg), 0$
2.	q	(ν)
3.	$\neg q$	$(\neg), 2$
4.	$\neg\neg q$	$(\neg), 3$
5.	$\langle\langle \neg p \rightarrow \neg\neg q \rangle\rangle$	$(\rightarrow), 1, 4$
6.	$\neg\neg p$	$(\neg), 2$

Beispiel

Explizite Herleitung von $\langle\langle\langle\neg p \rightarrow \neg\neg q\rangle\rangle \rightarrow \neg\neg p\rangle\rangle$ in \mathcal{K}_{syn} :

0. p	(ν)
1. $\neg p$	$(\neg), 0$
2. q	(ν)
3. $\neg q$	$(\neg), 2$
4. $\neg\neg q$	$(\neg), 3$
5. $\langle\langle\neg p \rightarrow \neg\neg q\rangle\rangle$	$(\rightarrow), 1, 4$
6. $\neg\neg p$	$(\neg), 2$
7. $\langle\langle\langle\neg p \rightarrow \neg\neg q\rangle\rangle \rightarrow \neg\neg p\rangle\rangle$	$(\rightarrow), 5, 6.$

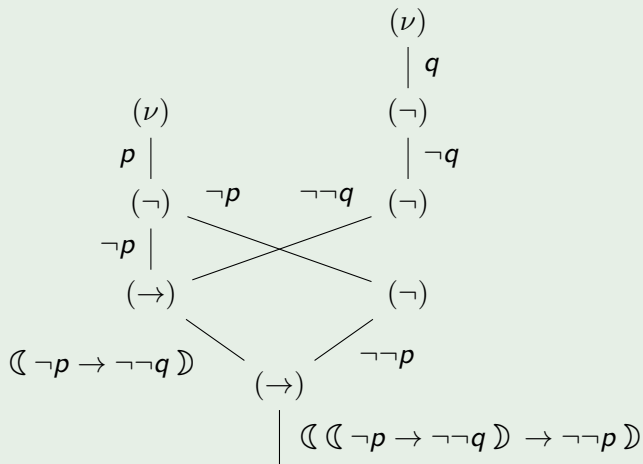
Beispiel

Explizite Herleitung von $\langle\langle \neg p \rightarrow \neg\neg q \rangle \rightarrow \neg\neg p \rangle$ in \mathcal{K}_{syn} :

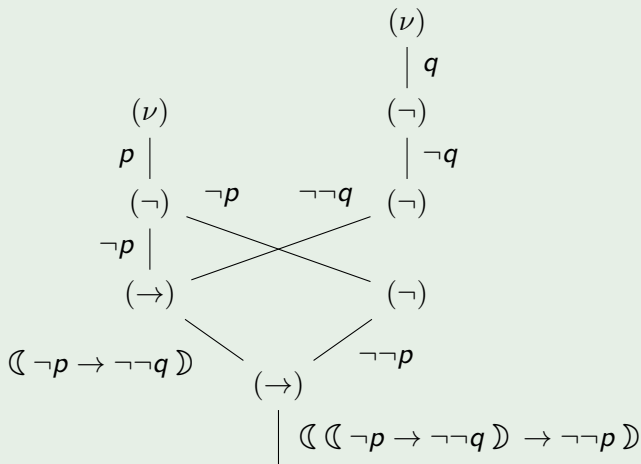
0. p	(ν)
1. $\neg p$	$(\neg), 0$
2. q	(ν)
3. $\neg q$	$(\neg), 2$
4. $\neg\neg q$	$(\neg), 3$
5. $\langle \neg p \rightarrow \neg\neg q \rangle$	$(\rightarrow), 1, 4$
6. $\neg\neg p$	$(\neg), 2$
7. $\langle\langle \neg p \rightarrow \neg\neg q \rangle \rightarrow \neg\neg p \rangle$	$(\rightarrow), 5, 6.$

Dies läßt sich graphisch aufbereiten mit Regelnamen als Knoten und Formeln als Ein- und Ausgaben; die Schrittnummern können dann entfallen.

Beispiel (Herleitungsgraph; Richtung von oben nach unten)



Beispiel (Herleitungsgraph; Richtung von oben nach unten)



Ein Baum entsteht nur, wenn jede Formel außer der Wurzel genau einmal in einer Begründung auftritt. Sonst sind Knoten aufzuspalten:

Beispiel (Herleitungsbaum, „Bruchstriche“ als Knoten, Kanten implizit)

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\overline{p} \quad (\nu)}{\neg p} \quad (\neg) \quad \frac{\frac{\overline{q} \quad (\nu)}{\neg q} \quad (\neg)}{\neg \neg q} \quad (\neg)}{\langle \neg p \rightarrow \neg \neg q \rangle} \quad (\rightarrow)}{\langle \langle \neg p \rightarrow \neg \neg q \rangle \rightarrow \neg \neg p \rangle} \quad (\rightarrow)}
 \end{array}$$

Beispiel (Herleitungsbaum, „Bruchstriche“ als Knoten, Kanten implizit)

$$\frac{\frac{\frac{\overline{p}}{\neg p} \quad (\nu)}{\neg p} \quad (\neg) \quad \frac{\frac{\overline{q}}{\neg q} \quad (\nu)}{\neg q} \quad (\neg)}{\neg \neg q} \quad (\neg)}{\langle \neg p \rightarrow \neg \neg p \rangle} \quad (\rightarrow)}{\langle \langle \neg p \rightarrow \neg \neg q \rangle \rightarrow \neg \neg p \rangle} \quad (\rightarrow)$$

Ein Herleitungsbaum läßt die Struktur der Herleitung deutlicher erkennen und ist vertikal kompakter, aber zum Preis von deutlich mehr Knoten, wie das Beispiel der Herleitung von $\neg 42$ in \mathcal{K}_{Ar} oben zeigt.

Erweiterung des Herleitungsbegriffs: Ableitungen

Definition

Eine **Ableitung** einer Formel A im deduktiven System $\mathcal{K} = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$ aus einer Formelmenge Γ ist ein Wort $\langle A_i : i < n \rangle \in \mathcal{F}^*$ mit

Erweiterung des Herleitungsbegriffs: Ableitungen

Definition

Eine **Ableitung** einer Formel A im deduktiven System $\mathcal{K} = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$ aus einer Formelmenge Γ ist ein Wort $\langle A_i : i < n \rangle \in \mathcal{F}^*$ mit

- $A_{n-1} = A$

Erweiterung des Herleitungsbegriffs: Ableitungen

Definition

Eine **Ableitung** einer Formel A im deduktiven System $\mathcal{K} = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$ aus einer Formelmenge Γ ist ein Wort $\langle A_i : i < n \rangle \in \mathcal{F}^*$ mit

- $A_{n-1} = A$
- für jedes $j < n$ hat A_j entweder eine Begründung $i \in (j-1)^*$ wie bei einer Herleitung, oder $A_j \in \Gamma$.

Erweiterung des Herleitungsbegriffs: Ableitungen

Definition

Eine **Ableitung** einer Formel A im deduktiven System $\mathcal{K} = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$ aus einer Formelmenge Γ ist ein Wort $\langle A_i : i < n \rangle \in \mathcal{F}^*$ mit

- $A_{n-1} = A$
- für jedes $j < n$ hat A_j entweder eine Begründung $i \in (j-1)^*$ wie bei einer Herleitung, oder $A_j \in \Gamma$.

A heißt aus Γ **ableitbar** ($\Gamma \vdash_{\mathcal{K}} A$), wenn eine solche Ableitung existiert.

Erweiterung des Herleitungsbegriffs: Ableitungen

Definition

Eine **Ableitung** einer Formel A im deduktiven System $\mathcal{K} = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$ aus einer Formelmenge Γ ist ein Wort $\langle A_i : i < n \rangle \in \mathcal{F}^*$ mit

- $A_{n-1} = A$
- für jedes $j < n$ hat A_j entweder eine Begründung $i \in (j-1)^*$ wie bei einer Herleitung, oder $A_j \in \Gamma$.

A heißt aus Γ **ableitbar** ($\Gamma \vdash_{\mathcal{K}} A$), wenn eine solche Ableitung existiert.

Die notationellen Konventionen orientieren sich an denen für \models .

Erweiterung des Herleitungsbegriffs: Ableitungen

Definition

Eine **Ableitung** einer Formel A im deduktiven System $\mathcal{K} = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$ aus einer Formelmenge Γ ist ein Wort $\langle A_i : i < n \rangle \in \mathcal{F}^*$ mit

- $A_{n-1} = A$
- für jedes $j < n$ hat A_j entweder eine Begründung $i \in (j-1)^*$ wie bei einer Herleitung, oder $A_j \in \Gamma$.

A heißt aus Γ **ableitbar** ($\Gamma \vdash_{\mathcal{K}} A$), wenn eine solche Ableitung existiert.

Die notationellen Konventionen orientieren sich an denen für \models .

Satz (HA)

Ein deduktives System $\mathcal{K} = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$ induziert einen Hüllenoperator vermöge

$$\Gamma^{\vdash_{\mathcal{K}}} := \{ A \in \mathcal{F} : \Gamma \vdash_{\mathcal{K}} A \}$$

Erweiterung des Herleitungsbegriffs: Ableitungen

Definition

Eine **Ableitung** einer Formel A im deduktiven System $\mathcal{K} = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$ aus einer Formelmenge Γ ist ein Wort $\langle A_i : i < n \rangle \in \mathcal{F}^*$ mit

- $A_{n-1} = A$
- für jedes $j < n$ hat A_j entweder eine Begründung $i \in (j-1)^*$ wie bei einer Herleitung, oder $A_j \in \Gamma$.

A heißt aus Γ **ableitbar** ($\Gamma \vdash_{\mathcal{K}} A$), wenn eine solche Ableitung existiert.

Die notationellen Konventionen orientieren sich an denen für \models .

Satz (HA)

Ein deduktives System $\mathcal{K} = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$ induziert einen Hüllenoperator vermöge

$$\Gamma^{\vdash_{\mathcal{K}}} := \{ A \in \mathcal{F} : \Gamma \vdash_{\mathcal{K}} A \}$$

Dessen Fixpunkte heißen **deduktiv abgeschlossene Mengen**.

Der Beweis des folgenden Satzes ist viel einfacher als der Beweis seines semantischen Gegenstücks:

Der Beweis des folgenden Satzes ist viel einfacher als der Beweis seines semantischen Gegenstücks:

Satz (Kompaktheitssatz, syntaktisch (HA))

Eine Formel $A \in \mathcal{F}$ ist aus $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$ genau dann ableitbar, wenn sie aus einer endlichen Teilmenge $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ ableitbar ist.

Kapitel 4

Deduktion in der Aussagenlogik

Ziel

Wir wollen ein deduktives System $\mathcal{K}_0 = \langle \mathcal{F}_0, \mathcal{R}_0 \rangle$ einführen, für das die Relation $\vdash_{\mathcal{K}_0}$ mit \models übereinstimmt. Vereinfachend setzen wir $\vdash := \vdash_{\mathcal{K}_0}$.

Ziel

Wir wollen ein deduktives System $\mathcal{K}_0 = \langle \mathcal{F}_0, \mathcal{R}_0 \rangle$ einführen, für das die Relation $\vdash_{\mathcal{K}_0}$ mit \models übereinstimmt. Vereinfachend setzen wir $\vdash := \vdash_{\mathcal{K}_0}$.

Die Formelmeng \mathcal{F}_0 besteht aus den Aussageformen über der vollständigen Junktorenmenge $\mathcal{J}_0 = \{\neg, \rightarrow\}$, während \mathcal{R}_0 durch vier Schemata gegeben ist (beachte die Klammervereinfachungen!):

Ziel

Wir wollen ein deduktives System $\mathcal{K}_0 = \langle \mathcal{F}_0, \mathcal{R}_0 \rangle$ einführen, für das die Relation $\vdash_{\mathcal{K}_0}$ mit \models übereinstimmt. Vereinfachend setzen wir $\vdash := \vdash_{\mathcal{K}_0}$.

Die Formelmenge \mathcal{F}_0 besteht aus den Aussageformen über der vollständigen Junktorenmenge $\mathcal{J}_0 = \{\neg, \rightarrow\}$, während \mathcal{R}_0 durch vier Schemata gegeben ist (beachte die Klammervereinfachungen!):

- $$\frac{A \quad A \rightarrow B}{B} \quad (MP) \quad \text{Abtrennungsregel oder modus ponens}$$

Ziel

Wir wollen ein deduktives System $\mathcal{K}_0 = \langle \mathcal{F}_0, \mathcal{R}_0 \rangle$ einführen, für das die Relation $\vdash_{\mathcal{K}_0}$ mit \models übereinstimmt. Vereinfachend setzen wir $\vdash := \vdash_{\mathcal{K}_0}$.

Die Formelmengenge \mathcal{F}_0 besteht aus den Aussageformen über der vollständigen Junktorenmenge $\mathcal{J}_0 = \{\neg, \rightarrow\}$, während \mathcal{R}_0 durch vier Schemata gegeben ist (beachte die Klammervereinfachungen!):

- $$\frac{A \quad A \rightarrow B}{B} \quad (MP) \quad \text{Abtrennungsregel oder modus ponens}$$

- $$\frac{}{B \rightarrow A \rightarrow B} \quad (Ax1)$$

Ziel

Wir wollen ein deduktives System $\mathcal{K}_0 = \langle \mathcal{F}_0, \mathcal{R}_0 \rangle$ einführen, für das die Relation $\vdash_{\mathcal{K}_0}$ mit \models übereinstimmt. Vereinfachend setzen wir $\vdash := \vdash_{\mathcal{K}_0}$.

Die Formelmenge \mathcal{F}_0 besteht aus den Aussageformen über der vollständigen Junktorenmenge $\mathcal{J}_0 = \{\neg, \rightarrow\}$, während \mathcal{R}_0 durch vier Schemata gegeben ist (beachte die Klammervereinfachungen!):

- $$\frac{A \quad A \rightarrow B}{B} \quad (MP) \quad \text{Abtrennungsregel oder modus ponens}$$

- $$\frac{}{B \rightarrow A \rightarrow B} \quad (Ax1)$$

- $$\frac{}{(A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow A \rightarrow C} \quad (Ax2)$$

Ziel

Wir wollen ein deduktives System $\mathcal{K}_0 = \langle \mathcal{F}_0, \mathcal{R}_0 \rangle$ einführen, für das die Relation $\vdash_{\mathcal{K}_0}$ mit \models übereinstimmt. Vereinfachend setzen wir $\vdash := \vdash_{\mathcal{K}_0}$.

Die Formelmenge \mathcal{F}_0 besteht aus den Aussageformen über der vollständigen Junktorenmenge $\mathcal{J}_0 = \{\neg, \rightarrow\}$, während \mathcal{R}_0 durch vier Schemata gegeben ist (beachte die Klammervereinfachungen!):

- $$\frac{A \quad A \rightarrow B}{B} \quad (MP) \quad \text{Abtrennungsregel oder modus ponens}$$

- $$\frac{}{B \rightarrow A \rightarrow B} \quad (Ax1)$$

- $$\frac{}{(A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow A \rightarrow C} \quad (Ax2)$$

- $$\frac{}{(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)} \quad (Ax3)$$

Lemma

Für jede Formel $A \in \mathcal{F}_0$ gilt:

$$\vdash A \rightarrow A \quad (\text{Th1})$$

Lemma

Für jede Formel $A \in \mathcal{F}_0$ gilt:

$$\vdash A \rightarrow A \quad (\text{Th1})$$

Beweis.

Wir geben eine explizite Herleitung:

Lemma

Für jede Formel $A \in \mathcal{F}_0$ gilt:

$$\vdash A \rightarrow A \quad (\text{Th1})$$

Beweis.

Wir geben eine explizite Herleitung:

$$0. A \rightarrow A \rightarrow A \quad \text{Ax1}$$

Lemma

Für jede Formel $A \in \mathcal{F}_0$ gilt:

$$\vdash A \rightarrow A \quad (\text{Th1})$$

Beweis.

Wir geben eine explizite Herleitung:

- | | |
|--|-----|
| 0. $A \rightarrow A \rightarrow A$ | Ax1 |
| 1. $A \rightarrow (A \rightarrow A) \rightarrow A$ | Ax1 |

Lemma

Für jede Formel $A \in \mathcal{F}_0$ gilt:

$$\vdash A \rightarrow A \quad (\text{Th1})$$

Beweis.

Wir geben eine explizite Herleitung:

- | | | |
|----|---|-----|
| 0. | $A \rightarrow A \rightarrow A$ | Ax1 |
| 1. | $A \rightarrow (A \rightarrow A) \rightarrow A$ | Ax1 |
| 2. | $(A \rightarrow (A \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow A \rightarrow A) \rightarrow A \rightarrow A$ | Ax2 |

Lemma

Für jede Formel $A \in \mathcal{F}_0$ gilt:

$$\vdash A \rightarrow A \quad (\text{Th1})$$

Beweis.

Wir geben eine explizite Herleitung:

- | | | |
|----|---|---------|
| 0. | $A \rightarrow A \rightarrow A$ | Ax1 |
| 1. | $A \rightarrow (A \rightarrow A) \rightarrow A$ | Ax1 |
| 2. | $(A \rightarrow (A \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow A \rightarrow A) \rightarrow A \rightarrow A$ | Ax2 |
| 3. | $(A \rightarrow A \rightarrow A) \rightarrow A \rightarrow A$ | MP, 1,2 |

Lemma

Für jede Formel $A \in \mathcal{F}_0$ gilt:

$$\vdash A \rightarrow A \quad (\text{Th1})$$

Beweis.

Wir geben eine explizite Herleitung:

0.	$A \rightarrow A \rightarrow A$	Ax1	
1.	$A \rightarrow (A \rightarrow A) \rightarrow A$	Ax1	
2.	$(A \rightarrow (A \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow A \rightarrow A) \rightarrow A \rightarrow A$	Ax2	
3.	$(A \rightarrow A \rightarrow A) \rightarrow A \rightarrow A$	MP, 1,2	
4.	$A \rightarrow A$	MP, 0,3	□

Lemma

Für jede Formel $A \in \mathcal{F}_0$ gilt:

$$\vdash A \rightarrow A \quad (\text{Th1})$$

Beweis.

Wir geben eine explizite Herleitung:

0.	$A \rightarrow A \rightarrow A$	Ax1	
1.	$A \rightarrow (A \rightarrow A) \rightarrow A$	Ax1	
2.	$(A \rightarrow (A \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow A \rightarrow A) \rightarrow A \rightarrow A$	Ax2	
3.	$(A \rightarrow A \rightarrow A) \rightarrow A \rightarrow A$	MP, 1,2	
4.	$A \rightarrow A$	MP, 0,3	□

Achtung: Die Klammersparnisregeln für \rightarrow können die Lesbarkeit zunächst beeinträchtigen. Dagegen hilft nur Routine.

Das syntaktische Deduktionstheorem

Der Nutzen von \mathcal{K}_0 beruht wesentlich auf dem

Satz (Deduktionstheorem)

$\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ genau dann wenn $\Gamma \vdash A \rightarrow B$.

Das syntaktische Deduktionstheorem

Der Nutzen von \mathcal{K}_0 beruht wesentlich auf dem

Satz (Deduktionstheorem)

$\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ genau dann wenn $\Gamma \vdash A \rightarrow B$.

Beweis.

(\Leftarrow) Aus $\Gamma \cup \{A\}$ lassen sich A und $A \rightarrow B$ ableiten, also auch B .

Das syntaktische Deduktionstheorem

Der Nutzen von \mathcal{K}_0 beruht wesentlich auf dem

Satz (Deduktionstheorem)

$\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ genau dann wenn $\Gamma \vdash A \rightarrow B$.

Beweis.

(\Leftarrow) Aus $\Gamma \cup \{A\}$ lassen sich A und $A \rightarrow B$ ableiten, also auch B .

(\Rightarrow) Induktion über alle aus $\Gamma \cup \{A\}$ ableitbaren Formeln B :

Das syntaktische Deduktionstheorem

Der Nutzen von \mathcal{K}_0 beruht wesentlich auf dem

Satz (Deduktionstheorem)

$\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ genau dann wenn $\Gamma \vdash A \rightarrow B$.

Beweis.

(\Leftarrow) Aus $\Gamma \cup \{A\}$ lassen sich A und $A \rightarrow B$ ableiten, also auch B .

(\Rightarrow) Induktion über alle aus $\Gamma \cup \{A\}$ ableitbaren Formeln B :

- $B \in \mathbf{Ax} \cup \Gamma$: Wende (MP) an auf B und das Axiom $B \rightarrow A \rightarrow B$.

Das syntaktische Deduktionstheorem

Der Nutzen von \mathcal{K}_0 beruht wesentlich auf dem

Satz (Deduktionstheorem)

$\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ genau dann wenn $\Gamma \vdash A \rightarrow B$.

Beweis.

(\Leftarrow) Aus $\Gamma \cup \{A\}$ lassen sich A und $A \rightarrow B$ ableiten, also auch B .

(\Rightarrow) Induktion über alle aus $\Gamma \cup \{A\}$ ableitbaren Formeln B :

- $B \in \mathbf{Ax} \cup \Gamma$: Wende (MP) an auf B und das Axiom $B \rightarrow A \rightarrow B$.
- B ist Konklusion von aus $\Gamma \cup \{A\}$ ableitbaren Prämissen C und $C \rightarrow B$:

Das syntaktische Deduktionstheorem

Der Nutzen von \mathcal{K}_0 beruht wesentlich auf dem

Satz (Deduktionstheorem)

$\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ genau dann wenn $\Gamma \vdash A \rightarrow B$.

Beweis.

(\Leftarrow) Aus $\Gamma \cup \{A\}$ lassen sich A und $A \rightarrow B$ ableiten, also auch B .

(\Rightarrow) Induktion über alle aus $\Gamma \cup \{A\}$ ableitbaren Formeln B :

- $B \in \mathbf{Ax} \cup \Gamma$: Wende (MP) an auf B und das Axiom $B \rightarrow A \rightarrow B$.
- B ist Konklusion von aus $\Gamma \cup \{A\}$ ableitbaren Prämissen C und $C \rightarrow B$: Nach IV sind dann auch $A \rightarrow C$ und $A \rightarrow C \rightarrow B$ aus Γ ableitbar.

Das syntaktische Deduktionstheorem

Der Nutzen von \mathcal{K}_0 beruht wesentlich auf dem

Satz (Deduktionstheorem)

$\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ genau dann wenn $\Gamma \vdash A \rightarrow B$.

Beweis.

(\Leftarrow) Aus $\Gamma \cup \{A\}$ lassen sich A und $A \rightarrow B$ ableiten, also auch B .

(\Rightarrow) Induktion über alle aus $\Gamma \cup \{A\}$ ableitbaren Formeln B :

- $B \in \mathbf{Ax} \cup \Gamma$: Wende (MP) an auf B und das Axiom $B \rightarrow A \rightarrow B$.
- B ist Konklusion von aus $\Gamma \cup \{A\}$ ableitbaren Prämissen C und $C \rightarrow B$: Nach IV sind dann auch $A \rightarrow C$ und $A \rightarrow C \rightarrow B$ aus Γ ableitbar. 2-malige Anwendung von (MP) auf die Instanz $(A \rightarrow C \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C) \rightarrow A \rightarrow B$ von (Ax2) liefert $A \rightarrow B$.

Das syntaktische Deduktionstheorem

Der Nutzen von \mathcal{K}_0 beruht wesentlich auf dem

Satz (Deduktionstheorem)

$\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ genau dann wenn $\Gamma \vdash A \rightarrow B$.

Beweis.

(\Leftarrow) Aus $\Gamma \cup \{A\}$ lassen sich A und $A \rightarrow B$ ableiten, also auch B .

(\Rightarrow) Induktion über alle aus $\Gamma \cup \{A\}$ ableitbaren Formeln B :

- $B \in \mathbf{Ax} \cup \Gamma$: Wende (MP) an auf B und das Axiom $B \rightarrow A \rightarrow B$.
- B ist Konklusion von aus $\Gamma \cup \{A\}$ ableitbaren Prämissen C und $C \rightarrow B$: Nach IV sind dann auch $A \rightarrow C$ und $A \rightarrow C \rightarrow B$ aus Γ ableitbar. 2-malige Anwendung von (MP) auf die Instanz $(A \rightarrow C \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C) \rightarrow A \rightarrow B$ von (Ax2) liefert $A \rightarrow B$.
- $B = A$: obiges Lemma.

Das syntaktische Deduktionstheorem

Der Nutzen von \mathcal{K}_0 beruht wesentlich auf dem

Satz (Deduktionstheorem)

$\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ genau dann wenn $\Gamma \vdash A \rightarrow B$.

Beweis.

(\Leftarrow) Aus $\Gamma \cup \{A\}$ lassen sich A und $A \rightarrow B$ ableiten, also auch B .

(\Rightarrow) Induktion über alle aus $\Gamma \cup \{A\}$ ableitbaren Formeln B :

- $B \in \mathbf{Ax} \cup \Gamma$: Wende (MP) an auf B und das Axiom $B \rightarrow A \rightarrow B$.
- B ist Konklusion von aus $\Gamma \cup \{A\}$ ableitbaren Prämissen C und $C \rightarrow B$: Nach IV sind dann auch $A \rightarrow C$ und $A \rightarrow C \rightarrow B$ aus Γ ableitbar. 2-malige Anwendung von (MP) auf die Instanz $(A \rightarrow C \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C) \rightarrow A \rightarrow B$ von (Ax2) liefert $A \rightarrow B$.
- $B = A$: obiges Lemma. □

Sieben weitere Tautologie-Schemata

Lemma

$$\vdash \neg\neg A \rightarrow A$$

(Th2)

Sieben weitere Tautologie-Schemata

Lemma

$$\vdash \neg\neg A \rightarrow A$$

(Th2)

Beweis (unter Verwendung des Deduktionstheorems).

Sieben weitere Tautologie-Schemata

Lemma

$$\vdash \neg\neg A \rightarrow A \quad (\text{Th2})$$

Beweis (unter Verwendung des Deduktionstheorems).

0. $\neg\neg A$

Ann.

Sieben weitere Tautologie-Schemata

Lemma

$$\vdash \neg\neg A \rightarrow A \quad (\text{Th2})$$

Beweis (unter Verwendung des Deduktionstheorems).

- | | |
|---|------|
| 0. $\neg\neg A$ | Ann. |
| 1. $\neg\neg A \rightarrow \neg\neg\neg\neg A \rightarrow \neg\neg A$ | Ax1 |

Sieben weitere Tautologie-Schemata

Lemma

$$\vdash \neg\neg A \rightarrow A \quad (\text{Th2})$$

Beweis (unter Verwendung des Deduktionstheorems).

- | | |
|---|---------|
| 0. $\neg\neg A$ | Ann. |
| 1. $\neg\neg A \rightarrow \neg\neg\neg\neg A \rightarrow \neg\neg A$ | Ax1 |
| 2. $\neg\neg\neg\neg A \rightarrow \neg\neg A$ | MP, 0,1 |

Sieben weitere Tautologie-Schemata

Lemma

$$\vdash \neg\neg A \rightarrow A \quad (\text{Th2})$$

Beweis (unter Verwendung des Deduktionstheorems).

- | | |
|--|---------|
| 0. $\neg\neg A$ | Ann. |
| 1. $\neg\neg A \rightarrow \neg\neg\neg\neg A \rightarrow \neg\neg A$ | Ax1 |
| 2. $\neg\neg\neg\neg A \rightarrow \neg\neg A$ | MP, 0,1 |
| 3. $(\neg\neg\neg\neg A \rightarrow \neg\neg A) \rightarrow \neg\neg A \rightarrow \neg\neg\neg\neg A$ | Ax3 |

Sieben weitere Tautologie-Schemata

Lemma

$$\vdash \neg\neg A \rightarrow A$$

(Th2)

Beweis (unter Verwendung des Deduktionstheorems).

- | | |
|--|---------|
| 0. $\neg\neg A$ | Ann. |
| 1. $\neg\neg A \rightarrow \neg\neg\neg\neg A \rightarrow \neg\neg A$ | Ax1 |
| 2. $\neg\neg\neg\neg A \rightarrow \neg\neg A$ | MP, 0,1 |
| 3. $(\neg\neg\neg\neg A \rightarrow \neg\neg A) \rightarrow \neg A \rightarrow \neg\neg\neg\neg A$ | Ax3 |
| 4. $\neg A \rightarrow \neg\neg\neg\neg A$ | MP, 2,3 |

Sieben weitere Tautologie-Schemata

Lemma

$$\vdash \neg\neg A \rightarrow A$$

(Th2)

Beweis (unter Verwendung des Deduktionstheorems).

- | | |
|--|---------|
| 0. $\neg\neg A$ | Ann. |
| 1. $\neg\neg A \rightarrow \neg\neg\neg\neg A \rightarrow \neg\neg A$ | Ax1 |
| 2. $\neg\neg\neg\neg A \rightarrow \neg\neg A$ | MP, 0,1 |
| 3. $(\neg\neg\neg\neg A \rightarrow \neg\neg A) \rightarrow \neg A \rightarrow \neg\neg\neg\neg A$ | Ax3 |
| 4. $\neg A \rightarrow \neg\neg\neg\neg A$ | MP, 2,3 |
| 5. $(\neg A \rightarrow \neg\neg\neg\neg A) \rightarrow \neg\neg A \rightarrow A$ | Ax3 |

Sieben weitere Tautologie-Schemata

Lemma

$$\vdash \neg\neg A \rightarrow A$$

(Th2)

Beweis (unter Verwendung des Deduktionstheorems).

0. $\neg\neg A$	Ann.
1. $\neg\neg A \rightarrow \neg\neg\neg\neg A \rightarrow \neg\neg A$	Ax1
2. $\neg\neg\neg\neg A \rightarrow \neg\neg A$	MP, 0,1
3. $(\neg\neg\neg\neg A \rightarrow \neg\neg A) \rightarrow \neg A \rightarrow \neg\neg\neg\neg A$	Ax3
4. $\neg A \rightarrow \neg\neg\neg\neg A$	MP, 2,3
5. $(\neg A \rightarrow \neg\neg\neg\neg A) \rightarrow \neg\neg A \rightarrow A$	Ax3
6. $\neg\neg A \rightarrow A$	MP, 4,5

Sieben weitere Tautologie-Schemata

Lemma

$$\vdash \neg\neg A \rightarrow A$$

(Th2)

Beweis (unter Verwendung des Deduktionstheorems).

0. $\neg\neg A$	Ann.
1. $\neg\neg A \rightarrow \neg\neg\neg\neg A \rightarrow \neg\neg A$	Ax1
2. $\neg\neg\neg\neg A \rightarrow \neg\neg A$	MP, 0,1
3. $(\neg\neg\neg\neg A \rightarrow \neg\neg A) \rightarrow \neg A \rightarrow \neg\neg\neg\neg A$	Ax3
4. $\neg A \rightarrow \neg\neg\neg\neg A$	MP, 2,3
5. $(\neg A \rightarrow \neg\neg\neg\neg A) \rightarrow \neg\neg A \rightarrow A$	Ax3
6. $\neg\neg A \rightarrow A$	MP, 4,5
7. A	MP, 0,6) □

Lemma

$$(a) \quad \vdash \neg B \rightarrow B \rightarrow A \quad (\text{Th3})$$

Lemma

$$(a) \quad \vdash \neg B \rightarrow B \rightarrow A \quad (\text{Th3})$$

$$(b) \quad \vdash B \rightarrow \neg\neg B \quad (\text{Th4})$$

Lemma

$$(a) \quad \vdash \neg B \rightarrow B \rightarrow A \quad (\text{Th3})$$

$$(b) \quad \vdash B \rightarrow \neg\neg B \quad (\text{Th4})$$

Beweis (unter Verwendung des Deduktionstheorems).

Lemma

$$(a) \quad \vdash \neg B \rightarrow B \rightarrow A \quad (\text{Th3})$$

$$(b) \quad \vdash B \rightarrow \neg\neg B \quad (\text{Th4})$$

Beweis (unter Verwendung des Deduktionstheorems).

(a)	0. $\neg B$	Ann.
	1. $\neg B \rightarrow \neg A \rightarrow \neg B$	Ax1

Lemma

(a) $\vdash \neg B \rightarrow B \rightarrow A$ (Th3)

(b) $\vdash B \rightarrow \neg\neg B$ (Th4)

Beweis (unter Verwendung des Deduktionstheorems).

(a)	0. $\neg B$	Ann.
	1. $\neg B \rightarrow \neg A \rightarrow \neg B$	Ax1
	2. $\neg A \rightarrow \neg B$	MP, 0,1

Lemma

$$(a) \quad \vdash \neg B \rightarrow B \rightarrow A \quad (\text{Th3})$$

$$(b) \quad \vdash B \rightarrow \neg\neg B \quad (\text{Th4})$$

Beweis (unter Verwendung des Deduktionstheorems).

(a)	0. $\neg B$	Ann.
	1. $\neg B \rightarrow \neg A \rightarrow \neg B$	Ax1
	2. $\neg A \rightarrow \neg B$	MP, 0,1
	3. $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow B \rightarrow A$	Ax3



Lemma

(a) $\vdash \neg B \rightarrow B \rightarrow A$ (Th3)

(b) $\vdash B \rightarrow \neg\neg B$ (Th4)

Beweis (unter Verwendung des Deduktionstheorems).

(a)	0. $\neg B$	Ann.
	1. $\neg B \rightarrow \neg A \rightarrow \neg B$	Ax1
	2. $\neg A \rightarrow \neg B$	MP, 0,1
	3. $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow B \rightarrow A$	Ax3
	4. $B \rightarrow A$	MP, 2,3



Lemma

(a) $\vdash \neg B \rightarrow B \rightarrow A$ (Th3)

(b) $\vdash B \rightarrow \neg\neg B$ (Th4)

Beweis (unter Verwendung des Deduktionstheorems).

(a)	0. $\neg B$	Ann.
	1. $\neg B \rightarrow \neg A \rightarrow \neg B$	Ax1
	2. $\neg A \rightarrow \neg B$	MP, 0,1
	3. $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow B \rightarrow A$	Ax3
	4. $B \rightarrow A$	MP, 2,3

(b) 0. $\neg\neg\neg B \rightarrow \neg B$ Th2



Lemma

- (a) $\vdash \neg B \rightarrow B \rightarrow A$ (Th3)
- (b) $\vdash B \rightarrow \neg\neg B$ (Th4)

Beweis (unter Verwendung des Deduktionstheorems).

- (a)
- | | | |
|----|---|---------|
| 0. | $\neg B$ | Ann. |
| 1. | $\neg B \rightarrow \neg A \rightarrow \neg B$ | Ax1 |
| 2. | $\neg A \rightarrow \neg B$ | MP, 0,1 |
| 3. | $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow B \rightarrow A$ | Ax3 |
| 4. | $B \rightarrow A$ | MP, 2,3 |
-
- (b)
- | | | |
|----|--|-----|
| 0. | $\neg\neg\neg B \rightarrow \neg B$ | Th2 |
| 1. | $(\neg\neg\neg B \rightarrow \neg B) \rightarrow B \rightarrow \neg\neg B$ | Ax3 |



Lemma

- (a) $\vdash \neg B \rightarrow B \rightarrow A$ (Th3)
- (b) $\vdash B \rightarrow \neg\neg B$ (Th4)

Beweis (unter Verwendung des Deduktionstheorems).

- (a)
- | | | |
|----|---|---------|
| 0. | $\neg B$ | Ann. |
| 1. | $\neg B \rightarrow \neg A \rightarrow \neg B$ | Ax1 |
| 2. | $\neg A \rightarrow \neg B$ | MP, 0,1 |
| 3. | $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow B \rightarrow A$ | Ax3 |
| 4. | $B \rightarrow A$ | MP, 2,3 |

-
- (b)
- | | | |
|----|--|---------|
| 0. | $\neg\neg\neg B \rightarrow \neg B$ | Th2 |
| 1. | $(\neg\neg\neg B \rightarrow \neg B) \rightarrow B \rightarrow \neg\neg B$ | Ax3 |
| 2. | $B \rightarrow \neg\neg B$ | MP, 0,1 |



Lemma

$$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow \neg B \rightarrow \neg A$$

(Th5)

Lemma

$$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow \neg B \rightarrow \neg A \quad (\text{Th5})$$

Beweis.

Lemma

$$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow \neg B \rightarrow \neg A \quad (\text{Th5})$$

Beweis.

0.	\lceil	$A \rightarrow B$	Ann.
1.	\lceil	$\neg\neg A$	Ann.

Lemma

$$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow \neg B \rightarrow \neg A$$

(Th5)

Beweis.

0.	[$A \rightarrow B$	Ann.
1.	[$\neg\neg A$	Ann.
2.	[$\neg\neg A \rightarrow A$	Th2

Lemma

$$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow \neg B \rightarrow \neg A$$

(Th5)

Beweis.

0.	[$A \rightarrow B$	Ann.
1.	[$\neg\neg A$	Ann.
2.	[$\neg\neg A \rightarrow A$	Th2
3.	[A	MP, 1,2

Lemma

$$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow \neg B \rightarrow \neg A$$

(Th5)

Beweis.

0.	$A \rightarrow B$	Ann.
1.	$\neg\neg A$	Ann.
2.	$\neg\neg A \rightarrow A$	Th2
3.	A	MP, 1,2
4.	B	MP, 3,0

Lemma

$$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow \neg B \rightarrow \neg A$$

(Th5)

Beweis.

0.	$A \rightarrow B$	Ann.
1.	$\neg\neg A$	Ann.
2.	$\neg\neg A \rightarrow A$	Th2
3.	A	MP, 1,2
4.	B	MP, 3,0
5.	$B \rightarrow \neg\neg B$	Th4

Lemma

$$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow \neg B \rightarrow \neg A$$

(Th5)

Beweis.

0.	[$A \rightarrow B$	Ann.
1.	[$\neg\neg A$	Ann.
2.	[$\neg\neg A \rightarrow A$	Th2
3.	[A	MP, 1,2
4.	[B	MP, 3,0
5.	[$B \rightarrow \neg\neg B$	Th4
6.	[$\neg\neg B$	MP, 4,5

Lemma

$$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow \neg B \rightarrow \neg A$$

(Th5)

Beweis.

0.	$A \rightarrow B$	Ann.
1.	$\neg\neg A$	Ann.
2.	$\neg\neg A \rightarrow A$	Th2
3.	A	MP, 1,2
4.	B	MP, 3,0
5.	$B \rightarrow \neg\neg B$	Th4
6.	$\neg\neg B$	MP, 4,5
7.	$\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B$	DT, 2-7

Lemma

$$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow \neg B \rightarrow \neg A$$

(Th5)

Beweis.

0.	$A \rightarrow B$	Ann.
1.	$\neg\neg A$	Ann.
2.	$\neg\neg A \rightarrow A$	Th2
3.	A	MP, 1,2
4.	B	MP, 3,0
5.	$B \rightarrow \neg\neg B$	Th4
6.	$\neg\neg B$	MP, 4,5
7.	$\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B$	DT, 2-7
8.	$(\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow \neg B \rightarrow \neg A$	Ax1

Lemma

$$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow \neg B \rightarrow \neg A$$

(Th5)

Beweis.

0.	$A \rightarrow B$	Ann.
1.	$\neg\neg A$	Ann.
2.	$\neg\neg A \rightarrow A$	Th2
3.	A	MP, 1,2
4.	B	MP, 3,0
5.	$B \rightarrow \neg\neg B$	Th4
6.	$\neg\neg B$	MP, 4,5
7.	$\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B$	DT, 2-7
8.	$(\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow \neg B \rightarrow \neg A$	Ax1
9.	$\neg B \rightarrow \neg A$	MP, 7,8

Lemma

$$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow \neg B \rightarrow \neg A$$

(Th5)

Beweis.

0.	$A \rightarrow B$	Ann.
1.	$\neg\neg A$	Ann.
2.	$\neg\neg A \rightarrow A$	Th2
3.	A	MP, 1,2
4.	B	MP, 3,0
5.	$B \rightarrow \neg\neg B$	Th4
6.	$\neg\neg B$	MP, 4,5
7.	$\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B$	DT, 2-7
8.	$(\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow \neg B \rightarrow \neg A$	Ax1
9.	$\neg B \rightarrow \neg A$	MP, 7,8
10.	$(A \rightarrow B) \rightarrow \neg B \rightarrow \neg A$	DT, 0-9

□

Lemma

$$\vdash A \rightarrow \neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$$

(Th6)

Lemma

$$\vdash A \rightarrow \neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B) \quad (\text{Th6})$$

Beweis.

Lemma

$$\vdash A \rightarrow \neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B) \quad (\text{Th6})$$

Beweis.

0. $\lceil _ A$

Ann.

Lemma

$$\vdash A \rightarrow \neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B) \quad (\text{Th6})$$

Beweis.

0.	[A	Ann.
1.	[$A \rightarrow B$	Ann.

Lemma

$$\vdash A \rightarrow \neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B) \quad (\text{Th6})$$

Beweis.

0.	[A	Ann.
1.	[$A \rightarrow B$	Ann.
2.	[B	MP, 0,1

Lemma

$$\vdash A \rightarrow \neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B) \quad (\text{Th6})$$

Beweis.

0.	[A	Ann.
1.	[$A \rightarrow B$	Ann.
2.	[B	MP, 0,1
3.		$(A \rightarrow B) \rightarrow B$	DT, 2-3

Lemma

$$\vdash A \rightarrow \neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B) \quad (\text{Th6})$$

Beweis.

0.	[A	Ann.
1.	[$A \rightarrow B$	Ann.
2.	[B	MP, 0,1
3.		$(A \rightarrow B) \rightarrow B$	DT, 2-3
4.		$((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow \neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$	Th5

Lemma

$$\vdash A \rightarrow \neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B) \quad (\text{Th6})$$

Beweis.

0.	[A	Ann.
1.	[$A \rightarrow B$	Ann.
2.	[B	MP, 0,1
3.		$(A \rightarrow B) \rightarrow B$	DT, 2-3
4.		$((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow \neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$	Th5
5.		$\neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$	MP, 3,4

Lemma

$$\vdash A \rightarrow \neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B) \quad (\text{Th6})$$

Beweis.

0.	[A	Ann.
1.	[$A \rightarrow B$	Ann.
2.	[B	MP, 0,1
3.	[$(A \rightarrow B) \rightarrow B$	DT, 2-3
4.	[$((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow \neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$	Th5
5.	[$\neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$	MP, 3,4
6.		$A \rightarrow \neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$	DT, 0-5 □

Lemma

$$\vdash A \rightarrow \neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B) \quad (\text{Th6})$$

Beweis.

0.	[A	Ann.
1.	[$A \rightarrow B$	Ann.
2.	[B	MP, 0,1
3.	[$(A \rightarrow B) \rightarrow B$	DT, 2-3
4.	[$((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow \neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$	Th5
5.	[$\neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$	MP, 3,4
6.		$A \rightarrow \neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$	DT, 0-5 □

Lemma

$$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A \quad (\text{Th7})$$

Beweis.

Beweis.

0. $\left[_ A \rightarrow B \right.$

Ann.

Beweis.

0.	[$A \rightarrow B$	Ann.	
1.	[[$A \rightarrow \neg B$	Ann.
		-		

Beweis.

0.	[$A \rightarrow B$	Ann.
1.	[$A \rightarrow \neg B$	Ann.
2.	[A	Ann.

Beweis.

0.	[$A \rightarrow B$	Ann.
1.	[$A \rightarrow \neg B$	Ann.
2.	[A	Ann.
3.	[B	MP, 2,0

Beweis.

0.	[$A \rightarrow B$	Ann.
1.	[$A \rightarrow \neg B$	Ann.
2.	[A	Ann.
3.		B	MP, 2,0
4.		$\neg B$	MP, 2,1

Beweis.

0.	[$A \rightarrow B$	Ann.
1.	[$A \rightarrow \neg B$	Ann.
2.	[A	Ann.
3.		B	MP, 2,0
4.		$\neg B$	MP, 2,1
5.		$\neg B \rightarrow B \rightarrow \neg(A \rightarrow A)$	Th3

Beweis.

0.	[$A \rightarrow B$	Ann.
1.	[$A \rightarrow \neg B$	Ann.
2.	[A	Ann.
3.		B	MP, 2,0
4.		$\neg B$	MP, 2,1
5.		$\neg B \rightarrow B \rightarrow \neg(A \rightarrow A)$	Th3
6.		$B \rightarrow \neg(A \rightarrow A)$	MP, 4,5

Beweis.

0.	[$A \rightarrow B$	Ann.
1.	[$A \rightarrow \neg B$	Ann.
2.	[A	Ann.
3.		B	MP, 2,0
4.		$\neg B$	MP, 2,1
5.		$\neg B \rightarrow B \rightarrow \neg(A \rightarrow A)$	Th3
6.		$B \rightarrow \neg(A \rightarrow A)$	MP, 4,5
7.		$\neg(A \rightarrow A)$	MP, 3,7

Beweis.

0.	$A \rightarrow B$	Ann.
1.	$A \rightarrow \neg B$	Ann.
2.	A	Ann.
3.	B	MP, 2,0
4.	$\neg B$	MP, 2,1
5.	$\neg B \rightarrow B \rightarrow \neg(A \rightarrow A)$	Th3
6.	$B \rightarrow \neg(A \rightarrow A)$	MP, 4,5
7.	$\neg(A \rightarrow A)$	MP, 3,7
8.	$A \rightarrow \neg(A \rightarrow A)$	DT, 2-7

Beweis.

0.	$A \rightarrow B$	Ann.
1.	$A \rightarrow \neg B$	Ann.
2.	A	Ann.
3.	B	MP, 2,0
4.	$\neg B$	MP, 2,1
5.	$\neg B \rightarrow B \rightarrow \neg(A \rightarrow A)$	Th3
6.	$B \rightarrow \neg(A \rightarrow A)$	MP, 4,5
7.	$\neg(A \rightarrow A)$	MP, 3,7
8.	$A \rightarrow \neg(A \rightarrow A)$	DT, 2-7
9.	$A \rightarrow A$	Th1

Beweis.

0.	$A \rightarrow B$	Ann.
1.	$A \rightarrow \neg B$	Ann.
2.	A	Ann.
3.	B	MP, 2,0
4.	$\neg B$	MP, 2,1
5.	$\neg B \rightarrow B \rightarrow \neg(A \rightarrow A)$	Th3
6.	$B \rightarrow \neg(A \rightarrow A)$	MP, 4,5
7.	$\neg(A \rightarrow A)$	MP, 3,7
8.	$A \rightarrow \neg(A \rightarrow A)$	DT, 2-7
9.	$A \rightarrow A$	Th1
10.	$(A \rightarrow A) \rightarrow \neg\neg(A \rightarrow A)$	Th4

Beweis.

0.	$A \rightarrow B$	Ann.
1.	$A \rightarrow \neg B$	Ann.
2.	A	Ann.
3.	B	MP, 2,0
4.	$\neg B$	MP, 2,1
5.	$\neg B \rightarrow B \rightarrow \neg(A \rightarrow A)$	Th3
6.	$B \rightarrow \neg(A \rightarrow A)$	MP, 4,5
7.	$\neg(A \rightarrow A)$	MP, 3,7
8.	$A \rightarrow \neg(A \rightarrow A)$	DT, 2-7
9.	$A \rightarrow A$	Th1
10.	$(A \rightarrow A) \rightarrow \neg\neg(A \rightarrow A)$	Th4
11.	$\neg\neg(A \rightarrow A)$	MP, 9,10

Beweis.

0.	$A \rightarrow B$	Ann.
1.	$A \rightarrow \neg B$	Ann.
2.	A	Ann.
3.	B	MP, 2,0
4.	$\neg B$	MP, 2,1
5.	$\neg B \rightarrow B \rightarrow \neg(A \rightarrow A)$	Th3
6.	$B \rightarrow \neg(A \rightarrow A)$	MP, 4,5
7.	$\neg(A \rightarrow A)$	MP, 3,7
8.	$A \rightarrow \neg(A \rightarrow A)$	DT, 2-7
9.	$A \rightarrow A$	Th1
10.	$(A \rightarrow A) \rightarrow \neg\neg(A \rightarrow A)$	Th4
11.	$\neg\neg(A \rightarrow A)$	MP, 9,10
12.	$(A \rightarrow \neg(A \rightarrow A)) \rightarrow (\neg\neg(A \rightarrow A) \rightarrow \neg A)$	Th5

Beweis.

0.	$A \rightarrow B$	Ann.
1.	$A \rightarrow \neg B$	Ann.
2.	A	Ann.
3.	B	MP, 2,0
4.	$\neg B$	MP, 2,1
5.	$\neg B \rightarrow B \rightarrow \neg(A \rightarrow A)$	Th3
6.	$B \rightarrow \neg(A \rightarrow A)$	MP, 4,5
7.	$\neg(A \rightarrow A)$	MP, 3,7
8.	$A \rightarrow \neg(A \rightarrow A)$	DT, 2-7
9.	$A \rightarrow A$	Th1
10.	$(A \rightarrow A) \rightarrow \neg\neg(A \rightarrow A)$	Th4
11.	$\neg\neg(A \rightarrow A)$	MP, 9,10
12.	$(A \rightarrow \neg(A \rightarrow A)) \rightarrow (\neg\neg(A \rightarrow A) \rightarrow \neg A)$	Th5
13.	$\neg\neg(A \rightarrow A) \rightarrow \neg A$	MP, 8,12

Beweis.

0.	$A \rightarrow B$	Ann.
1.	$A \rightarrow \neg B$	Ann.
2.	A	Ann.
3.	B	MP, 2,0
4.	$\neg B$	MP, 2,1
5.	$\neg B \rightarrow B \rightarrow \neg(A \rightarrow A)$	Th3
6.	$B \rightarrow \neg(A \rightarrow A)$	MP, 4,5
7.	$\neg(A \rightarrow A)$	MP, 3,7
8.	$A \rightarrow \neg(A \rightarrow A)$	DT, 2-7
9.	$A \rightarrow A$	Th1
10.	$(A \rightarrow A) \rightarrow \neg\neg(A \rightarrow A)$	Th4
11.	$\neg\neg(A \rightarrow A)$	MP, 9,10
12.	$(A \rightarrow \neg(A \rightarrow A)) \rightarrow (\neg\neg(A \rightarrow A) \rightarrow \neg A)$	Th5
13.	$\neg\neg(A \rightarrow A) \rightarrow \neg A$	MP, 8,12
14.	$\neg A$	MP 11,13

Beweis.

0.	$A \rightarrow B$	Ann.
1.	$A \rightarrow \neg B$	Ann.
2.	A	Ann.
3.	B	MP, 2,0
4.	$\neg B$	MP, 2,1
5.	$\neg B \rightarrow B \rightarrow \neg(A \rightarrow A)$	Th3
6.	$B \rightarrow \neg(A \rightarrow A)$	MP, 4,5
7.	$\neg(A \rightarrow A)$	MP, 3,7
8.	$A \rightarrow \neg(A \rightarrow A)$	DT, 2-7
9.	$A \rightarrow A$	Th1
10.	$(A \rightarrow A) \rightarrow \neg\neg(A \rightarrow A)$	Th4
11.	$\neg\neg(A \rightarrow A)$	MP, 9,10
12.	$(A \rightarrow \neg(A \rightarrow A)) \rightarrow (\neg\neg(A \rightarrow A) \rightarrow \neg A)$	Th5
13.	$\neg\neg(A \rightarrow A) \rightarrow \neg A$	MP, 8,12
14.	$\neg A$	MP 11,13
15.	$(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A$	DT, 2-14

Beweis.

0.	$A \rightarrow B$	Ann.
1.	$A \rightarrow \neg B$	Ann.
2.	A	Ann.
3.	B	MP, 2,0
4.	$\neg B$	MP, 2,1
5.	$\neg B \rightarrow B \rightarrow \neg(A \rightarrow A)$	Th3
6.	$B \rightarrow \neg(A \rightarrow A)$	MP, 4,5
7.	$\neg(A \rightarrow A)$	MP, 3,7
8.	$A \rightarrow \neg(A \rightarrow A)$	DT, 2-7
9.	$A \rightarrow A$	Th1
10.	$(A \rightarrow A) \rightarrow \neg\neg(A \rightarrow A)$	Th4
11.	$\neg\neg(A \rightarrow A)$	MP, 9,10
12.	$(A \rightarrow \neg(A \rightarrow A)) \rightarrow (\neg\neg(A \rightarrow A) \rightarrow \neg A)$	Th5
13.	$\neg\neg(A \rightarrow A) \rightarrow \neg A$	MP, 8,12
14.	$\neg A$	MP 11,13
15.	$(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A$	DT, 2-14
16.	$(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A$	DT, 1-15



Lemma

$$\vdash (B \rightarrow A) \rightarrow (\neg B \rightarrow A) \rightarrow A \quad (\text{Th8})$$

Lemma

$$\vdash (B \rightarrow A) \rightarrow (\neg B \rightarrow A) \rightarrow A \quad (\text{Th8})$$

Beweis.

Lemma

$$\vdash (B \rightarrow A) \rightarrow (\neg B \rightarrow A) \rightarrow A \quad (\text{Th8})$$

Beweis.

0. $\lceil B \rightarrow A$

Ann.

Lemma

$$\vdash (B \rightarrow A) \rightarrow (\neg B \rightarrow A) \rightarrow A \quad (\text{Th8})$$

Beweis.

0.	┌	$B \rightarrow A$	Ann.
1.		$(B \rightarrow A) \rightarrow \neg A \rightarrow \neg B$	Th5

Lemma

$$\vdash (B \rightarrow A) \rightarrow (\neg B \rightarrow A) \rightarrow A \quad (\text{Th8})$$

Beweis.

0.	[$B \rightarrow A$	Ann.
1.		$(B \rightarrow A) \rightarrow \neg A \rightarrow \neg B$	Th5
2.		$\neg A \rightarrow \neg B$	MP, 0,1
	—		

Lemma

$$\vdash (B \rightarrow A) \rightarrow (\neg B \rightarrow A) \rightarrow A \quad (\text{Th8})$$

Beweis.

0.	[$B \rightarrow A$	Ann.
1.		$(B \rightarrow A) \rightarrow \neg A \rightarrow \neg B$	Th5
2.		$\neg A \rightarrow \neg B$	MP, 0,1
3.	[$\neg B \rightarrow A$	Ann.

Lemma

$$\vdash (B \rightarrow A) \rightarrow (\neg B \rightarrow A) \rightarrow A \quad (\text{Th8})$$

Beweis.

0.	[$B \rightarrow A$	Ann.
1.		$(B \rightarrow A) \rightarrow \neg A \rightarrow \neg B$	Th5
2.		$\neg A \rightarrow \neg B$	MP, 0,1
3.	[$\neg B \rightarrow A$	Ann.
4.		$(\neg B \rightarrow A) \rightarrow \neg A \rightarrow \neg \neg B$	Th5

Lemma

$$\vdash (B \rightarrow A) \rightarrow (\neg B \rightarrow A) \rightarrow A \quad (\text{Th8})$$

Beweis.

0.	[$B \rightarrow A$	Ann.
1.		$(B \rightarrow A) \rightarrow \neg A \rightarrow \neg B$	Th5
2.		$\neg A \rightarrow \neg B$	MP, 0,1
3.	[$\neg B \rightarrow A$	Ann.
4.		$(\neg B \rightarrow A) \rightarrow \neg A \rightarrow \neg \neg B$	Th5
5.		$\neg A \rightarrow \neg \neg B$	MP, 3,4

Lemma

$$\vdash (B \rightarrow A) \rightarrow (\neg B \rightarrow A) \rightarrow A \quad (\text{Th8})$$

Beweis.

0.	$B \rightarrow A$	Ann.
1.	$(B \rightarrow A) \rightarrow \neg A \rightarrow \neg B$	Th5
2.	$\neg A \rightarrow \neg B$	MP, 0,1
3.	$\neg B \rightarrow A$	Ann.
4.	$(\neg B \rightarrow A) \rightarrow \neg A \rightarrow \neg \neg B$	Th5
5.	$\neg A \rightarrow \neg \neg B$	MP, 3,4
6.	$(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg \neg B) \rightarrow \neg \neg A$	Th7

Lemma

$$\vdash (B \rightarrow A) \rightarrow (\neg B \rightarrow A) \rightarrow A \quad (\text{Th8})$$

Beweis.

0.	$B \rightarrow A$	Ann.
1.	$(B \rightarrow A) \rightarrow \neg A \rightarrow \neg B$	Th5
2.	$\neg A \rightarrow \neg B$	MP, 0,1
3.	$\neg B \rightarrow A$	Ann.
4.	$(\neg B \rightarrow A) \rightarrow \neg A \rightarrow \neg\neg B$	Th5
5.	$\neg A \rightarrow \neg\neg B$	MP, 3,4
6.	$(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow \neg\neg A$	Th7
7.	$(\neg A \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow \neg\neg A$	MP, 2,6
8.	$\neg\neg A$	MP, 5,7

Lemma

$$\vdash (B \rightarrow A) \rightarrow (\neg B \rightarrow A) \rightarrow A \quad (\text{Th8})$$

Beweis.

0.	$B \rightarrow A$	Ann.
1.	$(B \rightarrow A) \rightarrow \neg A \rightarrow \neg B$	Th5
2.	$\neg A \rightarrow \neg B$	MP, 0,1
3.	$\neg B \rightarrow A$	Ann.
4.	$(\neg B \rightarrow A) \rightarrow \neg A \rightarrow \neg\neg B$	Th5
5.	$\neg A \rightarrow \neg\neg B$	MP, 3,4
6.	$(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow \neg\neg A$	Th7
7.	$(\neg A \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow \neg\neg A$	MP, 2,6
8.	$\neg\neg A$	MP, 5,7
9.	$\neg\neg A \rightarrow A$	Th2

Lemma

$$\vdash (B \rightarrow A) \rightarrow (\neg B \rightarrow A) \rightarrow A \quad (\text{Th8})$$

Beweis.

0.	$B \rightarrow A$	Ann.
1.	$(B \rightarrow A) \rightarrow \neg A \rightarrow \neg B$	Th5
2.	$\neg A \rightarrow \neg B$	MP, 0,1
3.	$\neg B \rightarrow A$	Ann.
4.	$(\neg B \rightarrow A) \rightarrow \neg A \rightarrow \neg \neg B$	Th5
5.	$\neg A \rightarrow \neg \neg B$	MP, 3,4
6.	$(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg \neg B) \rightarrow \neg \neg A$	Th7
7.	$(\neg A \rightarrow \neg \neg B) \rightarrow \neg \neg A$	MP, 2,6
8.	$\neg \neg A$	MP, 5,7
9.	$\neg \neg A \rightarrow A$	Th2
10.	A	MP, 8,9

Lemma

$$\vdash (B \rightarrow A) \rightarrow (\neg B \rightarrow A) \rightarrow A \quad (\text{Th8})$$

Beweis.

0.	$B \rightarrow A$	Ann.
1.	$(B \rightarrow A) \rightarrow \neg A \rightarrow \neg B$	Th5
2.	$\neg A \rightarrow \neg B$	MP, 0,1
3.	$\neg B \rightarrow A$	Ann.
4.	$(\neg B \rightarrow A) \rightarrow \neg A \rightarrow \neg\neg B$	Th5
5.	$\neg A \rightarrow \neg\neg B$	MP, 3,4
6.	$(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow \neg\neg A$	Th7
7.	$(\neg A \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow \neg\neg A$	MP, 2,6
8.	$\neg\neg A$	MP, 5,7
9.	$\neg\neg A \rightarrow A$	Th2
10.	A	MP, 8,9
11.	$(\neg B \rightarrow A) \rightarrow A$	DT, 3-10

Lemma

$$\vdash (B \rightarrow A) \rightarrow (\neg B \rightarrow A) \rightarrow A \quad (\text{Th8})$$

Beweis.

0.	$B \rightarrow A$	Ann.
1.	$(B \rightarrow A) \rightarrow \neg A \rightarrow \neg B$	Th5
2.	$\neg A \rightarrow \neg B$	MP, 0,1
3.	$\neg B \rightarrow A$	Ann.
4.	$(\neg B \rightarrow A) \rightarrow \neg A \rightarrow \neg \neg B$	Th5
5.	$\neg A \rightarrow \neg \neg B$	MP, 3,4
6.	$(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg \neg B) \rightarrow \neg \neg A$	Th7
7.	$(\neg A \rightarrow \neg \neg B) \rightarrow \neg \neg A$	MP, 2,6
8.	$\neg \neg A$	MP, 5,7
9.	$\neg \neg A \rightarrow A$	Th2
10.	A	MP, 8,9
11.	$(\neg B \rightarrow A) \rightarrow A$	DT, 3-10
12.	$(B \rightarrow A) \rightarrow (\neg B \rightarrow A) \rightarrow A$	DT, 0-11



Zusammenfassung

Künftig dürfen wir neben den ursprünglichen Regeln von \mathcal{K}_0 (MP, Ax1, Ax2, Ax3) und dem syntaktischen Deduktionstheorem auch die Tautologie-Schemata (Th1) – (Th8) in Ableitungen verwenden:

Zusammenfassung

Künftig dürfen wir neben den ursprünglichen Regeln von \mathcal{K}_0 (MP, Ax1, Ax2, Ax3) und dem syntaktischen Deduktionstheorem auch die Tautologie-Schemata (Th1) – (Th8) in Ableitungen verwenden:

- ▷ (Th1) $\vdash A \rightarrow A$

Zusammenfassung

Künftig dürfen wir neben den ursprünglichen Regeln von \mathcal{K}_0 (MP, Ax1, Ax2, Ax3) und dem syntaktischen Deduktionstheorem auch die Tautologie-Schemata (Th1) – (Th8) in Ableitungen verwenden:

- ▷ (Th1) $\vdash A \rightarrow A$
- ▷ (Th2) $\vdash \neg\neg A \rightarrow A$

Zusammenfassung

Künftig dürfen wir neben den ursprünglichen Regeln von \mathcal{K}_0 (MP, Ax1, Ax2, Ax3) und dem syntaktischen Deduktionstheorem auch die Tautologie-Schemata (Th1) – (Th8) in Ableitungen verwenden:

- ▷ (Th1) $\vdash A \rightarrow A$
- ▷ (Th2) $\vdash \neg\neg A \rightarrow A$
- ▷ (Th3) $\neg B \rightarrow B \rightarrow A$

Zusammenfassung

Künftig dürfen wir neben den ursprünglichen Regeln von \mathcal{K}_0 (MP, Ax1, Ax2, Ax3) und dem syntaktischen Deduktionstheorem auch die Tautologie-Schemata (Th1) – (Th8) in Ableitungen verwenden:

- ▷ (Th1) $\vdash A \rightarrow A$
- ▷ (Th2) $\vdash \neg\neg A \rightarrow A$
- ▷ (Th3) $\neg B \rightarrow B \rightarrow A$
- ▷ (Th4) $\vdash B \rightarrow \neg\neg B$

Zusammenfassung

Künftig dürfen wir neben den ursprünglichen Regeln von \mathcal{K}_0 (MP, Ax1, Ax2, Ax3) und dem syntaktischen Deduktionstheorem auch die Tautologie-Schemata (Th1) – (Th8) in Ableitungen verwenden:

- ▷ (Th1) $\vdash A \rightarrow A$
- ▷ (Th2) $\vdash \neg\neg A \rightarrow A$
- ▷ (Th3) $\neg B \rightarrow B \rightarrow A$
- ▷ (Th4) $\vdash B \rightarrow \neg\neg B$
- ▷ (Th5) $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$

Zusammenfassung

Künftig dürfen wir neben den ursprünglichen Regeln von \mathcal{K}_0 (MP, Ax1, Ax2, Ax3) und dem syntaktischen Deduktionstheorem auch die Tautologie-Schemata (Th1) – (Th8) in Ableitungen verwenden:

- ▷ (Th1) $\vdash A \rightarrow A$
- ▷ (Th2) $\vdash \neg\neg A \rightarrow A$
- ▷ (Th3) $\neg B \rightarrow B \rightarrow A$
- ▷ (Th4) $\vdash B \rightarrow \neg\neg B$
- ▷ (Th5) $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$
- ▷ (Th6) $\vdash A \rightarrow \neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$

Zusammenfassung

Künftig dürfen wir neben den ursprünglichen Regeln von \mathcal{K}_0 (MP, Ax1, Ax2, Ax3) und dem syntaktischen Deduktionstheorem auch die Tautologie-Schemata (Th1) – (Th8) in Ableitungen verwenden:

- ▷ (Th1) $\vdash A \rightarrow A$
- ▷ (Th2) $\vdash \neg\neg A \rightarrow A$
- ▷ (Th3) $\neg B \rightarrow B \rightarrow A$
- ▷ (Th4) $\vdash B \rightarrow \neg\neg B$
- ▷ (Th5) $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$
- ▷ (Th6) $\vdash A \rightarrow \neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$
- ▷ (Th7) $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A$

Zusammenfassung

Künftig dürfen wir neben den ursprünglichen Regeln von \mathcal{K}_0 (MP, Ax1, Ax2, Ax3) und dem syntaktischen Deduktionstheorem auch die Tautologie-Schemata (Th1) – (Th8) in Ableitungen verwenden:

- ▷ (Th1) $\vdash A \rightarrow A$
- ▷ (Th2) $\vdash \neg\neg A \rightarrow A$
- ▷ (Th3) $\neg B \rightarrow B \rightarrow A$
- ▷ (Th4) $\vdash B \rightarrow \neg\neg B$
- ▷ (Th5) $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$
- ▷ (Th6) $\vdash A \rightarrow \neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$
- ▷ (Th7) $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A$
- ▷ (Th8) $(B \rightarrow A) \rightarrow (\neg B \rightarrow A) \rightarrow A$

Zusammenfassung

Künftig dürfen wir neben den ursprünglichen Regeln von \mathcal{K}_0 (MP, Ax1, Ax2, Ax3) und dem syntaktischen Deduktionstheorem auch die Tautologie-Schemata (Th1) – (Th8) in Ableitungen verwenden:

- ▷ (Th1) $\vdash A \rightarrow A$
- ▷ (Th2) $\vdash \neg\neg A \rightarrow A$
- ▷ (Th3) $\neg B \rightarrow B \rightarrow A$
- ▷ (Th4) $\vdash B \rightarrow \neg\neg B$
- ▷ (Th5) $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$
- ▷ (Th6) $\vdash A \rightarrow \neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$
- ▷ (Th7) $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A$
- ▷ (Th8) $(B \rightarrow A) \rightarrow (\neg B \rightarrow A) \rightarrow A$

Definition

Eine Menge $\Gamma \subseteq \mathcal{F}_0$ heißt **widersprüchlich** oder **inkonsistent**, wenn eine Formel $B \in \mathcal{F}_0$ mit $\Gamma \vdash B$ und $\Gamma \vdash \neg B$ existiert.

0-Korrektheit und 0-Vollständigkeit von \mathcal{K}_0 , Vorarbeiten

Satz

Eine Formel ist genau dann Theorem von \mathcal{K}_0 , wenn sie eine Tautologie ist.

0-Korrektheit und 0-Vollständigkeit von \mathcal{K}_0 , Vorarbeiten

Satz

Eine Formel ist genau dann Theorem von \mathcal{K}_0 , wenn sie eine Tautologie ist.

Die Notwendigkeit (**0-Korrektheit** des Kalküls) ist leicht (HA). Der Beweis der Hinlänglichkeit (**0-Vollständigkeit**) erfordert einige Vorarbeit.

0-Korrektheit und 0-Vollständigkeit von \mathcal{K}_0 , Vorarbeiten

Satz

Eine Formel ist genau dann Theorem von \mathcal{K}_0 , wenn sie eine Tautologie ist.

Die Notwendigkeit (0-Korrektheit des Kalküls) ist leicht (HA). Der Beweis der Hinlänglichkeit (0-Vollständigkeit) erfordert einige Vorarbeit.

Lemma

Für eine Teilmenge \mathcal{A}_0 von Atomen, eine Formel $A \in \mathcal{F}_0[\mathcal{A}_0]$ (in den Junktoren \neg und \rightarrow) und eine Belegung $\varphi \in \mathbb{B}^{\mathcal{A}}$ gilt $\varphi_{\mathcal{A}_0} \vdash \varphi A$.

0-Korrektheit und 0-Vollständigkeit von \mathcal{K}_0 , Vorarbeiten

Satz

Eine Formel ist genau dann Theorem von \mathcal{K}_0 , wenn sie eine Tautologie ist.

Die Notwendigkeit (0-Korrektheit des Kalküls) ist leicht (HA). Der Beweis der Hinlänglichkeit (0-Vollständigkeit) erfordert einige Vorarbeit.

Lemma

Für eine Teilmenge \mathcal{A}_0 von Atomen, eine Formel $A \in \mathcal{F}_0[\mathcal{A}_0]$ (in den Junktoren \neg und \rightarrow) und eine Belegung $\varphi \in \mathbb{B}^{\mathcal{A}}$ gilt $\varphi \mathcal{A}_0 \vdash \varphi A$.

Beweis. (Strukturelle Induktion über A)

0-Korrektheit und 0-Vollständigkeit von \mathcal{K}_0 , Vorarbeiten

Satz

Eine Formel ist genau dann Theorem von \mathcal{K}_0 , wenn sie eine Tautologie ist.

Die Notwendigkeit (0-Korrektheit des Kalküls) ist leicht (HA). Der Beweis der Hinlänglichkeit (0-Vollständigkeit) erfordert einige Vorarbeit.

Lemma

Für eine Teilmenge \mathcal{A}_0 von Atomen, eine Formel $A \in \mathcal{F}_0[\mathcal{A}_0]$ (in den Junktoren \neg und \rightarrow) und eine Belegung $\varphi \in \mathbb{B}^{\mathcal{A}}$ gilt $\varphi \mathcal{A}_0 \vdash \varphi A$.

Beweis. (Strukturelle Induktion über A)

- A atomar impliziert $A = p \in \mathcal{A}_0$, also $\varphi A \in \varphi \mathcal{A}_0$.

0-Korrektheit und 0-Vollständigkeit von \mathcal{K}_0 , Vorarbeiten

Satz

Eine Formel ist genau dann Theorem von \mathcal{K}_0 , wenn sie eine Tautologie ist.

Die Notwendigkeit (0-Korrektheit des Kalküls) ist leicht (HA). Der Beweis der Hinlänglichkeit (0-Vollständigkeit) erfordert einige Vorarbeit.

Lemma

Für eine Teilmenge \mathcal{A}_0 von Atomen, eine Formel $A \in \mathcal{F}_0[\mathcal{A}_0]$ (in den Junktoren \neg und \rightarrow) und eine Belegung $\varphi \in \mathbb{B}^{\mathcal{A}}$ gilt $\varphi\mathcal{A}_0 \vdash \varphi A$.

Beweis. (Strukturelle Induktion über A)

- A atomar impliziert $A = p \in \mathcal{A}_0$, also $\varphi A \in \varphi\mathcal{A}_0$.
- $A = \neg B$ und B ist aus $\varphi\mathcal{A}_0$ herleitbar.

0-Korrektheit und 0-Vollständigkeit von \mathcal{K}_0 , Vorarbeiten

Satz

Eine Formel ist genau dann Theorem von \mathcal{K}_0 , wenn sie eine Tautologie ist.

Die Notwendigkeit (0-Korrektheit des Kalküls) ist leicht (HA). Der Beweis der Hinlänglichkeit (0-Vollständigkeit) erfordert einige Vorarbeit.

Lemma

Für eine Teilmenge \mathcal{A}_0 von Atomen, eine Formel $A \in \mathcal{F}_0[\mathcal{A}_0]$ (in den Junktoren \neg und \rightarrow) und eine Belegung $\varphi \in \mathbb{B}^{\mathcal{A}}$ gilt $\varphi\mathcal{A}_0 \vdash \varphi A$.

Beweis. (Strukturelle Induktion über A)

- A atomar impliziert $A = p \in \mathcal{A}_0$, also $\varphi A \in \varphi\mathcal{A}_0$.
- $A = \neg B$ und B ist aus $\varphi\mathcal{A}_0$ herleitbar.
 - $\hat{\varphi}(B) = 0$ impliziert $\varphi B = \neg B = A = \varphi A$; fertig.

0-Korrektheit und 0-Vollständigkeit von \mathcal{K}_0 , Vorarbeiten

Satz

Eine Formel ist genau dann Theorem von \mathcal{K}_0 , wenn sie eine Tautologie ist.

Die Notwendigkeit (0-Korrektheit des Kalküls) ist leicht (HA). Der Beweis der Hinlänglichkeit (0-Vollständigkeit) erfordert einige Vorarbeit.

Lemma

Für eine Teilmenge \mathcal{A}_0 von Atomen, eine Formel $A \in \mathcal{F}_0[\mathcal{A}_0]$ (in den Junktoren \neg und \rightarrow) und eine Belegung $\varphi \in \mathbb{B}^{\mathcal{A}}$ gilt $\varphi \mathcal{A}_0 \vdash \varphi A$.

Beweis. (Strukturelle Induktion über A)

- A atomar impliziert $A = p \in \mathcal{A}_0$, also $\varphi A \in \varphi \mathcal{A}_0$.
- $A = \neg B$ und B ist aus $\varphi \mathcal{A}_0$ herleitbar.
 - $\hat{\varphi}(B) = 0$ impliziert $\varphi B = \neg B = A = \varphi A$; fertig.
 - $\hat{\varphi}(B) = 1$ impliziert $\varphi B = B$ und $\varphi A = \neg A = \neg \neg B$.

0-Korrektheit und 0-Vollständigkeit von \mathcal{K}_0 , Vorarbeiten

Satz

Eine Formel ist genau dann Theorem von \mathcal{K}_0 , wenn sie eine Tautologie ist.

Die Notwendigkeit (0-Korrektheit des Kalküls) ist leicht (HA). Der Beweis der Hinlänglichkeit (0-Vollständigkeit) erfordert einige Vorarbeit.

Lemma

Für eine Teilmenge \mathcal{A}_0 von Atomen, eine Formel $A \in \mathcal{F}_0[\mathcal{A}_0]$ (in den Junktoren \neg und \rightarrow) und eine Belegung $\varphi \in \mathbb{B}^{\mathcal{A}}$ gilt $\varphi\mathcal{A}_0 \vdash \varphi A$.

Beweis. (Strukturelle Induktion über A)

- A atomar impliziert $A = p \in \mathcal{A}_0$, also $\varphi A \in \varphi\mathcal{A}_0$.
- $A = \neg B$ und B ist aus $\varphi\mathcal{A}_0$ herleitbar.
 - $\hat{\varphi}(B) = 0$ impliziert $\varphi B = \neg B = A = \varphi A$; fertig.
 - $\hat{\varphi}(B) = 1$ impliziert $\varphi B = B$ und $\varphi A = \neg A = \neg\neg B$. Damit genügt es, $B \vdash \neg\neg B$ nachzuweisen, was mittels MP aus (Th4) folgt.

Beweis. (Fortsetzung)

Beweis. (Fortsetzung)

- $A = B \rightarrow C$ und sowohl φB als auch φC sind herleitbar.

Beweis. (Fortsetzung)

- $A = B \rightarrow C$ und sowohl φB als auch φC sind herleitbar.
 - $\hat{\varphi}(C) = 1$ impliziert $\varphi C = C$ und $\varphi A = B \rightarrow C$.

Beweis. (Fortsetzung)

- $A = B \rightarrow C$ und sowohl φB als auch φC sind herleitbar.
 - $\hat{\varphi}(C) = 1$ impliziert $\varphi C = C$ und $\varphi A = B \rightarrow C$. Damit genügt es, $C \vdash B \rightarrow C$ nachzuweisen, was sofort aus Ax1 folgt.

Beweis. (Fortsetzung)

- $A = B \rightarrow C$ und sowohl φB als auch φC sind herleitbar.
 - $\hat{\varphi}(C) = 1$ impliziert $\varphi C = C$ und $\varphi A = B \rightarrow C$. Damit genügt es, $C \vdash B \rightarrow C$ nachzuweisen, was sofort aus Ax1 folgt.
 - $\hat{\varphi}(B) = 0$ impliziert $\varphi B = \neg B$ und $\varphi A = B \rightarrow C$.

Beweis. (Fortsetzung)

- $A = B \rightarrow C$ und sowohl φB als auch φC sind herleitbar.
 - $\hat{\varphi}(C) = 1$ impliziert $\varphi C = C$ und $\varphi A = B \rightarrow C$. Damit genügt es, $C \vdash B \rightarrow C$ nachzuweisen, was sofort aus Ax1 folgt.
 - $\hat{\varphi}(B) = 0$ impliziert $\varphi B = \neg B$ und $\varphi A = B \rightarrow C$. Damit genügt es, $\neg B \vdash B \rightarrow C$ nachzuweisen, was sofort aus (Th3) folgt.

Beweis. (Fortsetzung)

- $A = B \rightarrow C$ und sowohl φB als auch φC sind herleitbar.
 - $\hat{\varphi}(C) = 1$ impliziert $\varphi C = C$ und $\varphi A = B \rightarrow C$. Damit genügt es, $C \vdash B \rightarrow C$ nachzuweisen, was sofort aus Ax1 folgt.
 - $\hat{\varphi}(B) = 0$ impliziert $\varphi B = \neg B$ und $\varphi A = B \rightarrow C$. Damit genügt es, $\neg B \vdash B \rightarrow C$ nachzuweisen, was sofort aus (Th3) folgt.
 - $\hat{\varphi}(C) = 0$ und $\hat{\varphi}(B) = 1$ impliziert $\varphi C = \neg C$, $\varphi B = B$ und $\varphi A = \neg(B \rightarrow C)$.

Beweis. (Fortsetzung)

- $A = B \rightarrow C$ und sowohl φB als auch φC sind herleitbar.
 - $\hat{\varphi}(C) = 1$ impliziert $\varphi C = C$ und $\varphi A = B \rightarrow C$. Damit genügt es, $C \vdash B \rightarrow C$ nachzuweisen, was sofort aus Ax1 folgt.
 - $\hat{\varphi}(B) = 0$ impliziert $\varphi B = \neg B$ und $\varphi A = B \rightarrow C$. Damit genügt es, $\neg B \vdash B \rightarrow C$ nachzuweisen, was sofort aus (Th3) folgt.
 - $\hat{\varphi}(C) = 0$ und $\hat{\varphi}(B) = 1$ impliziert $\varphi C = \neg C$, $\varphi B = B$ und $\varphi A = \neg(B \rightarrow C)$. Damit genügt es, $\{B, \neg C\} \vdash \neg(B \rightarrow C)$ nachzuweisen, und das folgt aus (Th6). □

Beweis. (Fortsetzung)

- $A = B \rightarrow C$ und sowohl φB als auch φC sind herleitbar.
 - $\hat{\varphi}(C) = 1$ impliziert $\varphi C = C$ und $\varphi A = B \rightarrow C$. Damit genügt es, $C \vdash B \rightarrow C$ nachzuweisen, was sofort aus Ax1 folgt.
 - $\hat{\varphi}(B) = 0$ impliziert $\varphi B = \neg B$ und $\varphi A = B \rightarrow C$. Damit genügt es, $\neg B \vdash B \rightarrow C$ nachzuweisen, was sofort aus (Th3) folgt.
 - $\hat{\varphi}(C) = 0$ und $\hat{\varphi}(B) = 1$ impliziert $\varphi C = \neg C$, $\varphi B = B$ und $\varphi A = \neg(B \rightarrow C)$. Damit genügt es, $\{B, \neg C\} \vdash \neg(B \rightarrow C)$ nachzuweisen, und das folgt aus (Th6). □

Lemma

Mit $\Gamma \cup B \vdash A$ und $\Gamma \cup \{\neg B\} \vdash A$ gilt auch $\Gamma \vdash A$.

Beweis. (Fortsetzung)

- $A = B \rightarrow C$ und sowohl φB als auch φC sind herleitbar.
 - $\hat{\varphi}(C) = 1$ impliziert $\varphi C = C$ und $\varphi A = B \rightarrow C$. Damit genügt es, $C \vdash B \rightarrow C$ nachzuweisen, was sofort aus Ax1 folgt.
 - $\hat{\varphi}(B) = 0$ impliziert $\varphi B = \neg B$ und $\varphi A = B \rightarrow C$. Damit genügt es, $\neg B \vdash B \rightarrow C$ nachzuweisen, was sofort aus (Th3) folgt.
 - $\hat{\varphi}(C) = 0$ und $\hat{\varphi}(B) = 1$ impliziert $\varphi C = \neg C$, $\varphi B = B$ und $\varphi A = \neg(B \rightarrow C)$. Damit genügt es, $\{B, \neg C\} \vdash \neg(B \rightarrow C)$ nachzuweisen, und das folgt aus (Th6). □

Lemma

Mit $\Gamma \cup B \vdash A$ und $\Gamma \cup \{\neg B\} \vdash A$ gilt auch $\Gamma \vdash A$.

Beweis.

DT liefert $\Gamma \vdash B \rightarrow A$ sowie $\Gamma \vdash \neg B \rightarrow A$. Aber $\{B \rightarrow A, \neg B \rightarrow A\} \vdash A$ folgt nach zweimaliger Anwendung von (MP) aus (Th8). □

0-Vollständigkeit von \mathcal{K}_0

Beweis.

A sei eine Tautologie, in der n Atome auftreten, etwa $\{p_i : i < n\}$.
Nach dem ersten Lemma gilt für jede Belegung φ

$$\varphi\{p_i : i < n\} \vdash \varphi A$$

0-Vollständigkeit von \mathcal{K}_0

Beweis.

A sei eine Tautologie, in der n Atome auftreten, etwa $\{p_i : i < n\}$.
Nach dem ersten Lemma gilt für jede Belegung φ

$$\varphi\{p_i : i < n\} \vdash \varphi A = A \quad (\star)$$

0-Vollständigkeit von \mathcal{K}_0

Beweis.

A sei eine Tautologie, in der n Atome auftreten, etwa $\{p_i : i < n\}$.
Nach dem ersten Lemma gilt für jede Belegung φ

$$\varphi\{p_i : i < n\} \vdash \varphi A = A \quad (\star)$$

Das zweite Lemma erlaubt es, induktiv die Atome p_i , $i < n$, auf der linken Seite zu entfernen, bis $\vdash A$ übrigbleibt:

0-Vollständigkeit von \mathcal{K}_0

Beweis.

A sei eine Tautologie, in der n Atome auftreten, etwa $\{p_i : i < n\}$.
 Nach dem ersten Lemma gilt für jede Belegung φ

$$\varphi\{p_i : i < n\} \vdash \varphi A = A \quad (\star)$$

Das zweite Lemma erlaubt es, induktiv die Atome p_i , $i < n$, auf der linken Seite zu entfernen, bis $\vdash A$ übrigbleibt: Wähle φ beliebig und setze

$$\varphi_k(p_j) = \begin{cases} \varphi(p_i) & \text{falls } i < k \\ 1 - \varphi(p_i) & \text{falls } i \geq k \end{cases} \quad \text{für } k < n$$

0-Vollständigkeit von \mathcal{K}_0

Beweis.

A sei eine Tautologie, in der n Atome auftreten, etwa $\{p_i : i < n\}$.
Nach dem ersten Lemma gilt für jede Belegung φ

$$\varphi\{p_i : i < n\} \vdash \varphi A = A \quad (\star)$$

Das zweite Lemma erlaubt es, induktiv die Atome p_i , $i < n$, auf der linken Seite zu entfernen, bis $\vdash A$ übrigbleibt: Wähle φ beliebig und setze

$$\varphi_k(p_j) = \begin{cases} \varphi(p_j) & \text{falls } i < k \\ 1 - \varphi(p_j) & \text{falls } i \geq k \end{cases} \quad \text{für } k < n$$

All diese $k + 1$ Belegungen erfüllen (\star) . Da sich $\varphi_{k-1}\{p_i : i < n\}$ und $\varphi_k\{p_i : i < n\}$ an genau einer Stelle unterscheiden, folgt nach dem zweiten Lemma $\varphi\{p_i : i < k\} \vdash A$ für alle $k < n$, speziell $k = 0$. \square

Korrektheit und Vollständigkeit von \mathcal{K}_0

Satz

A ist genau dann in \mathcal{K}_0 aus Γ ableitbar, wenn A logisch aus Γ folgt.

Korrektheit und Vollständigkeit von \mathcal{K}_0

Satz

A ist genau dann in \mathcal{K}_0 aus Γ ableitbar, wenn A logisch aus Γ folgt.

Beweis.

Im Folgenden sei $\Gamma_0 = \{A_i : i < n\}$ eine endliche Teilmenge von Γ .

$$\Gamma \vdash B$$

Korrektheit und Vollständigkeit von \mathcal{K}_0

Satz

A ist genau dann in \mathcal{K}_0 aus Γ ableitbar, wenn A logisch aus Γ folgt.

Beweis.

Im Folgenden sei $\Gamma_0 = \{A_i : i < n\}$ eine endliche Teilmenge von Γ .

$\Gamma \vdash B$ gdw. es gibt $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ mit $\Gamma_0 \vdash B$

Korrektheit und Vollständigkeit von \mathcal{K}_0

Satz

A ist genau dann in \mathcal{K}_0 aus Γ ableitbar, wenn A logisch aus Γ folgt.

Beweis.

Im Folgenden sei $\Gamma_0 = \{A_i : i < n\}$ eine endliche Teilmenge von Γ .

$\Gamma \vdash B$ gdw. es gibt $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ mit $\Gamma_0 \vdash B$

gdw. es gibt $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ mit $\vdash A_0 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_{n-1} \rightarrow B$

Korrektheit und Vollständigkeit von \mathcal{K}_0

Satz

A ist genau dann in \mathcal{K}_0 aus Γ ableitbar, wenn A logisch aus Γ folgt.

Beweis.

Im Folgenden sei $\Gamma_0 = \{A_i : i < n\}$ eine endliche Teilmenge von Γ .

$\Gamma \vdash B$ gdw. es gibt $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ mit $\Gamma_0 \vdash B$

gdw. es gibt $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ mit $\vdash A_0 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_{n-1} \rightarrow B$

gdw. es gibt $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ mit $\models A_0 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_{n-1} \rightarrow B$

Korrektheit und Vollständigkeit von \mathcal{K}_0

Satz

A ist genau dann in \mathcal{K}_0 aus Γ ableitbar, wenn A logisch aus Γ folgt.

Beweis.

Im Folgenden sei $\Gamma_0 = \{A_i : i < n\}$ eine endliche Teilmenge von Γ .

$\Gamma \vdash B$ gdw. es gibt $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ mit $\Gamma_0 \vdash B$

gdw. es gibt $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ mit $\vdash A_0 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_{n-1} \rightarrow B$

gdw. es gibt $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ mit $\models A_0 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_{n-1} \rightarrow B$

gdw. es gibt $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ mit $\Gamma_0 \models B$

Korrektheit und Vollständigkeit von \mathcal{K}_0

Satz

A ist genau dann in \mathcal{K}_0 aus Γ ableitbar, wenn A logisch aus Γ folgt.

Beweis.

Im Folgenden sei $\Gamma_0 = \{A_i : i < n\}$ eine endliche Teilmenge von Γ .

$\Gamma \vdash B$ gdw. es gibt $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ mit $\Gamma_0 \vdash B$

gdw. es gibt $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ mit $\vdash A_0 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_{n-1} \rightarrow B$

gdw. es gibt $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ mit $\models A_0 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_{n-1} \rightarrow B$

gdw. es gibt $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ mit $\Gamma_0 \models B$

gdw. $\Gamma \models B$ □

Korrektheit und Vollständigkeit von \mathcal{K}_0

Satz

A ist genau dann in \mathcal{K}_0 aus Γ ableitbar, wenn A logisch aus Γ folgt.

Beweis.

Im Folgenden sei $\Gamma_0 = \{A_i : i < n\}$ eine endliche Teilmenge von Γ .

$\Gamma \vdash B$ gdw. es gibt $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ mit $\Gamma_0 \vdash B$

gdw. es gibt $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ mit $\vdash A_0 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_{n-1} \rightarrow B$

gdw. es gibt $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ mit $\models A_0 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_{n-1} \rightarrow B$

gdw. es gibt $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ mit $\Gamma_0 \models B$

gdw. $\Gamma \models B$ □

Hier wurden auf der semantischen und der syntaktischen Seite jeweils die entsprechenden Kompaktheitssätze und Deduktionstheoreme angewendet, und „in der Mitte“ die prämissenfreie Variante des Satzes.

Bemerkungen

²David Hilbert (1862–1943)

³Jan Łukasiewicz (1878–1956), auch Erfinder der sog. „polnischen Notation“

⁴Gottlob Frege (1848–1925)

Bemerkungen

- ▶ Der wesentliche Punkt des obigen Beweises ist die Verfügbarkeit des syntaktischen Deduktionstheorems (DT) für den Kalkül \mathcal{K}_0 .

²David Hilbert (1862–1943)

³Jan Łukasiewicz (1878–1956), auch Erfinder der sog. „polnischen Notation“

⁴Gottlob Frege (1848–1925)

Bemerkungen

- ▷ Der wesentliche Punkt des obigen Beweises ist die Verfügbarkeit des syntaktischen Deduktionstheorems (DT) für den Kalkül \mathcal{K}_0 .
- ▷ Für andere Kalküle \mathcal{K} mit dem Junktor \rightarrow stellt sich die Frage, ob sie das Deduktionstheorem $\Gamma \vdash_{\mathcal{K}} A \rightarrow B$ gdw. $\Gamma \cup \{A\} \vdash_{\mathcal{K}} B$ erfüllen.

²David Hilbert (1862–1943)

³Jan Łukasiewicz (1878–1956), auch Erfinder der sog. „polnischen Notation“

⁴Gottlob Frege (1848–1925)

Bemerkungen

- ▷ Der wesentliche Punkt des obigen Beweises ist die Verfügbarkeit des syntaktischen Deduktionstheorems (DT) für den Kalkül \mathcal{K}_0 .
- ▷ Für andere Kalküle \mathcal{K} mit dem Junktor \rightarrow stellt sich die Frage, ob sie das Deduktionstheorem $\Gamma \vdash_{\mathcal{K}} A \rightarrow B$ gdw. $\Gamma \cup \{A\} \vdash_{\mathcal{K}} B$ erfüllen.
- ▷ Man kann zeigen, dass aus der Gültigkeit des DT die Schemata (MP), (Ax1) und (Ax2) herleitbar sind. Das Schema (Ax3), das nicht im Beweis des DT für \mathcal{K}_0 verwendet wurde, kann hingegen auch durch andere Schemata ersetzt werden (z.B. Varianten des **modus tollens**).

²David Hilbert (1862–1943)

³Jan Łukasiewicz (1878–1956), auch Erfinder der sog. „polnischen Notation“

⁴Gottlob Frege (1848–1925)

Bemerkungen

- ▷ Der wesentliche Punkt des obigen Beweises ist die Verfügbarkeit des syntaktischen Deduktionstheorems (DT) für den Kalkül \mathcal{K}_0 .
- ▷ Für andere Kalküle \mathcal{K} mit dem Junktor \rightarrow stellt sich die Frage, ob sie das Deduktionstheorem $\Gamma \vdash_{\mathcal{K}} A \rightarrow B$ gdw. $\Gamma \cup \{A\} \vdash_{\mathcal{K}} B$ erfüllen.
- ▷ Man kann zeigen, dass aus der Gültigkeit des DT die Schemata (MP), (Ax1) und (Ax2) herleitbar sind. Das Schema (Ax3), das nicht im Beweis des DT für \mathcal{K}_0 verwendet wurde, kann hingegen auch durch andere Schemata ersetzt werden (z.B. Varianten des **modus tollens**).
- ▷ Deduktive Systeme der Logik, die wie \mathcal{K}_0 möglichst wenige Schlußregeln verwenden, werden **Hilbert**²-Kalküle genannt. \mathcal{K}_0 selbst geht auf **Łukasiewicz**³ zurück, und stellt eine Vereinfachung des bahnbrechenden Systems von **Frege**⁴ dar.

²David Hilbert (1862–1943)

³Jan Łukasiewicz (1878–1956), auch Erfinder der sog. „polnischen Notation“

⁴Gottlob Frege (1848–1925)

Andere deduktive Systeme: natürliche Deduktion

Die herausgehobene Bedeutung des Junktors \rightarrow und die Auswahl der Axiomschemata in Hilbert-Kalkülen gelten nicht universell als Vorteile: was zeichnet (Ax2) aus, wenn $A \rightarrow A$ aufwändig hergeleitet werden muß?

⁵Stanisław Jaśkowski (1906–1965)

⁶Gerhard Gentzen (1909–1945)

Andere deduktive Systeme: natürliche Deduktion

Die herausgehobene Bedeutung des Junktors \rightarrow und die Auswahl der Axiomschemata in Hilbert-Kalkülen gelten nicht universell als Vorteile: was zeichnet (Ax2) aus, wenn $A \rightarrow A$ aufwändig hergeleitet werden muß?

▶ Dagegen haben Kalküle des ▶ natürlichen Schließens keine Axiome. Ihre Einführungs- und Eliminationsregeln für die einzelnen Junktoren in \mathcal{J} sollen fundamentale Wahrheiten über diese ausdrücken (Jaśkowski⁵ und unabhängig Gentzen⁶, 1934).

⁵Stanisław Jaśkowski (1906–1965)

⁶Gerhard Gentzen (1909–1945)

Andere deduktive Systeme: natürliche Deduktion

Die herausgehobene Bedeutung des Junktors \rightarrow und die Auswahl der Axiomschemata in Hilbert-Kalkülen gelten nicht universell als Vorteile: was zeichnet (Ax2) aus, wenn $A \rightarrow A$ aufwändig hergeleitet werden muß?

► Dagegen haben Kalküle des ► natürlichen Schließens keine Axiome. Ihre Einführungs- und Eliminationsregeln für die einzelnen Junktoren in \mathcal{J} sollen fundamentale Wahrheiten über diese ausdrücken (Jaśkowski⁵ und unabhängig Gentzen⁶, 1934). Das Symbol \vdash wandelt seine Rolle von einer externen Relation zu einem Bestandteil der Syntax:

⁵Stanisław Jaśkowski (1906–1965)

⁶Gerhard Gentzen (1909–1945)

Andere deduktive Systeme: natürliche Deduktion

Die herausgehobene Bedeutung des Junktors \rightarrow und die Auswahl der Axiomschemata in Hilbert-Kalkülen gelten nicht universell als Vorteile: was zeichnet (Ax2) aus, wenn $A \rightarrow A$ aufwändig hergeleitet werden muß?

▶ Dagegen haben Kalküle des ▶ natürlichen Schließens keine Axiome. Ihre Einführungs- und Eliminationsregeln für die einzelnen Junktoren in \mathcal{J} sollen fundamentale Wahrheiten über diese ausdrücken (Jaśkowski⁵ und unabhängig Gentzen⁶, 1934). Das Symbol \vdash wandelt seine Rolle von einer externen Relation zu einem Bestandteil der Syntax: die Formeln von \mathcal{K}_{nat} sind sog. Sequenzen $B_0, \dots, B_{n-1} \vdash A$, und die Ableitbarkeit von A aus den B_i , $i < n$, meint nun, dass obige Sequenz ein Theorem von \mathcal{K}_{nat} ist.

⁵Stanisław Jaśkowski (1906–1965)

⁶Gerhard Gentzen (1909–1945)

Andere deduktive Systeme: natürliche Deduktion

Die herausgehobene Bedeutung des Junktors \rightarrow und die Auswahl der Axiomschemata in Hilbert-Kalkülen gelten nicht universell als Vorteile: was zeichnet (Ax2) aus, wenn $A \rightarrow A$ aufwändig hergeleitet werden muß?

► Dagegen haben Kalküle des ► natürlichen Schließens keine Axiome. Ihre Einführungs- und Eliminationsregeln für die einzelnen Junktoren in \mathcal{J} sollen fundamentale Wahrheiten über diese ausdrücken (Jaśkowski⁵ und unabhängig Gentzen⁶, 1934). Das Symbol \vdash wandelt seine Rolle von einer externen Relation zu einem Bestandteil der Syntax: die Formeln von \mathcal{K}_{nat} sind sog. Sequenzen $B_0, \dots, B_{n-1} \vdash A$, und die Ableitbarkeit von A aus den B_i , $i < n$, meint nun, dass obige Sequenz ein Theorem von \mathcal{K}_{nat} ist. Dieses System ermöglicht eine sehr effiziente Konstruktion von Beweisen in intuitionistischer Logik, die im Gegensatz zur klassischen Logik die Eliminierung doppelter Negation nicht zuläßt.

⁵Stanisław Jaśkowski (1906–1965)

⁶Gerhard Gentzen (1909–1945)

Andere deduktive Systeme: Gentzen-Kalkül, siehe Skript

Gentzens ▶ zweites System war ursprünglich als technisches Hilfsmittel zum Beweis der Konsistenz der Prädikatenlogik gedacht.

Andere deduktive Systeme: Gentzen-Kalkül, siehe Skript

Gentzens ▶ zweites System war ursprünglich als technisches Hilfsmittel zum Beweis der Konsistenz der Prädikatenlogik gedacht.

Es verwendet als Formeln(!) symmetrischen Sequenzen $\Gamma \vdash \Delta$, bei denen links und rechts endliche Folgen von Formeln aus $\mathcal{F}[\mathcal{A}]$ stehen dürfen. Eine solche Sequenz ist **korrekt**, wenn $\bigwedge \Gamma \rightarrow \bigvee \Delta$ allgemeingültig ist.

Andere deduktive Systeme: Gentzen-Kalkül, siehe Skript

Gentzens ▶ zweites System war ursprünglich als technisches Hilfsmittel zum Beweis der Konsistenz der Prädikatenlogik gedacht.

Es verwendet als Formeln(!) symmetrischen Sequenzen $\Gamma \vdash \Delta$, bei denen links und rechts endliche Folgen von Formeln aus $\mathcal{F}[\mathcal{A}]$ stehen dürfen. Eine solche Sequenz ist **korrekt**, wenn $\bigwedge \Gamma \rightarrow \bigvee \Delta$ allgemeingültig ist.

Prämissen, wie sie uns bisher interessierten, werden durch die Sequenzen schon abgedeckt. Betrachtet man dagegen das Problem, ob eine einzelne Sequenz $\Gamma \vdash \Delta$ aus einer Menge \mathcal{G} von Sequenzen folgt, so stellt sich heraus, dass der Gentzen-Kalkül in diesem erweiterten Sinne zwar korrekt, aber nicht vollständig ist.

Andere deduktive Systeme: Gentzen-Kalkül, siehe Skript

Gentzens ▶ zweites System war ursprünglich als technisches Hilfsmittel zum Beweis der Konsistenz der Prädikatenlogik gedacht.

Es verwendet als Formeln(!) symmetrischen Sequenzen $\Gamma \vdash \Delta$, bei denen links und rechts endliche Folgen von Formeln aus $\mathcal{F}[\mathcal{A}]$ stehen dürfen. Eine solche Sequenz ist **korrekt**, wenn $\bigwedge \Gamma \rightarrow \bigvee \Delta$ allgemeingültig ist.

Prämissen, wie sie uns bisher interessierten, werden durch die Sequenzen schon abgedeckt. Betrachtet man dagegen das Problem, ob eine einzelne Sequenz $\Gamma \vdash \Delta$ aus einer Menge \mathfrak{G} von Sequenzen folgt, so stellt sich heraus, dass der Gentzen-Kalkül in diesem erweiterten Sinne zwar korrekt, aber nicht vollständig ist. Dieses Problem kann durch Einbeziehung der sog. **Schnittregel** behoben werden:

$$\frac{\Gamma_0, A \vdash \Delta_0 \quad \Gamma_1 \vdash A, \Delta_1}{\Gamma_0, \Gamma_1 \vdash \Delta_0, \Delta_1}$$

Kapitel 5

Algorithmen für die Aussagenlogik

Übersicht

Zum Nachweis von $\Gamma \models A$ kann man anstelle von $\Gamma \vdash A$ natürlich auch die Nichterfüllbarkeit von $\Gamma \cup \{\neg A\}$ überprüfen.

Übersicht

Zum Nachweis von $\Gamma \models A$ kann man anstelle von $\Gamma \vdash A$ natürlich auch die Nichterfüllbarkeit von $\Gamma \cup \{\neg A\}$ überprüfen. Aufgrund des KPS läßt sich selbst bei unendlichem Γ in endlich vielen Schritten feststellen, dass $\Gamma \cup \{\neg A\}$ nicht erfüllt werden kann, im Gegensatz zur Erfüllbarkeit.

Übersicht

Zum Nachweis von $\Gamma \models A$ kann man anstelle von $\Gamma \vdash A$ natürlich auch die Nichterfüllbarkeit von $\Gamma \cup \{\neg A\}$ überprüfen. Aufgrund des KPS läßt sich selbst bei unendlichem Γ in endlich vielen Schritten feststellen, dass $\Gamma \cup \{\neg A\}$ nicht erfüllt werden kann, im Gegensatz zur Erfüllbarkeit. Daher heißt das Problem der Unerfüllbarkeit **semi-entscheidbar**.

Übersicht

Zum Nachweis von $\Gamma \models A$ kann man anstelle von $\Gamma \vdash A$ natürlich auch die Nichterfüllbarkeit von $\Gamma \cup \{\neg A\}$ überprüfen. Aufgrund des KPS läßt sich selbst bei unendlichem Γ in endlich vielen Schritten feststellen, dass $\Gamma \cup \{\neg A\}$ nicht erfüllt werden kann, im Gegensatz zur Erfüllbarkeit. Daher heißt das Problem der Unerfüllbarkeit **semi-entscheidbar**.

Wir stellen drei Algorithmen vor, mit deren Hilfe die Nichterfüllbarkeit von Formeln bzw. Formelmengen mit syntaktischen Mitteln häufig schneller gezeigt werden kann, als mittels Wahrheitstabellen (brute force). Im ungünstigsten Fall ist ihre Laufzeit aber immer noch exponentiell.

Übersicht

Zum Nachweis von $\Gamma \models A$ kann man anstelle von $\Gamma \vdash A$ natürlich auch die Nichterfüllbarkeit von $\Gamma \cup \{\neg A\}$ überprüfen. Aufgrund des KPS läßt sich selbst bei unendlichem Γ in endlich vielen Schritten feststellen, dass $\Gamma \cup \{\neg A\}$ nicht erfüllt werden kann, im Gegensatz zur Erfüllbarkeit. Daher heißt das Problem der Unerfüllbarkeit **semi-entscheidbar**.

Wir stellen drei Algorithmen vor, mit deren Hilfe die Nichterfüllbarkeit von Formeln bzw. Formelmengen mit syntaktischen Mitteln häufig schneller gezeigt werden kann, als mittels Wahrheitstabellen (brute force). Im ungünstigsten Fall ist ihre Laufzeit aber immer noch exponentiell.

Während **semantische Tableaus** auf beliebige Formelmengen anwendbar ist, erfordert der **Davis-Putnam Algorithmus** Formeln in **Negations-Normalform (NNF)**, während die Resolutionsmethode Formeln in **konjunktiver Normalform (KNF)** benötigt.

Übersicht

Zum Nachweis von $\Gamma \models A$ kann man anstelle von $\Gamma \vdash A$ natürlich auch die Nichterfüllbarkeit von $\Gamma \cup \{\neg A\}$ überprüfen. Aufgrund des KPS läßt sich selbst bei unendlichem Γ in endlich vielen Schritten feststellen, dass $\Gamma \cup \{\neg A\}$ nicht erfüllt werden kann, im Gegensatz zur Erfüllbarkeit. Daher heißt das Problem der Unerfüllbarkeit **semi-entscheidbar**.

Wir stellen drei Algorithmen vor, mit deren Hilfe die Nichterfüllbarkeit von Formeln bzw. Formelmengen mit syntaktischen Mitteln häufig schneller gezeigt werden kann, als mittels Wahrheitstabellen (brute force). Im ungünstigsten Fall ist ihre Laufzeit aber immer noch exponentiell.

Während **semantische Tableaus** auf beliebige Formelmengen anwendbar ist, erfordert der **Davis-Putnam Algorithmus** Formeln in **Negations-Normalform (NNF)**, während die Resolutionsmethode Formeln in **konjunktiver Normalform (KNF)** benötigt. Insofern werden wir kurz auf diese und ähnliche Normalformen eingehen.

Semantische Tableaus, Vorüberlegungen

Wir klassifizieren Formeln über $\mathcal{J}_1 = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$ als

Semantische Tableaus, Vorüberlegungen

Wir klassifizieren Formeln über $\mathcal{J}_1 = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$ als

- ▷ Literale, also Atome in \mathcal{A} oder deren Negationen;

Semantische Tableaus, Vorüberlegungen

Wir klassifizieren Formeln über $\mathcal{J}_1 = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$ als

- ▷ Literale, also Atome in \mathcal{A} oder deren Negationen;
- ▷ doppelte Negationen;

Semantische Tableaus, Vorüberlegungen

Wir klassifizieren Formeln über $\mathcal{J}_1 = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$ als

- ▷ Literale, also Atome in \mathcal{A} oder deren Negationen;
- ▷ doppelte Negationen;
- ▷ bis auf Äquivalenz binäre Konjunktionen, genannt **α -Formeln**;

Semantische Tableaus, Vorüberlegungen

Wir klassifizieren Formeln über $\mathcal{J}_1 = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$ als

- ▷ Literale, also Atome in \mathcal{A} oder deren Negationen;
- ▷ doppelte Negationen;
- ▷ bis auf Äquivalenz binäre Konjunktionen, genannt α -Formeln;
- ▷ bis auf Äquivalenz binäre Disjunktionen, genannt β -Formeln.

Semantische Tableaus, Vorüberlegungen

Wir klassifizieren Formeln über $\mathcal{J}_1 = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$ als

- ▷ Literale, also Atome in \mathcal{A} oder deren Negationen;
- ▷ doppelte Negationen;
- ▷ bis auf Äquivalenz binäre Konjunktionen, genannt α -Formeln;
- ▷ bis auf Äquivalenz binäre Disjunktionen, genannt β -Formeln.

Strategie: Ersetze die Formeln in $\Gamma \subseteq \mathcal{F}[\mathcal{A}]$ durch einfachere Formeln, bis Literale erreicht sind. α - und β -Formeln liefern die beiden Argumente der äquivalenten Kon- bzw. Disjunktion; doppelte Negationen werden entfernt.

Semantische Tableaus, Vorüberlegungen

Wir klassifizieren Formeln über $\mathcal{J}_1 = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$ als

- ▷ Literale, also Atome in \mathcal{A} oder deren Negationen;
- ▷ doppelte Negationen;
- ▷ bis auf Äquivalenz binäre Konjunktionen, genannt α -Formeln;
- ▷ bis auf Äquivalenz binäre Disjunktionen, genannt β -Formeln.

Strategie: Ersetze die Formeln in $\Gamma \subseteq \mathcal{F}[\mathcal{A}]$ durch einfachere Formeln, bis Literale erreicht sind. α - und β -Formeln liefern die beiden Argumente der äquivalenten Kon- bzw. Disjunktion; doppelte Negationen werden entfernt.

Disjunktionen führen dabei zu Fallunterscheidungen hinsichtlich der zu untersuchenden Formelmengen, die sich durch binäre Verzweigungen in einer Baumstruktur darstellen lassen, mit **Formelmengen als Knoten**.

Semantische Tableaus, Vorüberlegungen

Wir klassifizieren Formeln über $\mathcal{J}_1 = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$ als

- ▷ Literale, also Atome in \mathcal{A} oder deren Negationen;
- ▷ doppelte Negationen;
- ▷ bis auf Äquivalenz binäre Konjunktionen, genannt α -Formeln;
- ▷ bis auf Äquivalenz binäre Disjunktionen, genannt β -Formeln.

Strategie: Ersetze die Formeln in $\Gamma \subseteq \mathcal{F}[\mathcal{A}]$ durch einfachere Formeln, bis Literale erreicht sind. α - und β -Formeln liefern die beiden Argumente der äquivalenten Kon- bzw. Disjunktion; doppelte Negationen werden entfernt.

Disjunktionen führen dabei zu Fallunterscheidungen hinsichtlich der zu untersuchenden Formelmengen, die sich durch binäre Verzweigungen in einer Baumstruktur darstellen lassen, mit **Formelmengen als Knoten**. Genau die Zweige ohne widersprüchliche Literale in der Vereinigung ihrer Knotenmengen werden den möglichen erfüllenden Belegungen entsprechen.

Beispiel ($\Gamma = \{\neg(p \vee (q \wedge r) \rightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r))\}$ ist nicht erfüllbar)

*0	$\neg(p \vee (q \wedge r) \rightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r))$	1
1a	$p \vee (q \wedge r)$	2
1b	$\neg((p \vee q) \wedge (p \vee r))$	4

2a p

2b $q \wedge r$ 3

3a q

3b r

4a $\neg(p \vee q)$ 5

5a $\neg p$

5b $\neg q$

\downarrow , 2a, 5a

4b $\neg(p \vee r)$ 6

6a $\neg p$

6b $\neg r$

\downarrow , 2a, 6a

4a $\neg(p \vee q)$ 5

5a $\neg p$

5b $\neg q$

\downarrow , 3a, 5b

4b $\neg(p \vee r)$ 6

6a $\neg p$

6b $\neg r$

\downarrow , 3b, 6b

Beispiel ($\Gamma = \{\neg(p \vee (q \wedge r) \rightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r))\}$ ist nicht erfüllbar)

*0	$\neg(p \vee (q \wedge r) \rightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r))$	1
1a	$p \vee (q \wedge r)$	2
1b	$\neg((p \vee q) \wedge (p \vee r))$	4

2a

 p

2b

 $q \wedge r$ 3

3a

 q

3b

 r 4a $\neg(p \vee q)$ 55a $\neg p$ 5b $\neg q$ \downarrow , 2a, 5a4b $\neg(p \vee r)$ 66a $\neg p$ 6b $\neg r$ \downarrow , 2a, 6a4a $\neg(p \vee q)$ 55a $\neg p$ 5b $\neg q$ \downarrow , 3a, 5b4b $\neg(p \vee r)$ 66a $\neg p$ 6b $\neg r$ \downarrow , 3b, 6b

Die optionalen linken/rechten Label zeigen die Reihenfolge der Entstehung/Abarbeitung (nicht-deterministisch!).

Beispiel ($\Gamma = \{\neg(p \vee (q \wedge r) \rightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r))\}$ ist nicht erfüllbar)

*0	$\neg(p \vee (q \wedge r) \rightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r))$	1
1a	$p \vee (q \wedge r)$	2
1b	$\neg((p \vee q) \wedge (p \vee r))$	4

2a

 p

2b

 $q \wedge r$

3

3a

 q

3b

 r

4a

 $\neg(p \vee q)$

5

5a

 $\neg p$

5b

 $\neg q$ $\downarrow, 2a, 5a$

4b

 $\neg(p \vee r)$

6

6a

 $\neg p$

6b

 $\neg r$ $\downarrow, 2a, 6a$

4a

 $\neg(p \vee q)$

5

5a

 $\neg p$

5b

 $\neg q$ $\downarrow, 3a, 5b$

4b

 $\neg(p \vee r)$

6

6a

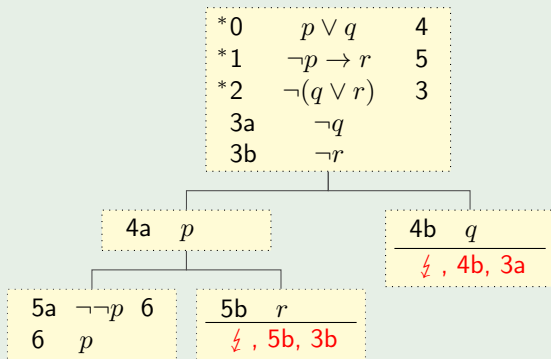
 $\neg p$

6b

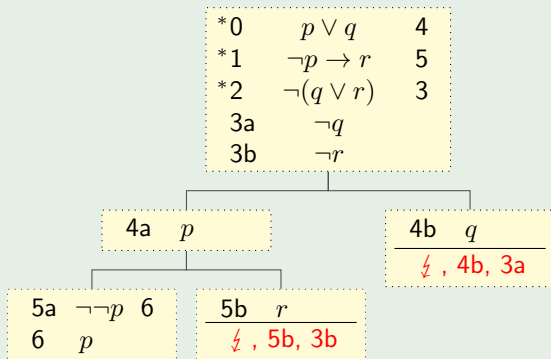
 $\neg r$ $\downarrow, 3b, 6b$

Die optionalen linken/rechten Label zeigen die Reihenfolge der Entstehung/Abarbeitung (nicht-deterministisch!). Die Arbeit in den linken bzw. rechten beiden unteren Knoten kann parallel erfolgen bzw. kopiert werden; allerdings ergeben sich andere Widersprüche.

Beispiel ($\Gamma = \{A_0 = p \vee q, A_1 = \neg p \rightarrow r, A_2 = \neg(p \vee r)\}$ ist erfüllbar)

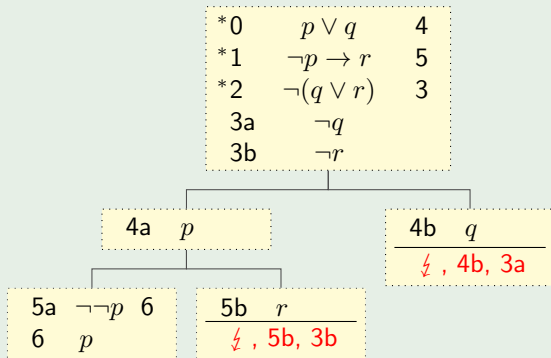


Beispiel ($\Gamma = \{A_0 = p \vee q, A_1 = \neg p \rightarrow r, A_2 = \neg(p \vee r)\}$ ist erfüllbar)



Entlang des widerspruchsfreien linken Astes macht die Belegung $p \mapsto 1$, $q \mapsto 0$, $r \mapsto 0$ die Literale (Einträge 6, 3a und 3b), und damit Γ wahr.

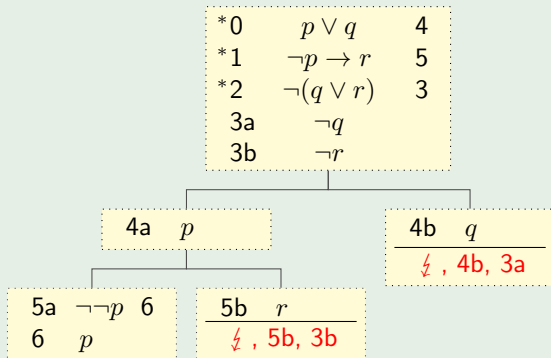
Beispiel ($\Gamma = \{A_0 = p \vee q, A_1 = \neg p \rightarrow r, A_2 = \neg(p \vee r)\}$ ist erfüllbar)



Entlang des widerspruchsfreien linken Astes macht die Belegung $p \mapsto 1$, $q \mapsto 0$, $r \mapsto 0$ die Literale (Einträge 6, 3a und 3b), und damit Γ wahr.

Alternativ kann man A_1 und A_2 erst dann der Wurzelmenge hinzufügen, wenn die Vorgängerformel vollständig abgearbeitet ist.

Beispiel ($\Gamma = \{A_0 = p \vee q, A_1 = \neg p \rightarrow r, A_2 = \neg(p \vee r)\}$ ist erfüllbar)

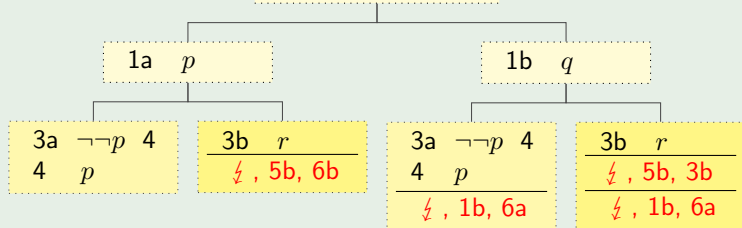


Entlang des widerspruchsfreien linken Astes macht die Belegung $p \mapsto 1$, $q \mapsto 0$, $r \mapsto 0$ die Literale (Einträge 6, 3a und 3b), und damit Γ wahr.

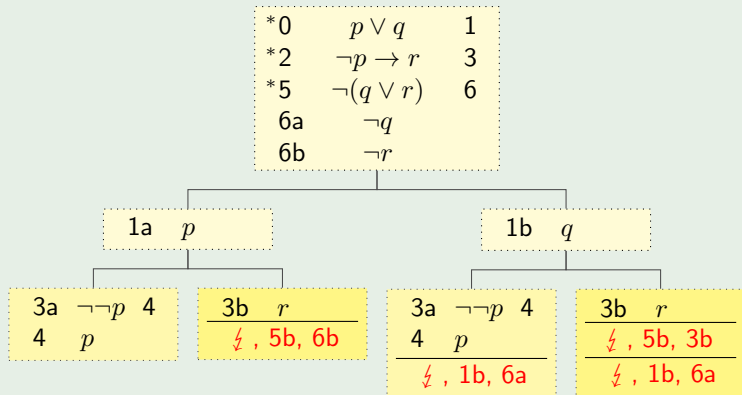
Alternativ kann man A_1 und A_2 erst dann der Wurzelmenge hinzufügen, wenn die Vorgängerformel vollständig abgearbeitet ist. Das liefert

Beispiel ($\Gamma = \{p \vee q, \neg p \rightarrow r, \neg(p \vee r)\}$ ist erfüllbar, Alternative)

*0	$p \vee q$	1
*2	$\neg p \rightarrow r$	3
*5	$\neg(q \vee r)$	6
6a	$\neg q$	
6b	$\neg r$	

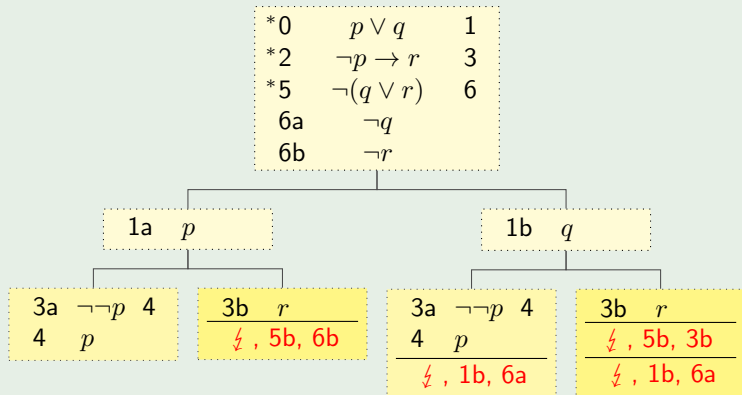


Beispiel ($\Gamma = \{p \vee q, \neg p \rightarrow r, \neg(p \vee r)\}$ ist erfüllbar, Alternative)



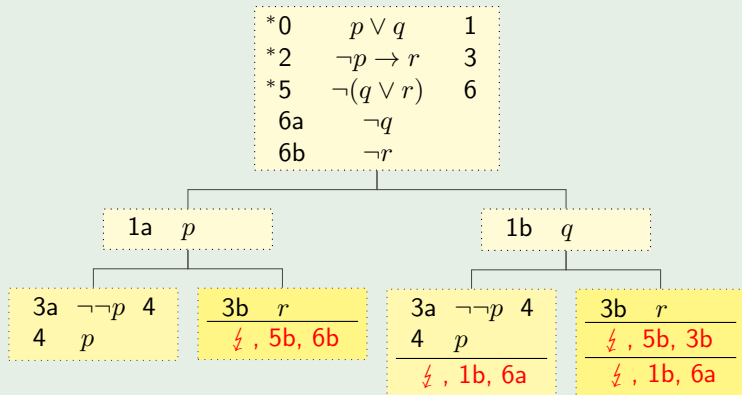
Hier wurden die Komponenten von α - und Doppelnegations-Formeln ihrer lokalen Knotenmenge hinzugefügt;

Beispiel ($\Gamma = \{p \vee q, \neg p \rightarrow r, \neg(p \vee r)\}$ ist erfüllbar, Alternative)



Hier wurden die Komponenten von α - und Doppelnegations-Formeln ihrer lokalen Knotenmenge hinzugefügt; nur β -Formeln entfalten „Fernwirkung“.

Beispiel ($\Gamma = \{p \vee q, \neg p \rightarrow r, \neg(p \vee r)\}$ ist erfüllbar, Alternative)



Hier wurden die Komponenten von α - und Doppelnegations-Formeln ihrer lokalen Knotenmenge hinzugefügt; nur β -Formeln entfalten „Fernwirkung“. Zwar wird der Widerspruch zwischen 1b und 6a später erkannt als in der vorigen Variante, aber bei unendlichem Γ hat diese Variante Vorteile.

Die Notation für die syntaktisch(!) definierten Zerlegungsschritte lehnt sich an jene für die Schlußregeln deduktiver Systeme an.

Die Notation für die syntaktisch(!) definierten Zerlegungsschritte lehnt sich an jene für die Schlußregeln deduktiver Systeme an. Die kleineren **Komponenten** unter dem „Bruchstrich“ landen bei doppelter Negation und für α -Formeln in selben Knoten-Menge des Baumes wie die Ursprungsformel und werden ggf. untereinander geschrieben:

Die Notation für die syntaktisch(!) definierten Zerlegungsschritte lehnt sich an jene für die Schlußregeln deduktiver Systeme an. Die kleineren **Komponenten** unter dem „Bruchstrich“ landen bei doppelter Negation und für α -Formeln in selben Knoten-Menge des Baumes wie die Ursprungsformel und werden ggf. untereinander geschrieben:

$$\frac{\neg\neg A}{A}, \quad \frac{A \wedge B}{A}, \quad \frac{\neg(A \vee B)}{\neg A}, \quad \frac{\neg(A \rightarrow B)}{\neg B}$$

Die Notation für die syntaktisch(!) definierten Zerlegungsschritte lehnt sich an jene für die Schlußregeln deduktiver Systeme an. Die kleineren **Komponenten** unter dem „Bruchstrich“ landen bei doppelter Negation und für α -Formeln in selben Knoten-Menge des Baumes wie die Ursprungsformel und werden ggf. untereinander geschrieben:

$$\frac{\neg\neg A}{A}, \quad \frac{A \wedge B}{A}, \quad \frac{A \wedge B}{B}, \quad \frac{\neg(A \vee B)}{\neg A}, \quad \frac{\neg(A \vee B)}{\neg B}, \quad \frac{\neg(A \rightarrow B)}{A}, \quad \frac{\neg(A \rightarrow B)}{\neg B}$$

- ▷ Sind die Komponenten wahr, so auch die Ursprungsformel.

Die Notation für die syntaktisch(!) definierten Zerlegungsschritte lehnt sich an jene für die Schlußregeln deduktiver Systeme an. Die kleineren **Komponenten** unter dem „Bruchstrich“ landen bei doppelter Negation und für α -Formeln in selben Knoten-Menge des Baumes wie die Ursprungsformel und werden ggf. untereinander geschrieben:

$$\frac{\neg\neg A}{A}, \quad \frac{A \wedge B}{A}, \quad \frac{A \wedge B}{B}, \quad \frac{\neg(A \vee B)}{\neg A}, \quad \frac{\neg(A \vee B)}{\neg B}, \quad \frac{\neg(A \rightarrow B)}{A}, \quad \frac{\neg(A \rightarrow B)}{\neg B}$$

- ▷ Sind die Komponenten wahr, so auch die Ursprungsformel.

Bei den fernwirkenden β -Formeln deutet ein senkrechter Strich zwischen den beiden Alternativen im „Nenner“ die Verzweigung an, die zunächst an jedem Blatt vorzunehmen ist:

Die Notation für die syntaktisch(!) definierten Zerlegungsschritte lehnt sich an jene für die Schlußregeln deduktiver Systeme an. Die kleineren **Komponenten** unter dem „Bruchstrich“ landen bei doppelter Negation und für α -Formeln in selben Knoten-Menge des Baumes wie die Ursprungsformel und werden ggf. untereinander geschrieben:

$$\frac{\neg\neg A}{A}, \quad \frac{A \wedge B}{A}, \quad \frac{\neg(A \vee B)}{\neg A}, \quad \frac{\neg(A \rightarrow B)}{\neg B}$$

- ▷ Sind die Komponenten wahr, so auch die Ursprungsformel.

Bei den fernwirkenden β -Formeln deutet ein senkrechter Strich zwischen den beiden Alternativen im „Nenner“ die Verzweigung an, die zunächst an jedem Blatt vorzunehmen ist:

$$\frac{A \vee B}{A | B}, \quad \frac{\neg(A \wedge B)}{\neg A | \neg B}, \quad \frac{A \rightarrow B}{\neg A | B}$$

Die Notation für die syntaktisch(!) definierten Zerlegungsschritte lehnt sich an jene für die Schlußregeln deduktiver Systeme an. Die kleineren **Komponenten** unter dem „Bruchstrich“ landen bei doppelter Negation und für α -Formeln in selben Knoten-Menge des Baumes wie die Ursprungsformel und werden ggf. untereinander geschrieben:

$$\frac{\neg\neg A}{A}, \quad \frac{A \wedge B}{A}, \quad \frac{\neg(A \vee B)}{\neg A}, \quad \frac{\neg(A \rightarrow B)}{\neg B}$$

- ▷ Sind die Komponenten wahr, so auch die Ursprungsformel.

Bei den fernwirkenden β -Formeln deutet ein senkrechter Strich zwischen den beiden Alternativen im „Nenner“ die Verzweigung an, die zunächst an jedem Blatt vorzunehmen ist:

$$\frac{A \vee B}{A | B}, \quad \frac{\neg(A \wedge B)}{\neg A | \neg B}, \quad \frac{A \rightarrow B}{\neg A | B}$$

- ▷ Ist mindestens eine Komponente wahr, so auch die Ursprungsformel.

Gerade binäre Bäume

Definition

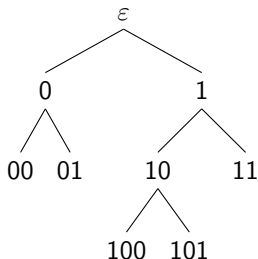
Ein **gerader binärer Baum** ist eine **präfix-abgeschlossene** Menge $\mathcal{B} \subseteq \{0,1\}^*$ binärer Wörter, so dass **aus** $w \in \mathcal{B}$ folgt: $w0 \in \mathcal{B}$ gdw. $w1 \in \mathcal{B}$.

Gerade binäre Bäume

Definition

Ein **gerader binärer Baum** ist eine **präfix-abgeschlossene** Menge $\mathcal{B} \subseteq \{0,1\}^*$ binärer Wörter, so dass **aus** $w \in \mathcal{B}$ **folgt**: $w0 \in \mathcal{B}$ gdw. $w1 \in \mathcal{B}$.

Die Elemente von \mathcal{B} fungieren gleichzeitig als Knoten und als Wegweiser von der Wurzel ε zum entsprechenden Knoten, etwa

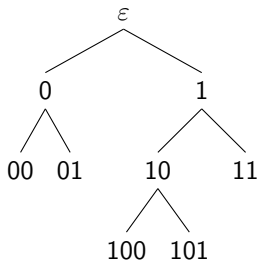


Gerade binäre Bäume

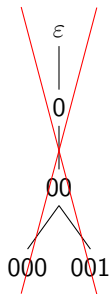
Definition

Ein **gerader binärer Baum** ist eine **präfix-abgeschlossene** Menge $\mathcal{B} \subseteq \{0, 1\}^*$ binärer Wörter, so dass **aus** $w \in \mathcal{B}$ **folgt**: $w0 \in \mathcal{B}$ gdw. $w1 \in \mathcal{B}$.

Die Elemente von \mathcal{B} fungieren gleichzeitig als Knoten und als Wegweiser von der Wurzel ε zum entsprechenden Knoten, etwa



aber

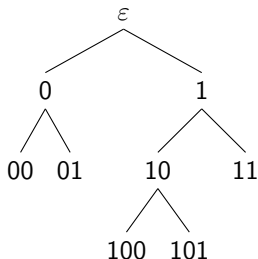


Gerade binäre Bäume

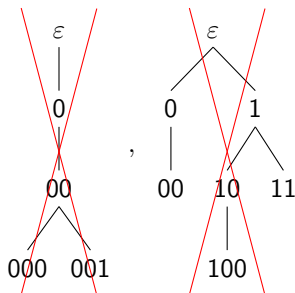
Definition

Ein **gerader binärer Baum** ist eine **präfix-abgeschlossene** Menge $\mathcal{B} \subseteq \{0, 1\}^*$ binärer Wörter, so dass **aus** $w \in \mathcal{B}$ **folgt**: $w0 \in \mathcal{B}$ gdw. $w1 \in \mathcal{B}$.

Die Elemente von \mathcal{B} fungieren gleichzeitig als Knoten und als Wegweiser von der Wurzel ε zum entsprechenden Knoten, etwa



aber

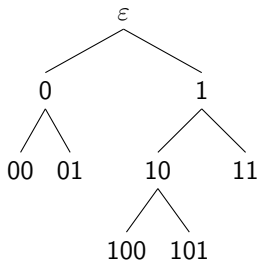


Gerade binäre Bäume

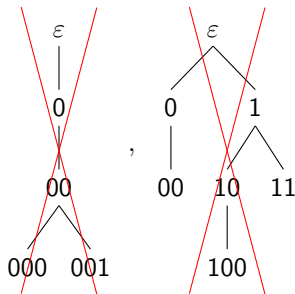
Definition

Ein **gerader binärer Baum** ist eine **präfix-abgeschlossene** Menge $\mathcal{B} \subseteq \{0, 1\}^*$ binärer Wörter, so dass **aus** $w \in \mathcal{B}$ **folgt**: $w0 \in \mathcal{B}$ gdw. $w1 \in \mathcal{B}$.

Die Elemente von \mathcal{B} fungieren gleichzeitig als Knoten und als Wegweiser von der Wurzel ε zum entsprechenden Knoten, etwa



aber



Die Gegenbeispiele erfüllen als **binäre Bäume** $w1 \in \mathcal{B}$ impliziert $w0 \in \mathcal{B}$.

Definition

Ein **Tableau** für $\Gamma \subseteq \mathcal{F}[\mathcal{A}]$ ist Abbildung $\{0, 1\}^* \xrightarrow{\tau} \mathfrak{P}(\mathcal{F}[\mathcal{A}])$, so dass

Definition

Ein **Tableau für $\Gamma \subseteq \mathcal{F}[\mathcal{A}]$** ist Abbildung $\{0, 1\}^* \xrightarrow{\tau} \mathfrak{B}(\mathcal{F}[\mathcal{A}])$, so dass

- ▶ das Urbild der Formelmengen $\neq \emptyset$ ist ein gerader binärer Baum $\mathcal{B}(\tau)$;

Definition

Ein **Tableau für** $\Gamma \subseteq \mathcal{F}[\mathcal{A}]$ ist Abbildung $\{0, 1\}^* \xrightarrow{\tau} \mathfrak{B}(\mathcal{F}[\mathcal{A}])$, so dass

- ▶ das Urbild der Formelmengen $\neq \emptyset$ ist ein gerader binärer Baum $\mathcal{B}(\tau)$;
- ▶ $\Gamma \subseteq \tau(\varepsilon)$;

Definition

Ein **Tableau für** $\Gamma \subseteq \mathcal{F}[\mathcal{A}]$ ist Abbildung $\{0, 1\}^* \xrightarrow{\tau} \mathfrak{B}(\mathcal{F}[\mathcal{A}])$, so dass

- ▷ das Urbild der Formelmengen $\neq \emptyset$ ist ein gerader binärer Baum $\mathcal{B}(\tau)$;
- ▷ $\Gamma \subseteq \tau(\varepsilon)$;
- ▷ jede auftretende Formel $A \in \tau(w)$

Definition

Ein **Tableau für** $\Gamma \subseteq \mathcal{F}[\mathcal{A}]$ ist Abbildung $\{0, 1\}^* \xrightarrow{\tau} \mathfrak{P}(\mathcal{F}[\mathcal{A}])$, so dass

- ▷ das Urbild der Formelmengen $\neq \emptyset$ ist ein gerader binärer Baum $\mathcal{B}(\tau)$;
- ▷ $\Gamma \subseteq \tau(\varepsilon)$;
- ▷ jede auftretende Formel $A \in \tau(w)$
 - gehört entweder zu Γ , falls $w = \varepsilon$,

Definition

Ein **Tableau für $\Gamma \subseteq \mathcal{F}[\mathcal{A}]$** ist Abbildung $\{0, 1\}^* \xrightarrow{\tau} \mathfrak{P}(\mathcal{F}[\mathcal{A}])$, so dass

- ▷ das Urbild der Formelmengen $\neq \emptyset$ ist ein gerader binärer Baum $\mathcal{B}(\tau)$;
- ▷ $\Gamma \subseteq \tau(\varepsilon)$;
- ▷ jede auftretende Formel $A \in \tau(w)$
 - gehört entweder zu Γ , falls $w = \varepsilon$,
 - oder ist Komponente einer der ersten vier Regeln mit Prämisse in $\tau(w)$,

Definition

Ein **Tableau für $\Gamma \subseteq \mathcal{F}[\mathcal{A}]$** ist Abbildung $\{0, 1\}^* \xrightarrow{\tau} \mathfrak{B}(\mathcal{F}[\mathcal{A}])$, so dass

- ▷ das Urbild der Formelmengen $\neq \emptyset$ ist ein gerader binärer Baum $\mathcal{B}(\tau)$;
- ▷ $\Gamma \subseteq \tau(\varepsilon)$;
- ▷ jede auftretende Formel $A \in \tau(w)$
 - gehört entweder zu Γ , falls $w = \varepsilon$,
 - oder ist Komponente einer der ersten vier Regeln mit Prämisse in $\tau(w)$,
 - oder ist Komponente einer der letzten drei Regeln mit Prämisse in $\tau(u)$ für ein echtes Präfix u von w .

Ein **Ast Θ** von $\mathcal{B}(\tau)$ (**maximale lineare Präfix-geordnete Teilmenge**) heißt

Definition

Ein **Tableau** für $\Gamma \subseteq \mathcal{F}[\mathcal{A}]$ ist Abbildung $\{0, 1\}^* \xrightarrow{\tau} \mathfrak{P}(\mathcal{F}[\mathcal{A}])$, so dass

- ▷ das Urbild der Formelmengen $\neq \emptyset$ ist ein gerader binärer Baum $\mathcal{B}(\tau)$;
- ▷ $\Gamma \subseteq \tau(\varepsilon)$;
- ▷ jede auftretende Formel $A \in \tau(w)$
 - gehört entweder zu Γ , falls $w = \varepsilon$,
 - oder ist Komponente einer der ersten vier Regeln mit Prämisse in $\tau(w)$,
 - oder ist Komponente einer der letzten drei Regeln mit Prämisse in $\tau(u)$ für ein echtes Präfix u von w .

Ein **Ast** Θ von $\mathcal{B}(\tau)$ (**maximale lineare Präfix-geordnete Teilmenge**) heißt

- ▷ **vollständig**, falls $\bigcup \tau[\Theta]$ bzgl. Regelanwendung invariant ist;

Definition

Ein **Tableau** für $\Gamma \subseteq \mathcal{F}[\mathcal{A}]$ ist Abbildung $\{0, 1\}^* \xrightarrow{\tau} \mathfrak{P}(\mathcal{F}[\mathcal{A}])$, so dass

- ▷ das Urbild der Formelmengen $\neq \emptyset$ ist ein gerader binärer Baum $\mathcal{B}(\tau)$;
- ▷ $\Gamma \subseteq \tau(\varepsilon)$;
- ▷ jede auftretende Formel $A \in \tau(w)$
 - gehört entweder zu Γ , falls $w = \varepsilon$,
 - oder ist Komponente einer der ersten vier Regeln mit Prämisse in $\tau(w)$,
 - oder ist Komponente einer der letzten drei Regeln mit Prämisse in $\tau(u)$ für ein echtes Präfix u von w .

Ein **Ast** Θ von $\mathcal{B}(\tau)$ (**maximale lineare Präfix-geordnete Teilmenge**) heißt

- ▷ **vollständig**, falls $\bigcup \tau[\Theta]$ bzgl. Regelanwendung invariant ist;
- ▷ **abgeschlossen**, falls $\bigcup \tau[\Theta]$ eine Formel und ihre Negation enthält; andernfalls heißt Θ **offen**.

Definition

Ein **Tableau** für $\Gamma \subseteq \mathcal{F}[\mathcal{A}]$ ist Abbildung $\{0, 1\}^* \xrightarrow{\tau} \mathfrak{P}(\mathcal{F}[\mathcal{A}])$, so dass

- ▷ das Urbild der Formelmengen $\neq \emptyset$ ist ein gerader binärer Baum $\mathcal{B}(\tau)$;
- ▷ $\Gamma \subseteq \tau(\varepsilon)$;
- ▷ jede auftretende Formel $A \in \tau(w)$
 - gehört entweder zu Γ , falls $w = \varepsilon$,
 - oder ist Komponente einer der ersten vier Regeln mit Prämisse in $\tau(w)$,
 - oder ist Komponente einer der letzten drei Regeln mit Prämisse in $\tau(u)$ für ein echtes Präfix u von w .

Ein **Ast** Θ von $\mathcal{B}(\tau)$ (**maximale lineare Präfix-geordnete Teilmenge**) heißt

- ▷ **vollständig**, falls $\bigcup \tau[\Theta]$ bzgl. Regelanwendung invariant ist;
- ▷ **abgeschlossen**, falls $\bigcup \tau[\Theta]$ eine Formel und ihre Negation enthält; andernfalls heißt Θ **offen**.

Ein Tableau heißt **abgeschlossen**, falls jeder Ast abgeschlossen ist.

Die Existenz vollständiger Tableaus

Lemma

Jedes Tableau τ kann vervollständigt werden.

Die Existenz vollständiger Tableaus

Lemma

Jedes Tableau τ kann vervollständigt werden.

Beweis.

Setze $\tau_0 := \tau$ und definiere τ_{k+1} durch Anwendung einer passenden Regel auf jedes Nicht-Literal in τ_k . Dann gilt $\tau_k(w) \subseteq \tau_{k+1}(w)$ für alle $w \in \{0,1\}^*$ und $k \in \mathbb{N}$.

Die Existenz vollständiger Tableaus

Lemma

Jedes Tableau τ kann vervollständigt werden.

Beweis.

Setze $\tau_0 := \tau$ und definiere τ_{k+1} durch Anwendung einer passenden Regel auf jedes Nicht-Literal in τ_k . Dann gilt $\tau_k(w) \subseteq \tau_{k+1}(w)$ für alle $w \in \{0,1\}^*$ und $k \in \mathbb{N}$. Vereinigung liefert ein vollständiges Tableau τ_∞ :

$$\tau_\infty(w) := \bigcup \{ \tau_k(w) : k \in \mathbb{N} \} \quad \square$$

Die Existenz vollständiger Tableaus

Lemma

Jedes Tableau τ kann vervollständigt werden.

Beweis.

Setze $\tau_0 := \tau$ und definiere τ_{k+1} durch Anwendung einer passenden Regel auf jedes Nicht-Literal in τ_k . Dann gilt $\tau_k(w) \subseteq \tau_{k+1}(w)$ für alle $w \in \{0,1\}^*$ und $k \in \mathbb{N}$. Vereinigung liefert ein vollständiges Tableau τ_∞ :

$$\tau_\infty(w) := \bigcup \{ \tau_k(w) : k \in \mathbb{N} \} \quad \square$$

Korollar

Zu jeder Formelmengende Γ existiert ein vollständiges Tableau.

Die Existenz vollständiger Tableaus

Lemma

Jedes Tableau τ kann vervollständigt werden.

Beweis.

Setze $\tau_0 := \tau$ und definiere τ_{k+1} durch Anwendung einer passenden Regel auf jedes Nicht-Literal in τ_k . Dann gilt $\tau_k(w) \subseteq \tau_{k+1}(w)$ für alle $w \in \{0,1\}^*$ und $k \in \mathbb{N}$. Vereinigung liefert ein vollständiges Tableau τ_∞ :

$$\tau_\infty(w) := \bigcup \{ \tau_k(w) : k \in \mathbb{N} \} \quad \square$$

Korollar

Zu jeder Formelmengende Γ existiert ein vollständiges Tableau.

Beweis.

Starte mit $\gamma_0(\varepsilon) = \Gamma$ und $\gamma_0(w) = \emptyset$ für $w \in \{0,1\}^+$. □

Lemma (Hintikka)

Für vollständige Tableau-Astmengen gilt: „erfüllbar“ = „offen“.

⁷Evert Willem Beth (1908–1964)

⁸Jaakko Hintikka (1929–2015)

⁹Raymond Merrill Smullyan (1919–2017)

Lemma (Hintikka)

Für vollständige Tableau-Astmengen gilt: „erfüllbar“ = „offen“.

Beweis.

„ \subseteq “ ist klar. Umgekehrt sei Θ offen. φ möge genau die Atome p mit $\neg p \in \bigcup \tau[\Theta]$ auf 0 abbilden. Induktion über die Länge der Formeln in $\bigcup \tau[\Theta]$ und die Abhängigkeit des Wahrheitswerts der Ursprungsformel von denen der Komponenten in den Regeln zeigt $\bigcup \tau[\Theta] \subseteq \hat{\varphi}^{-1}[\{1\}]$. \square

⁷Evert Willem Beth (1908–1964)

⁸Jaakko Hintikka (1929–2015)

⁹Raymond Merrill Smullyan (1919–2017)

Lemma (Hintikka)

Für vollständige Tableau-Astmengen gilt: „erfüllbar“ = „offen“.

Beweis.

„ \subseteq “ ist klar. Umgekehrt sei Θ offen. φ möge genau die Atome p mit $\neg p \in \bigcup \tau[\Theta]$ auf 0 abbilden. Induktion über die Länge der Formeln in $\bigcup \tau[\Theta]$ und die Abhängigkeit des Wahrheitswerts der Ursprungsformel von denen der Komponenten in den Regeln zeigt $\bigcup \tau[\Theta] \subseteq \hat{\varphi}^{-1}[\{1\}]$. \square

Die ursprüngliche Tableau-Methode markiert Knoten **nicht notwendig gerader** binärer Bäume mit einzelnen Formeln, statt mit Formelmengen.

⁷Evert Willem Beth (1908–1964)

⁸Jaakko Hintikka (1929–2015)

⁹Raymond Merrill Smullyan (1919–2017)

Lemma (Hintikka)

Für vollständige Tableau-Astmengen gilt: „erfüllbar“ = „offen“.

Beweis.

„ \subseteq “ ist klar. Umgekehrt sei Θ offen. φ möge genau die Atome p mit $\neg p \in \bigcup \tau[\Theta]$ auf 0 abbilden. Induktion über die Länge der Formeln in $\bigcup \tau[\Theta]$ und die Abhängigkeit des Wahrheitswerts der Ursprungsformel von denen der Komponenten in den Regeln zeigt $\bigcup \tau[\Theta] \subseteq \hat{\varphi}^{-1}[\{1\}]$. \square

Die ursprüngliche Tableau-Methode markiert Knoten **nicht notwendig gerader** binärer Bäume mit einzelnen Formeln, statt mit Formelmengen. Sie geht auf Beth⁷ und (unabhängig) Hintikka⁸ zurück (um 1955). Smullyans⁹ Vereinfachung (1968, 1995) machte sie populär.

⁷Evert Willem Beth (1908–1964)

⁸Jaakko Hintikka (1929–2015)

⁹Raymond Merrill Smullyan (1919–2017)

Unerfüllbarkeit via Tableaus

Satz

Eine Formelmenge Γ ist genau dann unerfüllbar, wenn sie ein abgeschlossenes Tableau besitzt.

Unerfüllbarkeit via Tableaus

Satz

Eine Formelmenge Γ ist genau dann unerfüllbar, wenn sie ein abgeschlossenes Tableau besitzt.

Beweis.

In einem vollständigen Tableau τ für Γ ist Γ in allen Astmengen enthalten. Damit sind diese unerfüllbar, und nach Hintikkas Lemma abgeschlossen.

Unerfüllbarkeit via Tableaus

Satz

Eine Formelmenge Γ ist genau dann unerfüllbar, wenn sie ein abgeschlossenes Tableau besitzt.

Beweis.

In einem vollständigen Tableau τ für Γ ist Γ in allen Astmengen enthalten. Damit sind diese unerfüllbar, und nach Hintikkas Lemma abgeschlossen.

Erfüllt φ umgekehrt Γ , so wegen der α -Regeln auch $\tau_\infty(\varepsilon)$ für jedes Tableau τ für Γ .

Unerfüllbarkeit via Tableaus

Satz

Eine Formelmenge Γ ist genau dann unerfüllbar, wenn sie ein abgeschlossenes Tableau besitzt.

Beweis.

In einem vollständigen Tableau τ für Γ ist Γ in allen Astmengen enthalten. Damit sind diese unerfüllbar, und nach Hintikkas Lemma abgeschlossen.

Erfüllt φ umgekehrt Γ , so wegen der α -Regeln auch $\tau_\infty(\varepsilon)$ für jedes Tableau τ für Γ . **Ann.:** $\tau(w) \neq \emptyset$ und φ erfüllt $\bigcup\{\tau_\infty(u) : u \leq w\}$.

Unerfüllbarkeit via Tableaus

Satz

Eine Formelmenge Γ ist genau dann unerfüllbar, wenn sie ein abgeschlossenes Tableau besitzt.

Beweis.

In einem vollständigen Tableau τ für Γ ist Γ in allen Astmengen enthalten. Damit sind diese unerfüllbar, und nach Hintikkas Lemma abgeschlossen.

Erfüllt φ umgekehrt Γ , so wegen der α -Regeln auch $\tau_\infty(\varepsilon)$ für jedes Tableau τ für Γ . **Ann.:** $\tau(w) \neq \emptyset$ und φ erfüllt $\bigcup\{\tau_\infty(u) : u \leq w\}$. Ist $\tau_\infty(wi)$, $i < 2$ leer, bestimmt w einen offenen Ast.

Unerfüllbarkeit via Tableaus

Satz

Eine Formelmenge Γ ist genau dann unerfüllbar, wenn sie ein abgeschlossenes Tableau besitzt.

Beweis.

In einem vollständigen Tableau τ für Γ ist Γ in allen Astmengen enthalten. Damit sind diese unerfüllbar, und nach Hintikkas Lemma abgeschlossen.

Erfüllt φ umgekehrt Γ , so wegen der α -Regeln auch $\tau_\infty(\varepsilon)$ für jedes Tableau τ für Γ . **Ann.:** $\tau(w) \neq \emptyset$ und φ erfüllt $\bigcup\{\tau_\infty(u) : u \leq w\}$. Ist $\tau_\infty(wi)$, $i < 2$ leer, bestimmt w einen offenen Ast.

Sonst ist **genau**(!) je ein $A_i \in \tau_\infty(wi)$ Komponente einer β -Regel mit Prämisse in $\tau_\infty(u)$ für ein $u \leq w$.

Unerfüllbarkeit via Tableaus

Satz

Eine Formelmenge Γ ist genau dann unerfüllbar, wenn sie ein abgeschlossenes Tableau besitzt.

Beweis.

In einem vollständigen Tableau τ für Γ ist Γ in allen Astmengen enthalten. Damit sind diese unerfüllbar, und nach Hintikkas Lemma abgeschlossen.

Erfüllt φ umgekehrt Γ , so wegen der α -Regeln auch $\tau_\infty(\varepsilon)$ für jedes Tableau τ für Γ . **Ann.:** $\tau(w) \neq \emptyset$ und φ erfüllt $\bigcup\{\tau_\infty(u) : u \leq w\}$. Ist $\tau_\infty(wi)$, $i < 2$ leer, bestimmt w einen offenen Ast.

Sonst ist **genau**(!) je ein $A_i \in \tau_\infty(wi)$ Komponente einer β -Regel mit Prämisse in $\tau_\infty(u)$ für ein $u \leq w$. Also existiert $i < 2$ mit $\hat{\varphi}(A_i) = 1$.

Unerfüllbarkeit via Tableaus

Satz

Eine Formelmenge Γ ist genau dann unerfüllbar, wenn sie ein abgeschlossenes Tableau besitzt.

Beweis.

In einem vollständigen Tableau τ für Γ ist Γ in allen Astmengen enthalten. Damit sind diese unerfüllbar, und nach Hintikkas Lemma abgeschlossen.

Erfüllt φ umgekehrt Γ , so wegen der α -Regeln auch $\tau_\infty(\varepsilon)$ für jedes Tableau τ für Γ . **Ann.:** $\tau(w) \neq \emptyset$ und φ erfüllt $\bigcup\{\tau_\infty(u) : u \leq w\}$. Ist $\tau_\infty(wi)$, $i < 2$ leer, bestimmt w einen offenen Ast.

Sonst ist **genau**(!) je ein $A_i \in \tau_\infty(wi)$ Komponente einer β -Regel mit Prämisse in $\tau_\infty(u)$ für ein $u \leq w$. Also existiert $i < 2$ mit $\hat{\varphi}(A_i) = 1$. Jedes Element von $\tau_\infty(wi)$ entsteht durch α -Regeln in endlich vielen Schritten aus A_i . Also erfüllt φ auch $\bigcup\{\tau_\infty(u) : u \leq wi\}$. Induktion über $|w|$ zeigt nun, dass nicht alle Äste von τ_∞ abgeschlossen sind. \square

Algorithmus zur Konstruktion von Tableaus

Um für eine abzählbare Menge $\Gamma = \{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ ein **Tableau** zu konstruieren, **dessen abgeschlossene Äste als solche markiert und dessen offene Äste vollständig sind**, gibt es diverse Strategien, z.B.,

Algorithmus zur Konstruktion von Tableaus

Um für eine abzählbare Menge $\Gamma = \{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ ein **Tableau** zu konstruieren, dessen abgeschlossene Äste als solche markiert und dessen offene Äste vollständig sind, gibt es diverse Strategien, z.B.,

0. Für $\{A_i : i < k\}$ sei v_k ein nicht abgeschlossenes solches **Tableau**.

Algorithmus zur Konstruktion von Tableaus

Um für eine abzählbare Menge $\Gamma = \{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ ein **Tableau** zu konstruieren, dessen abgeschlossene Äste als solche markiert und dessen offene Äste vollständig sind, gibt es diverse Strategien, z.B.,

0. Für $\{A_i : i < k\}$ sei v_k ein nicht abgeschlossenes solches **Tableau**.
1. Konstruiere ein **Tableau** v_{k+1} für $\{A_i : i < k + 1\}$ wie folgt:

Algorithmus zur Konstruktion von Tableaus

Um für eine abzählbare Menge $\Gamma = \{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ ein **Tableau** zu konstruieren, dessen abgeschlossene Äste als solche markiert und dessen offene Äste vollständig sind, gibt es diverse Strategien, z.B.,

0. Für $\{A_i : i < k\}$ sei v_k ein nicht abgeschlossenes solches **Tableau**.
1. Konstruiere ein **Tableau** v_{k+1} für $\{A_i : i < k + 1\}$ wie folgt:
 - 1.0. Konstruiere ein **Tableau** σ_k für A_k in endlich vielen Schritten.

Algorithmus zur Konstruktion von Tableaus

Um für eine abzählbare Menge $\Gamma = \{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ ein **Tableau** zu konstruieren, dessen abgeschlossene Äste als solche markiert und dessen offene Äste vollständig sind, gibt es diverse Strategien, z.B.,

0. Für $\{A_i : i < k\}$ sei v_k ein nicht abgeschlossenes solches **Tableau**.
1. Konstruiere ein **Tableau** v_{k+1} für $\{A_i : i < k + 1\}$ wie folgt:
 - 1.0. Konstruiere ein **Tableau** σ_k für A_k in endlich vielen Schritten.
 - 1.1. Kombiniere v_k und σ_k zu v_{k+1} :

Algorithmus zur Konstruktion von Tableaus

Um für eine abzählbare Menge $\Gamma = \{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ ein **Tableau** zu konstruieren, dessen abgeschlossene Äste als solche markiert und dessen offene Äste vollständig sind, gibt es diverse Strategien, z.B.,

0. Für $\{A_i : i < k\}$ sei v_k ein nicht abgeschlossenes solches **Tableau**.
1. Konstruiere ein **Tableau** v_{k+1} für $\{A_i : i < k + 1\}$ wie folgt:
 - 1.0. Konstruiere ein **Tableau** σ_k für A_k in endlich vielen Schritten.
 - 1.1. Kombiniere v_k und σ_k zu v_{k+1} :
 - 1.1.0. Vereinige die Wurzelmenge:

$$v_{k+1}(\varepsilon) := v_k(\varepsilon) \cup \sigma_k(\varepsilon)$$

Algorithmus zur Konstruktion von Tableaus

Um für eine abzählbare Menge $\Gamma = \{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ ein **Tableau** zu konstruieren, **dessen abgeschlossene Äste als solche markiert und dessen offene Äste vollständig sind**, gibt es diverse Strategien, z.B.,

0. Für $\{A_i : i < k\}$ sei v_k ein nicht abgeschlossenes solches **Tableau**.
1. Konstruiere ein **Tableau** v_{k+1} für $\{A_i : i < k + 1\}$ wie folgt:
 - 1.0. Konstruiere ein **Tableau** σ_k für A_k in endlich vielen Schritten.
 - 1.1. Kombiniere v_k und σ_k zu v_{k+1} :
 - 1.1.0. Vereinige die Wurzelmenge:

$$v_{k+1}(\varepsilon) := v_k(\varepsilon) \cup \sigma_k(\varepsilon)$$

- 1.1.1. Hänge die beiden Unterbäume von σ_k mit Wurzel 0 bzw. 1 an jedes Blatt eines offenen Asts von v_k an: gilt $v_k(w) \neq \emptyset$ und $v_k(w0) = \emptyset$ und enthält der entsprechende Ast von v_k keinen Widerspruch, setze für jedes nichtleere Binärwort $v \in \{0, 1\}^+$

$$v_{k+1}(wv) := \sigma_k(v)$$

Algorithmus zur Konstruktion von Tableaus

Um für eine abzählbare Menge $\Gamma = \{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ ein **Tableau** zu konstruieren, **dessen abgeschlossene Äste als solche markiert und dessen offene Äste vollständig sind**, gibt es diverse Strategien, z.B.,

0. Für $\{A_i : i < k\}$ sei v_k ein nicht abgeschlossenes solches **Tableau**.
1. Konstruiere ein **Tableau** v_{k+1} für $\{A_i : i < k + 1\}$ wie folgt:
 - 1.0. Konstruiere ein **Tableau** σ_k für A_k in endlich vielen Schritten.
 - 1.1. Kombiniere v_k und σ_k zu v_{k+1} :
 - 1.1.0. Vereinige die Wurzelmenen:

$$v_{k+1}(\varepsilon) := v_k(\varepsilon) \cup \sigma_k(\varepsilon)$$

- 1.1.1. Hänge die beiden Unterbäume von σ_k mit Wurzel 0 bzw. 1 an jedes Blatt eines offenen Asts von v_k an: gilt $v_k(w) \neq \emptyset$ und $v_k(w0) = \emptyset$ und enthält der entsprechende Ast von v_k keinen Widerspruch, setze für jedes nichtleere Binärwort $v \in \{0, 1\}^+$

$$v_{k+1}(wv) := \sigma_k(v)$$

- 1.1.2. Markiere neu entstandene abgeschlossene Äste.

Bemerkungen.

Bemerkungen.

- Bei unerfüllbarem Γ terminiert der Algorithmus nach endlich vielen Schritten und liefert einen Beweis der Unerfüllbarkeit einer endlichen Teilmenge von Γ .

Bemerkungen.

- Bei unerfüllbarem Γ terminiert der Algorithmus nach endlich vielen Schritten und liefert einen Beweis der Unerfüllbarkeit einer endlichen Teilmenge von Γ . Daraus folgt der Kompaktheitssatz für abzählbar unendliche Formelmengen Γ .

Bemerkungen.

- Bei unerfüllbarem Γ terminiert der Algorithmus nach endlich vielen Schritten und liefert einen Beweis der Unerfüllbarkeit einer endlichen Teilmenge von Γ . Daraus folgt der Kompaktheitssatz für abzählbar unendliche Formelmengen Γ .
- Terminiert der Algorithmus nicht, so entsteht eine geordnete Kette von Tableaus, deren komponentenweise Vereinigung ein vollständiges Tableau für Γ ist.

Bemerkungen.

- Bei unerfüllbarem Γ terminiert der Algorithmus nach endlich vielen Schritten und liefert einen Beweis der Unerfüllbarkeit einer endlichen Teilmenge von Γ . Daraus folgt der Kompaktheitssatz für abzählbar unendliche Formelmengen Γ .
- Terminiert der Algorithmus nicht, so entsteht eine geordnete Kette von Tableaus, deren komponentenweise Vereinigung ein vollständiges Tableau für Γ ist.
- Man kann die zugrundeliegende Operation des obigen Algorithmus als „Komposition“ von Tableaus auffassen, mit dem konstant leeren Tableau als neutralem Element; damit starten wir auch. Diese Komposition ist sicherlich nicht kommutativ, ob sie wirklich assoziativ ist, bleibt zu zeigen. Dass widersprüchliche Äste nicht weiter berücksichtigt werden, gedacht zur Steigerung der Effizienz, könnte evtl. Schwierigkeiten bereiten.

Normalformen

Oft lassen sich logische Probleme schneller lösen, wenn die Eingaben eine bestimmte einfache Gestalt haben; man spricht dann von **Normalformen**.

Normalformen

Oft lassen sich logische Probleme schneller lösen, wenn die Eingaben eine bestimmte einfache Gestalt haben; man spricht dann von **Normalformen**.

Dabei ist darauf zu achten, dass die Transformation von A nach $T(A)$ **nicht zu teuer** ist, hinsichtlich Zeit und Platz, sonst lohnt sich der Aufwand nicht.

Normalformen

Oft lassen sich logische Probleme schneller lösen, wenn die Eingaben eine bestimmte einfache Gestalt haben; man spricht dann von **Normalformen**.

Dabei ist darauf zu achten, dass die Transformation von A nach $T(A)$ **nicht zu teuer** ist, hinsichtlich Zeit und Platz, sonst lohnt sich der Aufwand nicht. Prinzipiell unterscheidet man

Normalformen

Oft lassen sich logische Probleme schneller lösen, wenn die Eingaben eine bestimmte einfache Gestalt haben; man spricht dann von **Normalformen**.

Dabei ist darauf zu achten, dass die Transformation von A nach $T(A)$ **nicht zu teuer** ist, hinsichtlich Zeit und Platz, sonst lohnt sich der Aufwand nicht. Prinzipiell unterscheidet man

- **logisch äquivalente** Transformationen mit $A \equiv T(A)$ von

Normalformen

Oft lassen sich logische Probleme schneller lösen, wenn die Eingaben eine bestimmte einfache Gestalt haben; man spricht dann von **Normalformen**.

Dabei ist darauf zu achten, dass die Transformation von A nach $T(A)$ **nicht zu teuer** ist, hinsichtlich Zeit und Platz, sonst lohnt sich der Aufwand nicht. Prinzipiell unterscheidet man

- **logisch äquivalente** Transformationen mit $A \Leftrightarrow T(A)$ von
- **erfüllbarkeitsäquivalenten** mit A erfüllbar gdw. $T(A)$ erfüllbar.

Normalformen

Oft lassen sich logische Probleme schneller lösen, wenn die Eingaben eine bestimmte einfache Gestalt haben; man spricht dann von **Normalformen**.

Dabei ist darauf zu achten, dass die Transformation von A nach $T(A)$ **nicht zu teuer** ist, hinsichtlich Zeit und Platz, sonst lohnt sich der Aufwand nicht. Prinzipiell unterscheidet man

- **logisch äquivalente** Transformationen mit $A \models T(A)$ von
- **erfüllbarkeitsäquivalenten** mit A erfüllbar gdw. $T(A)$ erfüllbar.

Wir werden uns im Folgenden auf die Junktorenmenge $\mathcal{J}_1 = \{\neg, \wedge, \vee\}$ beschränken.

Normalformen

Oft lassen sich logische Probleme schneller lösen, wenn die Eingaben eine bestimmte einfache Gestalt haben; man spricht dann von **Normalformen**.

Dabei ist darauf zu achten, dass die Transformation von A nach $T(A)$ **nicht zu teuer** ist, hinsichtlich Zeit und Platz, sonst lohnt sich der Aufwand nicht. Prinzipiell unterscheidet man

- **logisch äquivalente** Transformationen mit $A \models T(A)$ von
- **erfüllbarkeitsäquivalenten** mit A erfüllbar gdw. $T(A)$ erfüllbar.

Wir werden uns im Folgenden auf die Junktorenmenge $\mathcal{J}_1 = \{\neg, \wedge, \vee\}$ beschränken. Der Begriff „Normalform“ ist insofern irreführend, als es keine universell beste/kleinste/einfachste Darstellung einer jeden Formel über $\mathcal{J}_1[\mathcal{A}]$ gibt.

Normalformen

Oft lassen sich logische Probleme schneller lösen, wenn die Eingaben eine bestimmte einfache Gestalt haben; man spricht dann von **Normalformen**.

Dabei ist darauf zu achten, dass die Transformation von A nach $T(A)$ **nicht zu teuer** ist, hinsichtlich Zeit und Platz, sonst lohnt sich der Aufwand nicht. Prinzipiell unterscheidet man

- **logisch äquivalente** Transformationen mit $A \models T(A)$ von
- **erfüllbarkeitsäquivalenten** mit A erfüllbar gdw. $T(A)$ erfüllbar.

Wir werden uns im Folgenden auf die Junktorenmenge $\mathcal{J}_1 = \{\neg, \wedge, \vee\}$ beschränken. Der Begriff „Normalform“ ist insofern irreführend, als es keine universell beste/kleinste/einfachste Darstellung einer jeden Formel über $\mathcal{J}_1[\mathcal{A}]$ gibt. Unsere Normalformen sind immer auf die (algorithmische) Lösung eines bestimmten Problems zugeschnitten, vorzugsweise auf Anwendungen, wo ohnehin nur Eingaben in der passenden Form entstehen, oder diese leicht in die passende Form gebracht werden können.

Beispiel

Folgende Formeln lassen sich durch Anwendung der de Morgan'schen Regeln ineinander umformen; andere Rechenregeln sind nicht anwendbar:

$$\neg(A \vee (\neg B \wedge C)) \equiv \neg A \wedge \neg(\neg B \wedge C) \equiv \neg A \wedge (B \vee \neg C)$$

Beispiel

Folgende Formeln lassen sich durch Anwendung der de Morgan'schen Regeln ineinander umformen; andere Rechenregeln sind nicht anwendbar:

$$\neg(A \vee (\neg B \wedge C)) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg(\neg B \wedge C) \Leftrightarrow \neg A \wedge (B \vee \neg C)$$

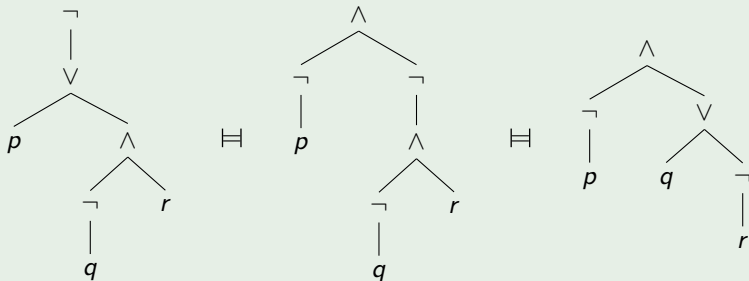
Die Syntaxbäume der äußeren Formeln haben 7 Knoten und 6 Kanten, unterscheiden sich aber in der Tiefe:

Beispiel

Folgende Formeln lassen sich durch Anwendung der de Morgan'schen Regeln ineinander umformen; andere Rechenregeln sind nicht anwendbar:

$$\neg(A \vee (\neg B \wedge C)) \equiv \neg A \wedge \neg(\neg B \wedge C) \equiv \neg A \wedge (B \vee \neg C)$$

Die Syntaxbäume der äußeren Formeln haben 7 Knoten und 6 Kanten, unterscheiden sich aber in der Tiefe:



Die rechte Formel gehört denn auch zu $\text{KNF} \subseteq \text{NNF}$, s.u.

NNF

Definition

NNF Die Teilmenge $NNF \subseteq \mathcal{F}[\mathcal{A}]$ der Formeln in **Negationsnormalform** ist induktiv definiert durch

NNF

Definition

NNF Die Teilmenge $NNF \subseteq \mathcal{F}[\mathcal{A}]$ der Formeln in **Negationsnormalform** ist induktiv definiert durch

- ▶ $\mathcal{A} \cup \neg\mathcal{A} \subseteq NNF$, d.h., alle Literale gehören zu NNF;

NNF

Definition

NNF Die Teilmenge $\text{NNF} \subseteq \mathcal{F}[\mathcal{A}]$ der Formeln in **Negationsnormalform** ist induktiv definiert durch

- ▷ $\mathcal{A} \cup \neg\mathcal{A} \subseteq \text{NNF}$, d.h., alle Literale gehören zu NNF;
- ▷ NNF ist unter Konjunktion (\wedge) und Disjunktion (\vee) abgeschlossen.

NNF

Definition

NNF Die Teilmenge $\text{NNF} \subseteq \mathcal{F}[\mathcal{A}]$ der Formeln in **Negationsnormalform** ist induktiv definiert durch

- ▶ $\mathcal{A} \cup \neg\mathcal{A} \subseteq \text{NNF}$, d.h., alle Literale gehören zu NNF;
- ▶ NNF ist unter Konjunktion (\wedge) und Disjunktion (\vee) abgeschlossen.

Für $A \in \text{NNF}$ sei $\|A\|$ die Anzahl der Positionen, wo Literale auftreten.

NNF

Definition

NNF Die Teilmenge $\text{NNF} \subseteq \mathcal{F}[\mathcal{A}]$ der Formeln in **Negationsnormalform** ist induktiv definiert durch

- ▷ $\mathcal{A} \cup \neg\mathcal{A} \subseteq \text{NNF}$, d.h., alle Literale gehören zu NNF;
- ▷ NNF ist unter Konjunktion (\wedge) und Disjunktion (\vee) abgeschlossen.

Für $A \in \text{NNF}$ sei $\|A\|$ die Anzahl der Positionen, wo Literale auftreten.

Intuitiv sind alle Negationen so weit wie möglich „nach innen“ gezogen.

NNF

Definition

NNF Die Teilmenge $\text{NNF} \subseteq \mathcal{F}[\mathcal{A}]$ der Formeln in **Negationsnormalform** ist induktiv definiert durch

- ▷ $\mathcal{A} \cup \neg\mathcal{A} \subseteq \text{NNF}$, d.h., alle Literale gehören zu NNF;
- ▷ NNF ist unter Konjunktion (\wedge) und Disjunktion (\vee) abgeschlossen.

Für $A \in \text{NNF}$ sei $\|A\|$ die Anzahl der Positionen, wo Literale auftreten.

Intuitiv sind alle Negationen so weit wie möglich „nach innen“ gezogen.

Das nächste Ergebnis ist eine Hausaufgabe:

NNF

Definition

NNF Die Teilmenge $\text{NNF} \subseteq \mathcal{F}[\mathcal{A}]$ der Formeln in **Negationsnormalform** ist induktiv definiert durch

- ▷ $\mathcal{A} \cup \neg\mathcal{A} \subseteq \text{NNF}$, d.h., alle Literale gehören zu NNF;
- ▷ NNF ist unter Konjunktion (\wedge) und Disjunktion (\vee) abgeschlossen.

Für $A \in \text{NNF}$ sei $\|A\|$ die Anzahl der Positionen, wo Literale auftreten.

Intuitiv sind alle Negationen so weit wie möglich „nach innen“ gezogen.

Das nächste Ergebnis ist eine Hausaufgabe:

Lemma

Zu jeder Formel $A \in \mathcal{F}[\mathcal{A}]$ existiert eine äquivalente Formel $B \in \text{NNF}$, so dass die Länge $|B|$ in $\mathcal{O}(|A|)$ liegt, d.h., bis auf eine Konstante linear von $|A|$ abhängt. □

KNF und DNF

Definition

KNF und DNF

Definition

- Eine Disjunktion von Literalen heißt **Klausel**. Man unterscheidet

KNF und DNF

Definition

- Eine Disjunktion von Literalen heißt **Klausel**. Man unterscheidet
 - **positive/negative** Klauseln, in denen alle Literale positiv/negativ sind;

KNF und DNF

Definition

- Eine Disjunktion von Literalen heißt **Klausel**. Man unterscheidet
 - **positive/negative** Klauseln, in denen alle Literale positiv/negativ sind;
 - **Horn-Klauseln** mit maximal einem positiven Literal;

KNF und DNF

Definition

- Eine Disjunktion von Literalen heißt **Klausel**. Man unterscheidet
 - **positive/negative** Klauseln, in denen alle Literale positiv/negativ sind;
 - **Horn-Klauseln** mit maximal einem positiven Literal;
 - **k -Klauseln**, wenn maximal k Literale auftreten;

KNF und DNF

Definition

- Eine Disjunktion von Literalen heißt **Klausel**. Man unterscheidet
 - **positive/negative** Klauseln, in denen alle Literale positiv/negativ sind;
 - **Horn-Klauseln** mit maximal einem positiven Literal;
 - **k -Klauseln**, wenn maximal k Literale auftreten; im Fall $k = 1$ spricht man auch von **Unit-Klauseln**.

KNF und DNF

Definition

- Eine Disjunktion von Literalen heißt **Klausel**. Man unterscheidet
 - **positive/negative** Klauseln, in denen alle Literale positiv/negativ sind;
 - **Horn-Klauseln** mit maximal einem positiven Literal;
 - **k -Klauseln**, wenn maximal k Literale auftreten; im Fall $k = 1$ spricht man auch von **Unit-Klauseln**.
- Eine Konjunktion von Klauseln heißt **konjunktive Normalform (KNF)**,

KNF und DNF

Definition

- Eine Disjunktion von Literalen heißt **Klausel**. Man unterscheidet
 - **positive/negative** Klauseln, in denen alle Literale positiv/negativ sind;
 - **Horn-Klauseln** mit maximal einem positiven Literal;
 - **k -Klauseln**, wenn maximal k Literale auftreten; im Fall $k = 1$ spricht man auch von **Unit-Klauseln**.
- Eine Konjunktion von Klauseln heißt **konjunktive Normalform (KNF)**, speziell **k -KNF** im Fall von k -Klauseln.

KNF und DNF

Definition

- Eine Disjunktion von Literalen heißt **Klausel**. Man unterscheidet
 - **positive/negative** Klauseln, in denen alle Literale positiv/negativ sind;
 - **Horn-Klauseln** mit maximal einem positiven Literal;
 - **k -Klauseln**, wenn maximal k Literale auftreten; im Fall $k = 1$ spricht man auch von **Unit-Klauseln**.
- Eine Konjunktion von Klauseln heißt **konjunktive Normalform (KNF)**, speziell **k -KNF** im Fall von k -Klauseln. Die entsprechenden Teilmengen von $\mathcal{F}_1[\mathcal{A}]$ bezeichnen wir ebenso, also $k\text{-KNF} \subseteq \text{KNF} \subseteq \text{NNF}$.

KNF und DNF

Definition

- Eine Disjunktion von Literalen heißt **Klausel**. Man unterscheidet
 - **positive/negative** Klauseln, in denen alle Literale positiv/negativ sind;
 - **Horn-Klauseln** mit maximal einem positiven Literal;
 - **k -Klauseln**, wenn maximal k Literale auftreten; im Fall $k = 1$ spricht man auch von **Unit-Klauseln**.
- Eine Konjunktion von Klauseln heißt **konjunktive Normalform (KNF)**, speziell **k -KNF** im Fall von k -Klauseln. Die entsprechenden Teilmengen von $\mathcal{F}_1[\mathcal{A}]$ bezeichnen wir ebenso, also $k\text{-KNF} \subseteq \text{KNF} \subseteq \text{NNF}$.

Definition

Vertauscht man in der obigen Definition die Rollen von Konjunktion (\wedge) und Disjunktion (\vee), so erhält man die Begriffe der **co-Klausel** und der **disjunktiven Normalform (DNF)**.

KNF und DNF

Definition

- Eine Disjunktion von Literalen heißt **Klausel**. Man unterscheidet
 - **positive/negative** Klauseln, in denen alle Literale positiv/negativ sind;
 - **Horn-Klauseln** mit maximal einem positiven Literal;
 - **k -Klauseln**, wenn maximal k Literale auftreten; im Fall $k = 1$ spricht man auch von **Unit-Klauseln**.
- Eine Konjunktion von Klauseln heißt **konjunktive Normalform (KNF)**, speziell **k -KNF** im Fall von k -Klauseln. Die entsprechenden Teilmengen von $\mathcal{F}_1[\mathcal{A}]$ bezeichnen wir ebenso, also $k\text{-KNF} \subseteq \text{KNF} \subseteq \text{NNF}$.

Definition

Vertauscht man in der obigen Definition die Rollen von Konjunktion (\wedge) und Disjunktion (\vee), so erhält man die Begriffe der **co-Klausel** und der **disjunktiven Normalform (DNF)**. Es gilt $k\text{-DNF} \subseteq \text{DNF} \subseteq \text{NNF}$.

Beispiel (alternative Mengendarstellung, nur für KNF!)

Die 2-KNF $A = (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$ mit $\|A\| = 6$ hat folgende alternative Darstellung als Menge von Mengen von Literalen:

$$\{\{p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, q\}\}$$

Beispiel (alternative Mengendarstellung, nur für KNF!)

Die 2-KNF $A = (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$ mit $\|A\| = 6$ hat folgende alternative Darstellung als Menge von Mengen von Literalen:

$$\{\{p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, q\}\}$$

Lemma

Zu jeder Formel $A \in \mathcal{F}[\mathcal{A}]$ existiert eine äquivalente Formel $B \in \text{KNF}$, so dass $\|B\|$ in $\mathcal{O}(2^{\|A\|})$ liegt. □

Beispiel (alternative Mengendarstellung, nur für KNF!)

Die 2-KNF $A = (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$ mit $\|A\| = 6$ hat folgende alternative Darstellung als Menge von Mengen von Literalen:

$$\{\{p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, q\}\}$$

Lemma

Zu jeder Formel $A \in \mathcal{F}[\mathcal{A}]$ existiert eine äquivalente Formel $B \in \text{KNF}$, so dass $\|B\|$ in $\mathcal{O}(2^{\|A\|})$ liegt. \square

Die obige Schranke ist strikt: es gibt eine Folge von Formeln A_n , $n \in \mathbb{N}$, mit $\|A_n\| = 2n$, so dass jede logisch äquivalente Formel B_n in KNF mindestens 2^n Positionen mit Literalen hat (HA).

Beispiel (alternative Mengendarstellung, nur für KNF!)

Die 2-KNF $A = (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$ mit $\|A\| = 6$ hat folgende alternative Darstellung als Menge von Mengen von Literalen:

$$\{\{p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, q\}\}$$

Lemma

Zu jeder Formel $A \in \mathcal{F}[A]$ existiert eine äquivalente Formel $B \in \text{KNF}$, so dass $\|B\|$ in $\mathcal{O}(2^{\|A\|})$ liegt. \square

Die obige Schranke ist strikt: es gibt eine Folge von Formeln A_n , $n \in \mathbb{N}$, mit $\|A_n\| = 2n$, so dass jede logisch äquivalente Formel B_n in KNF mindestens 2^n Positionen mit Literalen hat (HA). Die Länge der vollständig geklammerten Formeln eignet sich weniger für derartige Betrachtungen.

Duale Formeln und einfache Zusammenhänge

Definition

Die **duale Formel** zu $A \in \mathcal{F}_1[\mathcal{A}]$ ist gegeben durch

$$\begin{array}{ll} d(p) := p \text{ für } p \in \mathcal{A} & d(B \wedge C) = d(B) \vee d(C) \\ d(\neg A) = \neg d(A) & d(B \vee C) = d(B) \wedge d(C) \end{array}$$

Duale Formeln und einfache Zusammenhänge

Definition

Die **duale Formel** zu $A \in \mathcal{F}_1[\mathcal{A}]$ ist gegeben durch

$$\begin{array}{ll} d(p) := p \text{ für } p \in \mathcal{A} & d(B \wedge C) = d(B) \vee d(C) \\ d(\neg A) = \neg d(A) & d(B \vee C) = d(B) \wedge d(C) \end{array}$$

Lemma

Duale Formeln und einfache Zusammenhänge

Definition

Die **duale Formel** zu $A \in \mathcal{F}_1[\mathcal{A}]$ ist gegeben durch

$$\begin{array}{ll}
 d(p) := p \text{ für } p \in \mathcal{A} & d(B \wedge C) = d(B) \vee d(C) \\
 d(\neg A) = \neg d(A) & d(B \vee C) = d(B) \wedge d(C)
 \end{array}$$

Lemma

- $A \in \text{KNF}$ impliziert $\text{NNF}(\neg A) \in \text{DNF}$

Duale Formeln und einfache Zusammenhänge

Definition

Die **duale Formel** zu $A \in \mathcal{F}_1[\mathcal{A}]$ ist gegeben durch

$$\begin{array}{ll}
 d(p) := p \text{ für } p \in \mathcal{A} & d(B \wedge C) = d(B) \vee d(C) \\
 d(\neg A) = \neg d(A) & d(B \vee C) = d(B) \wedge d(C)
 \end{array}$$

Lemma

- $A \in \text{KNF}$ impliziert $\text{NNF}(\neg A) \in \text{DNF}$
- $A \in \text{KNF}$ genau dann wenn $d(A) \in \text{DNF}$. □

Duale Formeln und einfache Zusammenhänge

Definition

Die **duale Formel** zu $A \in \mathcal{F}_1[\mathcal{A}]$ ist gegeben durch

$$\begin{array}{ll}
 d(p) := p \text{ für } p \in \mathcal{A} & d(B \wedge C) = d(B) \vee d(C) \\
 d(\neg A) = \neg d(A) & d(B \vee C) = d(B) \wedge d(C)
 \end{array}$$

Lemma

- $A \in \text{KNF}$ impliziert $\text{NNF}(\neg A) \in \text{DNF}$
- $A \in \text{KNF}$ genau dann wenn $d(A) \in \text{DNF}$. □

Lemma

Duale Formeln und einfache Zusammenhänge

Definition

Die **duale Formel** zu $A \in \mathcal{F}_1[\mathcal{A}]$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} d(p) &:= p \text{ für } p \in \mathcal{A} & d(B \wedge C) &= d(B) \vee d(C) \\ d(\neg A) &= \neg d(A) & d(B \vee C) &= d(B) \wedge d(C) \end{aligned}$$

Lemma

- $A \in \text{KNF}$ impliziert $\text{NNF}(\neg A) \in \text{DNF}$
- $A \in \text{KNF}$ genau dann wenn $d(A) \in \text{DNF}$. □

Lemma

- $(1 - \varphi)(d(A)) = 1 - \varphi(A)$ für jede Belegung φ .

Duale Formeln und einfache Zusammenhänge

Definition

Die **duale Formel** zu $A \in \mathcal{F}_1[\mathcal{A}]$ ist gegeben durch

$$\begin{array}{ll}
 d(p) := p \text{ für } p \in \mathcal{A} & d(B \wedge C) = d(B) \vee d(C) \\
 d(\neg A) = \neg d(A) & d(B \vee C) = d(B) \wedge d(C)
 \end{array}$$

Lemma

- $A \in \text{KNF}$ impliziert $\text{NNF}(\neg A) \in \text{DNF}$
- $A \in \text{KNF}$ genau dann wenn $d(A) \in \text{DNF}$. □

Lemma

- $(1 - \varphi)(d(A)) = 1 - \varphi(A)$ für jede Belegung φ .
- A ist eine Tautologie gdw. $d(A)$ ist widersprüchlich.

Duale Formeln und einfache Zusammenhänge

Definition

Die **duale Formel** zu $A \in \mathcal{F}_1[\mathcal{A}]$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} d(p) &:= p \text{ für } p \in \mathcal{A} & d(B \wedge C) &= d(B) \vee d(C) \\ d(\neg A) &= \neg d(A) & d(B \vee C) &= d(B) \wedge d(C) \end{aligned}$$

Lemma

- $A \in \text{KNF}$ impliziert $\text{NNF}(\neg A) \in \text{DNF}$
- $A \in \text{KNF}$ genau dann wenn $d(A) \in \text{DNF}$. □

Lemma

- $(1 - \varphi)(d(A)) = 1 - \varphi(A)$ für jede Belegung φ .
- A ist eine Tautologie gdw. $d(A)$ ist widersprüchlich.
- A ist erfüllbar gdw. $d(A)$ ist keine Tautologie. □

Davis-Putnam-Verfahren (für NNF)

Die Erfüllbarkeit einer Formel läßt sich statt mittels einer Wahrheitstabelle gezielter überprüfen, indem man **bottom-up** \top oder \perp für einzelne Variablen substituiert (**Homomorphismus!**, siehe Folie 16), was bei NNF-Formeln aufgrund der Rechenregeln für \top und \perp leicht zu vereinfachen ist und einen binären Formel-Baum liefert mit Blättern aus $\{\top, \perp\}$ liefert.

¹⁰Martin Davis (* 1928)

¹¹Hilary Whitehall Putnam (1926-2016)

Davis-Putnam-Verfahren (für NNF)

Die Erfüllbarkeit einer Formel läßt sich statt mittels einer Wahrheitstabelle gezielter überprüfen, indem man **bottom-up** \top oder \perp für einzelne Variablen substituiert (**Homomorphismus!**, siehe Folie 16), was bei NNF-Formeln aufgrund der Rechenregeln für \top und \perp leicht zu vereinfachen ist und einen binären Formel-Baum liefert mit Blättern aus $\{\top, \perp\}$ liefert.

Lemma

$A \in \text{NNF}$ ist genau dann erfüllbar, wenn eine der Formeln $A[p/\top]$ und $A[p/\perp]$ äquivalent zu einer erfüllbaren Formel ist. □

¹⁰Martin Davis (*1928)

¹¹Hilary Whitehall Putnam (1926-2016)

Davis-Putnam-Verfahren (für NNF)

Die Erfüllbarkeit einer Formel läßt sich statt mittels einer Wahrheitstabelle gezielter überprüfen, indem man **bottom-up** \top oder \perp für einzelne Variablen substituiert (**Homomorphismus!**, siehe Folie 16), was bei NNF-Formeln aufgrund der Rechenregeln für \top und \perp leicht zu vereinfachen ist und einen binären Formel-Baum liefert mit Blättern aus $\{\top, \perp\}$ liefert.

Lemma

$A \in \text{NNF}$ ist genau dann erfüllbar, wenn eine der Formeln $A[p/\top]$ und $A[p/\perp]$ äquivalent zu einer erfüllbaren Formel ist. □

Algorithmen, die diese Idee umsetzen und mit Heuristiken weiter verfeinern, sind als **Davis¹⁰-Putnam¹¹-Verfahren** bekannt.

¹⁰Martin Davis (*1928)

¹¹Hilary Whitehall Putnam (1926-2016)

Davis-Putnam-Verfahren (für NNF)

Die Erfüllbarkeit einer Formel läßt sich statt mittels einer Wahrheitstabelle gezielter überprüfen, indem man **bottom-up** \top oder \perp für einzelne Variablen substituiert (**Homomorphismus!**, siehe Folie 16), was bei NNF-Formeln aufgrund der Rechenregeln für \top und \perp leicht zu vereinfachen ist und einen binären Formel-Baum liefert mit Blättern aus $\{\top, \perp\}$ liefert.

Lemma

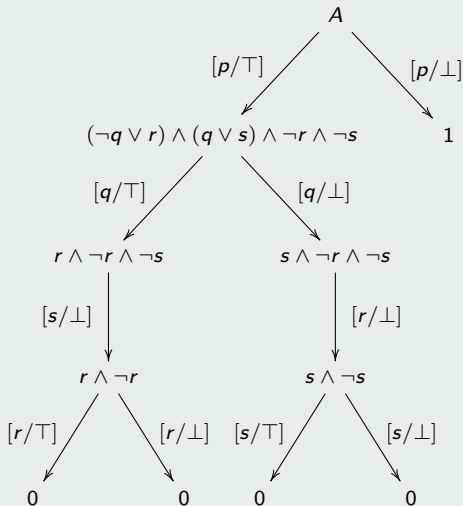
$A \in \text{NNF}$ ist genau dann erfüllbar, wenn eine der Formeln $A[p/\top]$ und $A[p/\perp]$ äquivalent zu einer erfüllbaren Formel ist. □

Algorithmen, die diese Idee umsetzen und mit Heuristiken weiter verfeinern, sind als **Davis¹⁰-Putnam¹¹-Verfahren** bekannt. Das ursprüngliche Verfahren wurde 1960 veröffentlicht, und noch heute kommen seine Varianten in den schnellsten SAT-Solvern zur Anwendung.

¹⁰Martin Davis (*1928)

¹¹Hilary Whitehall Putnam (1926-2016)

Beispiel $(\neg p \vee ((\neg q \vee r) \wedge (q \vee s) \wedge \neg r \wedge \neg s \wedge (p \vee q))) = A$



Damit erfüllt jede Belegung mit $\varphi(p) = 1$ die Formel A .

Regel-baserte Definition von Davis-Putnam

Regel-baserte Definition von Davis-Putnam

(0) keine Verzweigungen:

Regel-baserte Definition von Davis-Putnam

(0) keine Verzweigungen:

- **Unit-Regel**: hat A die Form $p \wedge B$ oder $\neg p \wedge B$ für ein Atom p , oder

Regel-baserte Definition von Davis-Putnam

(0) keine Verzweigungen:

- **Unit-Regel**: hat A die Form $p \wedge B$ oder $\neg p \wedge B$ für ein Atom p , oder
- **Pure-Literal Regel**: tritt $p \in V$ in A nur positiv oder nur negativ auf,

Regel-baserte Definition von Davis-Putnam

(0) keine Verzweigungen:

- **Unit-Regel**: hat A die Form $p \wedge B$ oder $\neg p \wedge B$ für ein Atom p , oder
- **Pure-Literal Regel**: tritt $p \in V$ in A nur positiv oder nur negativ auf, wende nur $[p/\top]$ bzw. $[p/\perp]$ an; dann ist A **erfüllbarkeitsäquivalent** zum Substitut (im ersten Fall zu B).

Regel-baserte Definition von Davis-Putnam

(0) keine Verzweigungen:

- **Unit-Regel**: hat A die Form $p \wedge B$ oder $\neg p \wedge B$ für ein Atom p , oder
- **Pure-Literal Regel**: tritt $p \in V$ in A nur positiv oder nur negativ auf, wende nur $[p/\top]$ bzw. $[p/\perp]$ an; dann ist A **erfüllbarkeitsäquivalent** zum Substitut (im ersten Fall zu B).

(1) **Splitting-Regel**: sonst wende beide Substitutionen an (siehe Lemma).

Regel-baserte Definition von Davis-Putnam

(0) keine Verzweigungen:

- **Unit-Regel:** hat A die Form $p \wedge B$ oder $\neg p \wedge B$ für ein Atom p , oder
- **Pure-Literal Regel:** tritt $p \in V$ in A nur positiv oder nur negativ auf, wende nur $[p/\top]$ bzw. $[p/\perp]$ an; dann ist A **erfüllbarkeitsäquivalent** zum Substitut (im ersten Fall zu B).

(1) **Splitting-Regel:** sonst wende beide Substitutionen an (siehe Lemma).

Im Fall von KNF-Formeln greifen eine weitere Vereinfachung:

Regel-baserte Definition von Davis-Putnam

(0) keine Verzweigungen:

- **Unit-Regel**: hat A die Form $p \wedge B$ oder $\neg p \wedge B$ für ein Atom p , oder
- **Pure-Literal Regel**: tritt $p \in V$ in A nur positiv oder nur negativ auf, wende nur $[p/\top]$ bzw. $[p/\perp]$ an; dann ist A **erfüllbarkeitsäquivalent** zum Substitut (im ersten Fall zu B).

(1) **Splitting-Regel**: sonst wende beide Substitutionen an (siehe Lemma).

Im Fall von KNF-Formeln greifen eine weitere Vereinfachung:

Lemma

Regel-baserte Definition von Davis-Putnam

(0) keine Verzweigungen:

- **Unit-Regel**: hat A die Form $p \wedge B$ oder $\neg p \wedge B$ für ein Atom p , oder
- **Pure-Literal Regel**: tritt $p \in V$ in A nur positiv oder nur negativ auf, wende nur $[p/\top]$ bzw. $[p/\perp]$ an; dann ist A **erfüllbarkeitsäquivalent** zum Substitut (im ersten Fall zu B).

(1) **Splitting-Regel**: sonst wende beide Substitutionen an (siehe Lemma).

Im Fall von KNF-Formeln greifen eine weitere Vereinfachung:

Lemma

- Sind $K \subseteq L$ Klauseln („ K **subsumiert** L “), so gilt $K \models K \wedge L$.

Regel-baserte Definition von Davis-Putnam

(0) keine Verzweigungen:

- **Unit-Regel**: hat A die Form $p \wedge B$ oder $\neg p \wedge B$ für ein Atom p , oder
- **Pure-Literal Regel**: tritt $p \in V$ in A nur positiv oder nur negativ auf, wende nur $[p/\top]$ bzw. $[p/\perp]$ an; dann ist A **erfüllbarkeitsäquivalent** zum Substitut (im ersten Fall zu B).

(1) **Splitting-Regel**: sonst wende beide Substitutionen an (siehe Lemma).

Im Fall von KNF-Formeln greifen eine weitere Vereinfachung:

Lemma

- Sind $K \subseteq L$ Klauseln („ K **subsumiert** L “), so gilt $K \models K \wedge L$.
- Enthält die Klausel K komplementäre Literale, so gilt $K \models \top$. □

Regel-baserte Definition von Davis-Putnam

(0) keine Verzweigungen:

- **Unit-Regel**: hat A die Form $p \wedge B$ oder $\neg p \wedge B$ für ein Atom p , oder
- **Pure-Literal Regel**: tritt $p \in V$ in A nur positiv oder nur negativ auf, wende nur $[p/\top]$ bzw. $[p/\perp]$ an; dann ist A **erfüllbarkeitsäquivalent** zum Substitut (im ersten Fall zu B).

(1) **Splitting-Regel**: sonst wende beide Substitutionen an (siehe Lemma).

Im Fall von KNF-Formeln greifen eine weitere Vereinfachung:

Lemma

- Sind $K \subseteq L$ Klauseln („ K **subsumiert** L “), so gilt $K \models K \wedge L$.
- Enthält die Klausel K komplementäre Literale, so gilt $K \models \top$. □

Das rechtfertigt das Entfernen von subsumierten und tautologischen Klauseln aus einer KNF.

Auswahlkriterien für die Splitting-Regel

Bei der Splitting Regel ist der „Preis“ für den Prozess der Auswahl des Atoms abzuwägen gegen die zu erwartende Vereinfachung beim restlichen Verfahren. Mögliche Auswahlkriterien sind etwa

Auswahlkriterien für die Splitting-Regel

Bei der Splitting Regel ist der „Preis“ für den Prozess der Auswahl des Atoms abzuwägen gegen die zu erwartende Vereinfachung beim restlichen Verfahren. Mögliche Auswahlkriterien sind etwa

- das erste vorkommende Atom (keine Auswahlkosten);

Auswahlkriterien für die Splitting-Regel

Bei der Splitting Regel ist der „Preis“ für den Prozess der Auswahl des Atoms abzuwägen gegen die zu erwartende Vereinfachung beim restlichen Verfahren. Mögliche Auswahlkriterien sind etwa

- das erste vorkommende Atom (keine Auswahlkosten);
- ein am häufigsten vorkommendes Atom;

Auswahlkriterien für die Splitting-Regel

Bei der Splitting Regel ist der „Preis“ für den Prozess der Auswahl des Atoms abzuwägen gegen die zu erwartende Vereinfachung beim restlichen Verfahren. Mögliche Auswahlkriterien sind etwa

- das erste vorkommende Atom (keine Auswahlkosten);
- ein am häufigsten vorkommendes Atom;
- ein Atom p mit $\sum_{p \in K_i} |K_i|$ minimal;

Auswahlkriterien für die Splitting-Regel

Bei der Splitting Regel ist der „Preis“ für den Prozess der Auswahl des Atoms abzuwägen gegen die zu erwartende Vereinfachung beim restlichen Verfahren. Mögliche Auswahlkriterien sind etwa

- das erste vorkommende Atom (keine Auswahlkosten);
- ein am häufigsten vorkommendes Atom;
- ein Atom p mit $\sum_{p \in K_i} |K_i|$ minimal;
- ein Atom p , das in den „kurzen“ Klauseln am häufigsten vorkommt; (braucht eine explizite Schranke, ab wann eine Klausel als „kurz“ gilt);

Auswahlkriterien für die Splitting-Regel

Bei der Splitting Regel ist der „Preis“ für den Prozess der Auswahl des Atoms abzuwägen gegen die zu erwartende Vereinfachung beim restlichen Verfahren. Mögliche Auswahlkriterien sind etwa

- das erste vorkommende Atom (keine Auswahlkosten);
- ein am häufigsten vorkommendes Atom;
- ein Atom p mit $\sum_{p \in K_i} |K_i|$ minimal;
- ein Atom p , das in den „kurzen“ Klauseln am häufigsten vorkommt; (braucht eine explizite Schranke, ab wann eine Klausel als „kurz“ gilt);
- ein Atom, bei dem die Differenz zwischen positiven und negativen Auftreten in den „kurzen“ Klauseln maximal ist.

Auswahlkriterien für die Splitting-Regel

Bei der Splitting Regel ist der „Preis“ für den Prozess der Auswahl des Atoms abzuwägen gegen die zu erwartende Vereinfachung beim restlichen Verfahren. Mögliche Auswahlkriterien sind etwa

- das erste vorkommende Atom (keine Auswahlkosten);
- ein am häufigsten vorkommendes Atom;
- ein Atom p mit $\sum_{p \in K_i} |K_i|$ minimal;
- ein Atom p , das in den „kurzen“ Klauseln am häufigsten vorkommt; (braucht eine explizite Schranke, ab wann eine Klausel als „kurz“ gilt);
- ein Atom, bei dem die Differenz zwischen positiven und negativen Auftreten in den „kurzen“ Klauseln maximal ist.

Konkrete Implementierungen können weitere Heuristiken verwenden.

Resolventen-Methode (für KNF, in Mengenschreibweise)

Satz (Resolutionslemma)

Sind K und K' Klauseln und ist X ein Literal mit $X \in K$ und $\neg X \in K'$, so erfüllt die sog. **Resolvente** $L := (K - X) \cup (K' - \neg X)$,

$$K \wedge K' \models L \quad \text{und damit} \quad K \wedge K' \models K \wedge K' \wedge L \quad \square$$

Resolventen-Methode (für KNF, in Mengenschreibweise)

Satz (Resolutionslemma)

Sind K und K' Klauseln und ist X ein Literal mit $X \in K$ und $\neg X \in K'$, so erfüllt die sog. **Resolvente** $L := (K - X) \cup (K' - \neg X)$,

$$K \wedge K' \models L \quad \text{und damit} \quad K \wedge K' \models K \wedge K' \wedge L \quad \square$$

Daraus gewinnt man einen **Resolutions- oder R-Kalkül** wie folgt:

Resolventen-Methode (für KNF, in Mengenschreibweise)

Satz (Resolutionslemma)

Sind K und K' Klauseln und ist X ein Literal mit $X \in K$ und $\neg X \in K'$, so erfüllt die sog. **Resolvente** $L := (K - X) \cup (K' - \neg X)$,

$$K \wedge K' \models L \quad \text{und damit} \quad K \wedge K' \models K \wedge K' \wedge L \quad \square$$

Daraus gewinnt man einen **Resolutions- oder R-Kalkül** wie folgt:

Definition

Unter einer **R-Herleitung** einer Klausel K aus $A \in \text{KNF}$, geschrieben $A \vdash_{\text{res}} K$, versteht man eine Klausel-Folge K_i , $i < n$, mit

Resolventen-Methode (für KNF, in Mengenschreibweise)

Satz (Resolutionslemma)

Sind K und K' Klauseln und ist X ein Literal mit $X \in K$ und $\neg X \in K'$, so erfüllt die sog. **Resolvente** $L := (K - X) \cup (K' - \neg X)$,

$$K \wedge K' \models L \quad \text{und damit} \quad K \wedge K' \models K \wedge K' \wedge L \quad \square$$

Daraus gewinnt man einen **Resolutions- oder R-Kalkül** wie folgt:

Definition

Unter einer **R-Herleitung** einer Klausel K aus $A \in \text{KNF}$, geschrieben $A \vdash_{\text{res}} K$, versteht man eine Klausel-Folge K_i , $i < n$, mit

- $K_{n-1} = K$;

Resolventen-Methode (für KNF, in Mengenschreibweise)

Satz (Resolutionslemma)

Sind K und K' Klauseln und ist X ein Literal mit $X \in K$ und $\neg X \in K'$, so erfüllt die sog. **Resolvente** $L := (K - X) \cup (K' - \neg X)$,

$$K \wedge K' \models L \quad \text{und damit} \quad K \wedge K' \models K \wedge K' \wedge L \quad \square$$

Daraus gewinnt man einen **Resolutions- oder R-Kalkül** wie folgt:

Definition

Unter einer **R-Herleitung** einer Klausel K aus $A \in \text{KNF}$, geschrieben $A \vdash_{\text{res}} K$, versteht man eine Klausel-Folge K_i , $i < n$, mit

- $K_{n-1} = K$;
- für $i < n$ gilt

Resolventen-Methode (für KNF, in Mengenschreibweise)

Satz (Resolutionslemma)

Sind K und K' Klauseln und ist X ein Literal mit $X \in K$ und $\neg X \in K'$, so erfüllt die sog. **Resolvente** $L := (K - X) \cup (K' - \neg X)$,

$$K \wedge K' \models L \quad \text{und damit} \quad K \wedge K' \models K \wedge K' \wedge L \quad \square$$

Daraus gewinnt man einen **Resolutions- oder R-Kalkül** wie folgt:

Definition

Unter einer **R-Herleitung** einer Klausel K aus $A \in \text{KNF}$, geschrieben $A \vdash_{\text{res}} K$, versteht man eine Klausel-Folge K_i , $i < n$, mit

- $K_{n-1} = K$;
- für $i < n$ gilt
 - entweder $K_i \in A$,

Resolventen-Methode (für KNF, in Mengenschreibweise)

Satz (Resolutionslemma)

Sind K und K' Klauseln und ist X ein Literal mit $X \in K$ und $\neg X \in K'$, so erfüllt die sog. **Resolvente** $L := (K - X) \cup (K' - \neg X)$,

$$K \wedge K' \models L \quad \text{und damit} \quad K \wedge K' \models K \wedge K' \wedge L \quad \square$$

Daraus gewinnt man einen **Resolutions- oder R-Kalkül** wie folgt:

Definition

Unter einer **R-Herleitung** einer Klausel K aus $A \in \text{KNF}$, geschrieben $A \vdash_{\text{res}} K$, versteht man eine Klausel-Folge K_i , $i < n$, mit

- $K_{n-1} = K$;
- für $i < n$ gilt
 - entweder $K_i \in A$,
 - oder K_i ist Resolvente von K_j und K_k mit $j, k < i$.

Satz

Der R-Kalkül ist korrekt aber *nicht vollständig*, d.h.,

$$A \vdash_{res} K \quad \text{impliziert} \quad A \models K$$

aber nicht notwendig umgekehrt.

Satz

Der R-Kalkül ist korrekt aber *nicht vollständig*, d.h.,

$$A \vdash_{\text{res}} K \quad \text{impliziert} \quad A \models K$$

aber nicht notwendig umgekehrt.

Beweis.

Die Korrektheit folgt aus dem Resolutionslemma, während $p \wedge (p \vee q) \models p$ zeigt, dass der R-Kalkül nicht vollständig ist. \square

Satz

Der R-Kalkül ist korrekt aber *nicht vollständig*, d.h.,

$$A \vdash_{\text{res}} K \quad \text{impliziert} \quad A \models K$$

aber nicht notwendig umgekehrt.

Beweis.

Die Korrektheit folgt aus dem Resolutionslemma, während $p \wedge (p \vee q) \models p$ zeigt, dass der R-Kalkül nicht vollständig ist. \square

Satz (Widerlegungsvollständig- und Korrektheit, Robinson)

$A \in \text{KNF}$ ist genau dann unerfüllbar, wenn $A \vdash_{\text{res}} \emptyset$.

Satz

Der R-Kalkül ist korrekt aber *nicht vollständig*, d.h.,

$$A \vdash_{\text{res}} K \text{ impliziert } A \models K$$

aber nicht notwendig umgekehrt.

Beweis.

Die Korrektheit folgt aus dem Resolutionslemma, während $p \wedge (p \vee q) \models p$ zeigt, dass der R-Kalkül nicht vollständig ist. \square

Satz (Widerlegungsvollständig- und Korrektheit, Robinson)

$A \in \text{KNF}$ ist genau dann unerfüllbar, wenn $A \vdash_{\text{res}} \emptyset$.

Beweis.

Tritt \emptyset als Resolvente auf, gilt nach Resolutionslemma $A \models A \wedge \perp \models \perp$.

Beweis, Fortsetzung.

Sei A unerfüllbar. Betrachte die Anzahl k verschiedener Literale in A .

Beweis, Fortsetzung.

Sei A unerfüllbar. Betrachte die Anzahl k verschiedener Literale in A .

$k = 0$: Dann gilt $A = \emptyset$.

Beweis, Fortsetzung.

Sei A unerfüllbar. Betrachte die Anzahl k verschiedener Literale in A .

$k = 0$: Dann gilt $A = \emptyset$.

Annahme: Die Behauptung stimmt für alle $i < k$.

Beweis, Fortsetzung.

Sei A unerfüllbar. Betrachte die Anzahl k verschiedener Literale in A .

$k = 0$: Dann gilt $A = \emptyset$.

Annahme: Die Behauptung stimmt für alle $i < k$.

$k > 0$: OBdA enthalte A keine tautologischen oder subsumierten Klauseln.

Beweis, Fortsetzung.

Sei A unerfüllbar. Betrachte die Anzahl k verschiedener Literale in A .

$k = 0$: Dann gilt $A = \emptyset$.

Annahme: Die Behauptung stimmt für alle $i < k$.

$k > 0$: OBdA enthalte A keine tautologischen oder subsumierten Klauseln. In A tritt ein Atom p positiv und negativ auf, sonst wäre A erfüllbar.

Beweis, Fortsetzung.

Sei A unerfüllbar. Betrachte die Anzahl k verschiedener Literale in A .

$k = 0$: Dann gilt $A = \emptyset$.

Annahme: Die Behauptung stimmt für alle $i < k$.

$k > 0$: OBdA enthalte A keine tautologischen oder subsumierten Klauseln. In A tritt ein Atom p positiv und negativ auf, sonst wäre A erfüllbar.

A_+ enthalte alle A -Klauseln, in denen p auftritt;

Beweis, Fortsetzung.

Sei A unerfüllbar. Betrachte die Anzahl k verschiedener Literale in A .

$k = 0$: Dann gilt $A = \emptyset$.

Annahme: Die Behauptung stimmt für alle $i < k$.

$k > 0$: OBdA enthalte A keine tautologischen oder subsumierten Klauseln. In A tritt ein Atom p positiv und negativ auf, sonst wäre A erfüllbar.

A_+ enthalte alle A -Klauseln, in denen p auftritt;

A_- enthalte alle A -Klauseln, in denen $\neg p$ auftritt;

Beweis, Fortsetzung.

Sei A unerfüllbar. Betrachte die Anzahl k verschiedener Literale in A .

$k = 0$: Dann gilt $A = \emptyset$.

Annahme: Die Behauptung stimmt für alle $i < k$.

$k > 0$: OBdA enthalte A keine tautologischen oder subsumierten Klauseln. In A tritt ein Atom p positiv und negativ auf, sonst wäre A erfüllbar.

A_+ enthalte alle A -Klauseln, in denen p auftritt;

A_- enthalte alle A -Klauseln, in denen $\neg p$ auftritt;

A_* enthalte alle A -Klauseln, in denen weder p noch $\neg p$ auftritt.

Beweis, Fortsetzung.

Sei A unerfüllbar. Betrachte die Anzahl k verschiedener Literale in A .

$k = 0$: Dann gilt $A = \emptyset$.

Annahme: Die Behauptung stimmt für alle $i < k$.

$k > 0$: OBdA enthalte A keine tautologischen oder subsumierten Klauseln. In A tritt ein Atom p positiv und negativ auf, sonst wäre A erfüllbar.

A_+ enthalte alle A -Klauseln, in denen p auftritt;

A_- enthalte alle A -Klauseln, in denen $\neg p$ auftritt;

A_* enthalte alle A -Klauseln, in denen weder p noch $\neg p$ auftritt.

Wegen $A = A_+ \cup A_- \cup A_*$ folgt aus der Unerfüllbarkeit einer oder der Vereinigung zweier dieser Klauselmengen nach Annahme die Behauptung.

Beweis, Fortsetzung.

Sei A unerfüllbar. Betrachte die Anzahl k verschiedener Literale in A .

$k = 0$: Dann gilt $A = \emptyset$.

Annahme: Die Behauptung stimmt für alle $i < k$.

$k > 0$: OBdA enthalte A keine tautologischen oder subsumierten Klauseln. In A tritt ein Atom p positiv und negativ auf, sonst wäre A erfüllbar.

A_+ enthalte alle A -Klauseln, in denen p auftritt;

A_- enthalte alle A -Klauseln, in denen $\neg p$ auftritt;

A_* enthalte alle A -Klauseln, in denen weder p noch $\neg p$ auftritt.

Wegen $A = A_+ \cup A_- \cup A_*$ folgt aus der Unerfüllbarkeit einer oder der Vereinigung zweier dieser Klauselmengen nach Annahme die Behauptung.

Andernfalls sind $A_+ \cup A_*$ und $A_- \cup A_*$ erfüllbar, aber nicht von derselben Belegung.

Beweis, Fortsetzung.

Sei A unerfüllbar. Betrachte die Anzahl k verschiedener Literale in A .

$k = 0$: Dann gilt $A = \emptyset$.

Annahme: Die Behauptung stimmt für alle $i < k$.

$k > 0$: OBdA enthalte A keine tautologischen oder subsumierten Klauseln. In A tritt ein Atom p positiv und negativ auf, sonst wäre A erfüllbar.

A_+ enthalte alle A -Klauseln, in denen p auftritt;

A_- enthalte alle A -Klauseln, in denen $\neg p$ auftritt;

A_* enthalte alle A -Klauseln, in denen weder p noch $\neg p$ auftritt.

Wegen $A = A_+ \cup A_- \cup A_*$ folgt aus der Unerfüllbarkeit einer oder der Vereinigung zweier dieser Klauselmengen nach Annahme die Behauptung.

Andernfalls sind $A_+ \cup A_*$ und $A_- \cup A_*$ erfüllbar, aber nicht von derselben Belegung.

Behauptung: $A_+ \cup A_* \vdash_{\text{res}} \{p\}$ und $A_- \cup A_* \vdash_{\text{res}} \{\neg p\}$

Beweis, Fortsetzung.

Betrachte $\tilde{A}_+ := \{ K - \{p\} : K \in A_+ \}$.

Beweis, Fortsetzung.

Betrachte $\tilde{A}_+ := \{K - \{p\} : K \in A_+\}$.

Anname: $\tilde{A}_+ \cup A_*$ wird von φ erfüllt. Dann gilt oBdA $\varphi(p) = 0$ und folglich werden $A_+ \cup A_*$ wie auch $A_- \cup A_*$ von φ erfüllt, Widerspruch.

Beweis, Fortsetzung.

Betrachte $\tilde{A}_+ := \{ K - \{p\} : K \in A_+ \}$.

Anname: $\tilde{A}_+ \cup A_*$ wird von φ erfüllt. Dann gilt oBdA $\varphi(p) = 0$ und folglich werden $A_+ \cup A_*$ wie auch $A_- \cup A_*$ von φ erfüllt, Widerspruch.

Also gilt $\tilde{A}_+ \cup A_* \vdash_{\text{res}} \emptyset$, etwa mittels der R-Herleitung J_r , $r < t$ minimaler Länge. Da A_* nach Voraussetzung erfüllbar ist, garantiert die Minimalität, dass immer wenn J_s Resolvente von Klauseln J_p und J_q mit $p, q < r$ sind, mindestens eine der Klauseln zu \tilde{A}_+ gehört.

Beweis, Fortsetzung.

Betrachte $\tilde{A}_+ := \{ K - \{p\} : K \in A_+ \}$.

Anname: $\tilde{A}_+ \cup A_*$ wird von φ erfüllt. Dann gilt oBdA $\varphi(p) = 0$ und folglich werden $A_+ \cup A_*$ wie auch $A_- \cup A_*$ von φ erfüllt, Widerspruch.

Also gilt $\tilde{A}_+ \cup A_* \vdash_{\text{res}} \emptyset$, etwa mittels der R-Herleitung J_r , $r < t$ minimaler Länge. Da A_* nach Voraussetzung erfüllbar ist, garantiert die Minimalität, dass immer wenn J_s Resolvente von Klauseln J_p und J_q mit $p, q < r$ sind, mindestens eine der Klauseln zu \tilde{A}_+ gehört. Dann liefert

$$J'_r := \begin{cases} J_r \cup \{p\} & \text{falls } J_r \in A_+ \\ J_r & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis, Fortsetzung.

Betrachte $\tilde{A}_+ := \{ K - \{p\} : K \in A_+ \}$.

Anname: $\tilde{A}_+ \cup A_*$ wird von φ erfüllt. Dann gilt oBdA $\varphi(p) = 0$ und folglich werden $A_+ \cup A_*$ wie auch $A_- \cup A_*$ von φ erfüllt, Widerspruch.

Also gilt $\tilde{A}_+ \cup A_* \vdash_{\text{res}} \emptyset$, etwa mittels der R-Herleitung J_r , $r < t$ minimaler Länge. Da A_* nach Voraussetzung erfüllbar ist, garantiert die Minimalität, dass immer wenn J_s Resolvente von Klauseln J_p und J_q mit $p, q < r$ sind, mindestens eine der Klauseln zu \tilde{A}_+ gehört. Dann liefert

$$J'_r := \begin{cases} J_r \cup \{p\} & \text{falls } J_r \in A_+ \\ J_r & \text{sonst} \end{cases}$$

eine R-Herleitung von $\{p\}$ aus $A_+ \cup A_*$.

Beweis, Fortsetzung.

Betrachte $\tilde{A}_+ := \{ K - \{p\} : K \in A_+ \}$.

Anname: $\tilde{A}_+ \cup A_*$ wird von φ erfüllt. Dann gilt oBdA $\varphi(p) = 0$ und folglich werden $A_+ \cup A_*$ wie auch $A_- \cup A_*$ von φ erfüllt, Widerspruch.

Also gilt $\tilde{A}_+ \cup A_* \vdash_{\text{res}} \emptyset$, etwa mittels der R-Herleitung J_r , $r < t$ minimaler Länge. Da A_* nach Voraussetzung erfüllbar ist, garantiert die Minimalität, dass immer wenn J_s Resolvente von Klauseln J_p und J_q mit $p, q < r$ sind, mindestens eine der Klauseln zu \tilde{A}_+ gehört. Dann liefert

$$J'_r := \begin{cases} J_r \cup \{p\} & \text{falls } J_r \in A_+ \\ J_r & \text{sonst} \end{cases}$$

eine R-Herleitung von $\{p\}$ aus $A_+ \cup A_*$. Analog gilt $A_- \cup A_* \vdash_{\text{res}} \{\neg p\}$. Beides zusammen impliziert $A \vdash_{\text{res}} \emptyset$. □

Resolutions-Heuristiken

Definition

Für $A \in \text{KNF}$ bezeichnet $\mathbf{Res}(A)$ die Menge aller Klauseln, die in endlich vielen Schritten als Resolventen aus den Klauseln von A konstruierbar sind.

Resolutions-Heuristiken

Definition

Für $A \in \text{KNF}$ bezeichnet $\mathbf{Res}(A)$ die Menge aller Klauseln, die in endlich vielen Schritten als Resolventen aus den Klauseln von A konstruierbar sind.

Ein naiver Algorithmus basiert auf der Tatsache, dass $A \in \text{KNF}$ genau dann erfüllbar ist, wenn $\emptyset \in \mathbf{Res}(A)$ gilt. **Dies wird nicht empfohlen.**

Resolutions-Heuristiken

Definition

Für $A \in \text{KNF}$ bezeichnet $\mathbf{Res}(A)$ die Menge aller Klauseln, die in endlich vielen Schritten als Resolventen aus den Klauseln von A konstruierbar sind.

Ein naiver Algorithmus basiert auf der Tatsache, dass $A \in \text{KNF}$ genau dann erfüllbar ist, wenn $\emptyset \in \mathbf{Res}(A)$ gilt. **Dies wird nicht empfohlen.**

Stattdessen kann man sich auf **starkte Herleitungen** beschränken, in denen

Resolutions-Heuristiken

Definition

Für $A \in \text{KNF}$ bezeichnet $\mathbf{Res}(A)$ die Menge aller Klauseln, die in endlich vielen Schritten als Resolventen aus den Klauseln von A konstruierbar sind.

Ein naiver Algorithmus basiert auf der Tatsache, dass $A \in \text{KNF}$ genau dann erfüllbar ist, wenn $\emptyset \in \mathbf{Res}(A)$ gilt. **Dies wird nicht empfohlen.**

Stattdessen kann man sich auf **starkte Herleitungen** beschränken, in denen

- ▷ keine Klausel mehrfach auftritt;

Resolutions-Heuristiken

Definition

Für $A \in \text{KNF}$ bezeichnet $\mathbf{Res}(A)$ die Menge aller Klauseln, die in endlich vielen Schritten als Resolventen aus den Klauseln von A konstruierbar sind.

Ein naiver Algorithmus basiert auf der Tatsache, dass $A \in \text{KNF}$ genau dann erfüllbar ist, wenn $\emptyset \in \mathbf{Res}(A)$ gilt. **Dies wird nicht empfohlen.**

Stattdessen kann man sich auf **starkte Herleitungen** beschränken, in denen

- ▷ keine Klausel mehrfach auftritt;
- ▷ keine tautologischen Klauseln auftreten;

Resolutions-Heuristiken

Definition

Für $A \in \text{KNF}$ bezeichnet $\mathbf{Res}(A)$ die Menge aller Klauseln, die in endlich vielen Schritten als Resolventen aus den Klauseln von A konstruierbar sind.

Ein naiver Algorithmus basiert auf der Tatsache, dass $A \in \text{KNF}$ genau dann erfüllbar ist, wenn $\emptyset \in \mathbf{Res}(A)$ gilt. **Dies wird nicht empfohlen.**

Stattdessen kann man sich auf **starkte Herleitungen** beschränken, in denen

- ▷ keine Klausel mehrfach auftritt;
- ▷ keine tautologischen Klauseln auftreten;
- ▷ keine Klauseln von Vorgängern subsumiert werden.

Resolutions-Heuristiken

Definition

Für $A \in \text{KNF}$ bezeichnet $\mathbf{Res}(A)$ die Menge aller Klauseln, die in endlich vielen Schritten als Resolventen aus den Klauseln von A konstruierbar sind.

Ein naiver Algorithmus basiert auf der Tatsache, dass $A \in \text{KNF}$ genau dann erfüllbar ist, wenn $\emptyset \in \mathbf{Res}(A)$ gilt. **Dies wird nicht empfohlen.**

Stattdessen kann man sich auf **starkte Herleitungen** beschränken, in denen

- ▷ keine Klausel mehrfach auftritt;
- ▷ keine tautologischen Klauseln auftreten;
- ▷ keine Klauseln von Vorgängern subsumiert werden.

Dies erlaubt es, aus $\mathbf{Res}(A)$ bestimmte Klauseln zu entfernen und mit einer potentiell kleineren Menge $\mathbf{Res}'(A)$ zu arbeiten.

Resolutions-Heuristiken

Definition

Für $A \in \text{KNF}$ bezeichnet $\mathbf{Res}(A)$ die Menge aller Klauseln, die in endlich vielen Schritten als Resolventen aus den Klauseln von A konstruierbar sind.

Ein naiver Algorithmus basiert auf der Tatsache, dass $A \in \text{KNF}$ genau dann erfüllbar ist, wenn $\emptyset \in \mathbf{Res}(A)$ gilt. **Dies wird nicht empfohlen.**

Stattdessen kann man sich auf **starkte Herleitungen** beschränken, in denen

- ▷ keine Klausel mehrfach auftritt;
- ▷ keine tautologischen Klauseln auftreten;
- ▷ keine Klauseln von Vorgängern subsumiert werden.

Dies erlaubt es, aus $\mathbf{Res}(A)$ bestimmte Klauseln zu entfernen und mit einer potentiell kleineren Menge $\mathbf{Res}'(A)$ zu arbeiten.

Zur Handrechnung ziehen wir ein systematisches graphisches Verfahren vor:

Bevorzugtes Verfahren zur Handrechnung mit Beispiel

$$A = \{\{\neg q\}, \{\neg p, q, \neg r, \neg s\}, \{s\}, \{p, r\}, \{\neg p, \neg t\}, \{r, t\}, \{p, \neg r\}\}$$

Bevorzugtes Verfahren zur Handrechnung mit Beispiel

$$A = \{\{\neg q\}, \{\neg p, q, \neg r, \neg s\}, \{s\}, \{p, r\}, \{\neg p, \neg t\}, \{r, t\}, \{p, \neg r\}\}$$

- ▶ Ordne die auftretenden Atome (beliebig) linear an;

Bevorzugtes Verfahren zur Handrechnung mit Beispiel

$$A = \{\{\neg q\}, \{\neg p, q, \neg r, \neg s\}, \{s\}, \{p, r\}, \{\neg p, \neg t\}, \{r, t\}, \{p, \neg r\}\}$$

- ▷ Ordne die auftretenden Atome (beliebig) linear an;
- ▷ konstruiere **schichtweise** alle Resolventen bzgl. des jeweils aktuellen Atoms;

Bevorzugtes Verfahren zur Handrechnung mit Beispiel

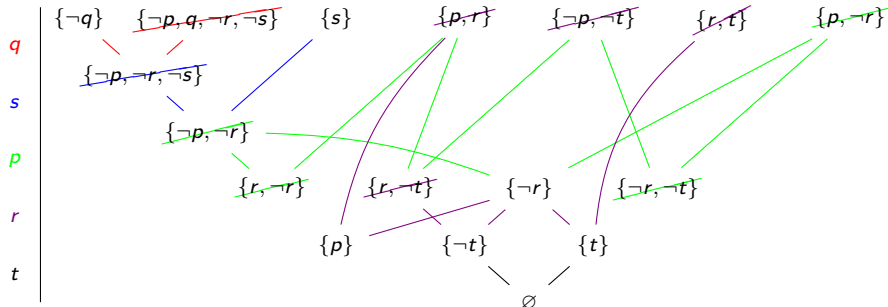
$$A = \{\{\neg q\}, \{\neg p, q, \neg r, \neg s\}, \{s\}, \{p, r\}, \{\neg p, \neg t\}, \{r, t\}, \{p, \neg r\}\}$$

- ▷ Ordne die auftretenden Atome (beliebig) linear an;
- ▷ konstruiere **schichtweise** alle Resolventen bzgl. des jeweils aktuellen Atoms; streiche dabei so früh wie möglich entstehende tautologische oder subsumierte Formeln;

Bevorzugtes Verfahren zur Handrechnung mit Beispiel

$$A = \{\{\neg q\}, \{\neg p, q, \neg r, \neg s\}, \{s\}, \{p, r\}, \{\neg p, \neg t\}, \{r, t\}, \{p, \neg r\}\}$$

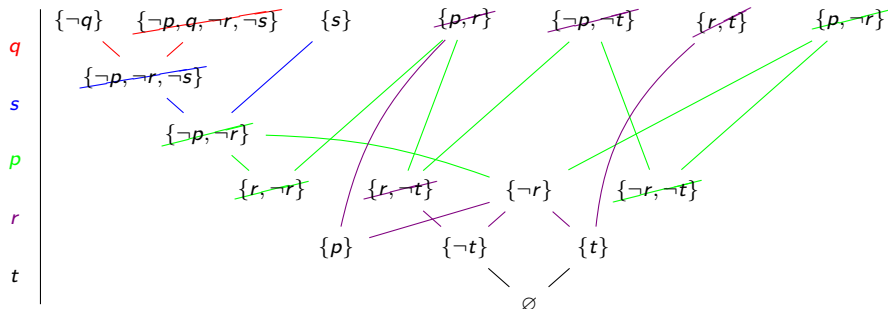
- ▷ Ordne die auftretenden Atome (beliebig) linear an;
- ▷ konstruiere **schichtweise** alle Resolventen bzgl. des jeweils aktuellen Atoms; streiche dabei so früh wie möglich entstehende tautologische oder subsumierte Formeln;



Bevorzugtes Verfahren zur Handrechnung mit Beispiel

$$A = \{\{\neg q\}, \{\neg p, q, \neg r, \neg s\}, \{s\}, \{p, r\}, \{\neg p, \neg t\}, \{r, t\}, \{p, \neg r\}\}$$

- ▷ Ordne die auftretenden Atome (beliebig) linear an;
- ▷ konstruiere **schichtweise** alle Resolventen bzgl. des jeweils aktuellen Atoms; streiche dabei so früh wie möglich entstehende tautologische oder subsumierte Formeln;



R-Herleitung: $\{p, r\}, \{\neg p, \neg t\}, \{r, t\}, \{r, \neg t\}, \{\neg r\}, \{t\}, \{\neg t\}, \emptyset$

Zur Übung möge man eine andere Reihenfolge der Atome ausprobieren!

Zur Übung möge man eine andere Reihenfolge der Atome ausprobieren!

Bemerkungen

Zur Übung möge man eine andere Reihenfolge der Atome ausprobieren!

Bemerkungen

- Das Berechnen des Resolutionsabschlusses **Res**(A) (außer tautologischen Klauseln) ist unter dem Namen **Stufenstrategie** bekannt. Sofern \emptyset nicht auftritt kann man sämtliche erfüllenden Belegungen bestimmen. (Für Handrechnung zu fehleranfällig.)

Zur Übung möge man eine andere Reihenfolge der Atome ausprobieren!

Bemerkungen

- Das Berechnen des Resolutionsabschlusses **Res**(A) (außer tautologischen Klauseln) ist unter dem Namen **Stufenstrategie** bekannt. Sofern \emptyset nicht auftritt kann man sämtliche erfüllenden Belegungen bestimmen. (Für Handrechnung zu fehleranfällig.)
- Bei der sog. **Stützmengenrestriktion** werden Unit-Klauseln bevorzugt zur Resolventenbildung herangezogen.

Zur Übung möge man eine andere Reihenfolge der Atome ausprobieren!

Bemerkungen

- Das Berechnen des Resolutionsabschlusses **Res**(A) (außer tautologischen Klauseln) ist unter dem Namen **Stufenstrategie** bekannt. Sofern \emptyset nicht auftritt kann man sämtliche erfüllenden Belegungen bestimmen. (Für Handrechnung zu fehleranfällig.)
- Bei der sog. **Stützmengenrestriktion** werden Unit-Klauseln bevorzugt zur Resolventenbildung herangezogen.
- Bei **P-** bzw. **N-Resolution** sollte eine der beteiligten Klauseln nur positive (negative) Literale enthalten.

Zur Übung möge man eine andere Reihenfolge der Atome ausprobieren!

Bemerkungen

- Das Berechnen des Resolutionsabschlusses **Res**(A) (außer tautologischen Klauseln) ist unter dem Namen **Stufenstrategie** bekannt. Sofern \emptyset nicht auftritt kann man sämtliche erfüllenden Belegungen bestimmen. (Für Handrechnung zu fehleranfällig.)
- Bei der sog. **Stützmengenrestriktion** werden Unit-Klauseln bevorzugt zur Resolventenbildung herangezogen.
- Bei **P-** bzw. **N-Resolution** sollte eine der beteiligten Klauseln nur positive (negative) Literale enthalten.
- Zumindest für Formeln in 2-KNF und für Horn-Formeln (mit höchstens einem positiven Literal pro Klausel) ist die Resolution effizient. I.A. ist das nicht der Fall:

Resolution ist i.A. nicht effizient

Satz

Es gibt eine Folge $\emptyset \neq A_k \in KNF$, $k \in \mathbb{N}$, mit folgenden Eigenschaften:

Resolution ist i.A. nicht effizient

Satz

Es gibt eine Folge $\emptyset \neq A_k \in KNF$, $k \in \mathbb{N}$, mit folgenden Eigenschaften:

- ▷ in A_k kommen höchstens die Atome p_i , $i < 2k + 1$ vor;*

Resolution ist i.A. nicht effizient

Satz

Es gibt eine Folge $\emptyset \neq A_k \in KNF$, $k \in \mathbb{N}$, mit folgenden Eigenschaften:

- ▷ in A_k kommen höchstens die Atome p_i , $i < 2k + 1$ vor;
- ▷ A_k hat $k + 1$ Klauseln;

Resolution ist i.A. nicht effizient

Satz

Es gibt eine Folge $\emptyset \neq A_k \in \text{KNF}$, $k \in \mathbb{N}$, mit folgenden Eigenschaften:

- ▷ in A_k kommen höchstens die Atome p_i , $i < 2k + 1$ vor;
- ▷ A_k hat $k + 1$ Klauseln;
- ▷ keine der $2^{k+1} - 1$ Klauseln in $\text{Res}(A_k)$ subsumiert eine andere.

Resolution ist i.A. nicht effizient

Satz

Es gibt eine Folge $\emptyset \neq A_k \in \text{KNF}$, $k \in \mathbb{N}$, mit folgenden Eigenschaften:

- ▷ in A_k kommen höchstens die Atome p_i , $i < 2k + 1$ vor;
- ▷ A_k hat $k + 1$ Klauseln;
- ▷ keine der $2^{k+1} - 1$ Klauseln in $\text{Res}(A_k)$ subsumiert eine andere.

Beweis.

$k = 0$: $A_0 = p_0$ hat $2^0 - 1 = 0$ binäre Resolventen.

Resolution ist i.A. nicht effizient

Satz

Es gibt eine Folge $\emptyset \neq A_k \in \text{KNF}$, $k \in \mathbb{N}$, mit folgenden Eigenschaften:

- ▷ in A_k kommen höchstens die Atome p_i , $i < 2k + 1$ vor;
- ▷ A_k hat $k + 1$ Klauseln;
- ▷ keine der $2^{k+1} - 1$ Klauseln in $\text{Res}(A_k)$ subsumiert eine andere.

Beweis.

$k = 0$: $A_0 = p_0$ hat $2^0 - 1 = 0$ binäre Resolventen.

Annahme: $A_k = \bigwedge_{i < k+1} K_{k,i}$ habe die gewünschten Eigenschaften.

Resolution ist i.A. nicht effizient

Satz

Es gibt eine Folge $\emptyset \neq A_k \in \text{KNF}$, $k \in \mathbb{N}$, mit folgenden Eigenschaften:

- ▷ in A_k kommen höchstens die Atome p_i , $i < 2k + 1$ vor;
- ▷ A_k hat $k + 1$ Klauseln;
- ▷ keine der $2^{k+1} - 1$ Klauseln in $\text{Res}(A_k)$ subsumiert eine andere.

Beweis.

$k = 0$: $A_0 = p_0$ hat $2^0 - 1 = 0$ binäre Resolventen.

Annahme: $A_k = \bigwedge_{i < k+1} K_{k,i}$ habe die gewünschten Eigenschaften.

$k + 1$: $A_{k+1} := \text{KNF}(A_k \vee q_{2k}) \wedge (\neg q_{2k} \vee q_{2k+1})$ hat zwei Atome und eine Klausel mehr als A_k , und $\text{Res}(A_{k+1})$ hat alle um p_{2k} bzw. p_{2k-1} vergrößerten Resolventen von A_k , sowie $\{\neg p_{2k}, p_{2k-1}\}$.

Resolution ist i.A. nicht effizient

Satz

Es gibt eine Folge $\emptyset \neq A_k \in \text{KNF}$, $k \in \mathbb{N}$, mit folgenden Eigenschaften:

- ▷ in A_k kommen höchstens die Atome p_i , $i < 2k + 1$ vor;
- ▷ A_k hat $k + 1$ Klauseln;
- ▷ keine der $2^{k+1} - 1$ Klauseln in $\text{Res}(A_k)$ subsumiert eine andere.

Beweis.

$k = 0$: $A_0 = p_0$ hat $2^0 - 1 = 0$ binäre Resolventen.

Annahme: $A_k = \bigwedge_{i < k+1} K_{k,i}$ habe die gewünschten Eigenschaften.

$k + 1$: $A_{k+1} := \text{KNF}(A_k \vee q_{2k}) \wedge (\neg q_{2k} \vee q_{2k+1})$ hat zwei Atome und eine Klausel mehr als A_k , und $\text{Res}(A_{k+1})$ hat alle um p_{2k} bzw. p_{2k-1} vergrößerten Resolventen von A_k , sowie $\{\neg p_{2k}, p_{2k-1}\}$. Dabei entstehen keine neuen Mengeninklusionen. □

Teil 2

Prädikatenlogik

(1. Stufe mit Gleichheit)

Kapitel 6

Motivation und Überblick

Defizite der Aussagenlogik

Defizite der Aussagenlogik

- Die Aussagenlogik ist universell anwendbar, wo potentiell wahre oder falsche Aussagen formuliert und miteinander kombiniert werden können, sei es die Herstellung von Würstchen oder die Theorie der Quantengravitation. Ihre recht einfache mathematische Struktur ist Konsequenz dieser beschränkten Ausdrucksfähigkeit.

Defizite der Aussagenlogik

- Die Aussagenlogik ist universell anwendbar, wo potentiell wahre oder falsche Aussagen formuliert und miteinander kombiniert werden können, sei es die Herstellung von Würstchen oder die Theorie der Quantengravitation. Ihre recht einfache mathematische Struktur ist Konsequenz dieser beschränkten Ausdrucksfähigkeit.
- So ist die AL nicht in der Lage, Aussagen über die Elemente einer spezifischen (nichtleeren) Datenbereiches zu formulieren, z.B. die natürlichen Zahlen, gerichtete Graphen oder Datenbanken.

Defizite der Aussagenlogik

- Die Aussagenlogik ist universell anwendbar, wo potentiell wahre oder falsche Aussagen formuliert und miteinander kombiniert werden können, sei es die Herstellung von Würstchen oder die Theorie der Quantengravitation. Ihre recht einfache mathematische Struktur ist Konsequenz dieser beschränkten Ausdrucksfähigkeit.
- So ist die AL nicht in der Lage, Aussagen über die Elemente einer spezifischen (nichtleeren) Datenbereiches zu formulieren, z.B. die natürlichen Zahlen, gerichtete Graphen oder Datenbanken.
- Dazu bedarf es der Prädikatenlogik (der ersten Stufe), die sich an die Gegebenheiten der Datenbereiche von Interesse anpassen läßt und dann viel ausdrucksstärker ist als die Aussagenlogik.

Semantisches Ziel

Datenbereiche in Anwendungen sind üblicherweise Mengen D mit einer „inneren Struktur“, die sich in gewissen Funktionen $D^n \xrightarrow{f} D$ und gewissen Prädikaten $D^n \xrightarrow{R} \mathbb{B}$, oder äquivalent, Teilmengen $R \subseteq D^n$ manifestiert.

Semantisches Ziel

Datenbereiche in Anwendungen sind üblicherweise Mengen D mit einer „inneren Struktur“, die sich in gewissen Funktionen $D^n \xrightarrow{f} D$ und gewissen Prädikaten $D^n \xrightarrow{R} \mathbb{B}$, oder äquivalent, Teilmengen $R \subseteq D^n$ manifestiert.

Die Anwendungen bedienen sich dieser Struktur, z.B. bei

Semantisches Ziel

Datenbereiche in Anwendungen sind üblicherweise Mengen D mit einer „inneren Struktur“, die sich in gewissen Funktionen $D^n \xrightarrow{f} D$ und gewissen Prädikaten $D^n \xrightarrow{R} \mathbb{B}$, oder äquivalent, Teilmengen $R \subseteq D^n$ manifestiert.

Die Anwendungen bedienen sich dieser Struktur, z.B. bei

- Lösung von Anfragen auf Datenmengen in der KI oder in Informationssystemen;

Semantisches Ziel

Datenbereiche in Anwendungen sind üblicherweise Mengen D mit einer „inneren Struktur“, die sich in gewissen Funktionen $D^n \xrightarrow{f} D$ und gewissen Prädikaten $D^n \xrightarrow{R} \mathbb{B}$, oder äquivalent, Teilmengen $R \subseteq D^n$ manifestiert.

Die Anwendungen bedienen sich dieser Struktur, z.B. bei

- Lösung von Anfragen auf Datenmengen in der KI oder in Informationssystemen;
- Formulierung von Integritätsbedingungen auf Daten:
Schleifeninvarianten eines Programms, Constraints auf XML-Dateien oder Datenbankeinträgen;

Semantisches Ziel

Datenbereiche in Anwendungen sind üblicherweise Mengen D mit einer „inneren Struktur“, die sich in gewissen Funktionen $D^n \xrightarrow{f} D$ und gewissen Prädikaten $D^n \xrightarrow{R} \mathbb{B}$, oder äquivalent, Teilmengen $R \subseteq D^n$ manifestiert.

Die Anwendungen bedienen sich dieser Struktur, z.B. bei

- Lösung von Anfragen auf Datenmengen in der KI oder in Informationssystemen;
- Formulierung von Integritätsbedingungen auf Daten:
Schleifeninvarianten eines Programms, Constraints auf XML-Dateien oder Datenbankeinträgen;
- Lösung von Constraint-Systemen beim Testen oder Planen.

Semantisches Ziel

Datenbereiche in Anwendungen sind üblicherweise Mengen D mit einer „inneren Struktur“, die sich in gewissen Funktionen $D^n \xrightarrow{f} D$ und gewissen Prädikaten $D^n \xrightarrow{R} \mathbb{B}$, oder äquivalent, Teilmengen $R \subseteq D^n$ manifestiert.

Die Anwendungen bedienen sich dieser Struktur, z.B. bei

- Lösung von Anfragen auf Datenmengen in der KI oder in Informationssystemen;
- Formulierung von Integritätsbedingungen auf Daten:
Schleifeninvarianten eines Programms, Constraints auf XML-Dateien oder Datenbankeinträgen;
- Lösung von Constraint-Systemen beim Testen oder Planen.
- Logischem Programmieren.

Syntax, Übersicht

Frege¹² definierte 1879 die Syntax der PL in seiner „[Begriffsschrift](#)“ – Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens“.

¹²Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848–1925)

Syntax, Übersicht

Frege¹² definierte 1879 die Syntax der PL in seiner „[Begriffsschrift](#)“ – Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens“.

In moderner Terminologie:

¹²Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848–1925)

Syntax, Übersicht

Frege¹² definierte 1879 die Syntax der PL in seiner „▶ Begriffsschrift – Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens“.

In moderner Terminologie:

- ▶ Man fasst **formale** Funktions- und Relations**symbole** der gewünschten Zahl und Stelligkeit in einer **Signatur** $\mathcal{S} = \langle \mathbf{Fun}, \mathbf{Pred} \rangle$ zusammen;

¹²Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848–1925)

Syntax, Übersicht

Frege¹² definierte 1879 die Syntax der PL in seiner „▶ Begriffsschrift – Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens“.

In moderner Terminologie:

- ▶ Man fasst **formale** Funktions- und Relations**symbole** der gewünschten Zahl und Stelligkeit in einer **Signatur** $\mathcal{S} = \langle \mathbf{Fun}, \mathbf{Pred} \rangle$ zusammen;
- ▶ über einer (abzählbaren) Menge \mathcal{V} von **Variablen** baut man in einem 1. Schritt **Terme** in den Funktionssymbolen auf und erhält einen abstrakten Datenbereich **Term(Fun, \mathcal{V})** (vergl. Folie 12, **Rekursionsatz!**);

¹²Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848–1925)

Syntax, Übersicht

Frege¹² definierte 1879 die Syntax der PL in seiner „▶ Begriffsschrift – Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens“.

In moderner Terminologie:

- ▶ Man fasst **formale** Funktions- und Relations**symbole** der gewünschten Zahl und Stelligkeit in einer **Signatur** $\mathcal{S} = \langle \mathbf{Fun}, \mathbf{Pred} \rangle$ zusammen;
- ▶ über einer (abzählbaren) Menge \mathcal{V} von **Variablen** baut man in einem 1. Schritt **Terme** in den Funktionssymbolen auf und erhält einen abstrakten Datenbereich **Term**($\mathbf{Fun}, \mathcal{V}$) (vergl. Folie 12, **Rekursionsatz!**);
- ▶ 2. Schritt: Prädikate mit Termen als Eingaben sowie formale Gleichungen zwischen Termen bilden nun die **atomare Formeln** $\mathcal{A}(\mathcal{S})$;

¹²Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848–1925)

Syntax, Übersicht

Frege¹² definierte 1879 die Syntax der PL in seiner „▶ Begriffsschrift – Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens“.

In moderner Terminologie:

- ▶ Man fasst **formale** Funktions- und Relations**symbole** der gewünschten Zahl und Stelligkeit in einer **Signatur** $\mathcal{S} = \langle \mathbf{Fun}, \mathbf{Pred} \rangle$ zusammen;
- ▶ über einer (abzählbaren) Menge \mathcal{V} von **Variablen** baut man in einem 1. Schritt **Terme** in den Funktionssymbolen auf und erhält einen abstrakten Datenbereich **Term**($\mathbf{Fun}, \mathcal{V}$) (vergl. Folie 12, **Rekursionsatz!**);
- ▶ 2. Schritt: Prädikate mit Termen als Eingaben sowie formale Gleichungen zwischen Termen bilden nun die **atomare Formeln** $\mathcal{A}(\mathcal{S})$;
- ▶ Die bekannten Junktoren der Aussagenlogik und zwei unäre Junktoren: $\forall x$ („für alle x “) und $\exists x$ („es gibt ein x “) für jede Variable x , liefern die Menge **FO**(\mathcal{S}) aller Formeln; \forall und \exists heißen **Quantoren**.

¹²Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848–1925)

Semantik, Übersicht

Die Semantik wurde erst 1934 von Tarski¹³ entwickelt.

¹³Alfred Tarski bzw. ursprünglich Alfred Tajtelbaum, 1901–1983)

Semantik, Übersicht

Die Semantik wurde erst 1934 von Tarski¹³ entwickelt.

In moderner Terminologie:

¹³Alfred Tarski bzw. ursprünglich Alfred Tajtelbaum, 1901–1983) 

Semantik, Übersicht

Die Semantik wurde erst 1934 von Tarski¹³ entwickelt.

In moderner Terminologie:

- Eine **\mathcal{S} -Struktur** $\mathcal{M} = \langle D, I \rangle$ interpretiert \mathcal{S} in einer **Trägermenge**;

¹³Alfred Tarski bzw. ursprünglich Alfred Tarski (1901–1983) 

Semantik, Übersicht

Die Semantik wurde erst 1934 von Tarski¹³ entwickelt.

In moderner Terminologie:

- Eine **\mathcal{S} -Struktur** $\mathcal{M} = \langle D, I \rangle$ interpretiert \mathcal{S} in einer **Trägermenge**;
- Jede **Belegung** $\mathcal{V} \xrightarrow{\sigma} D$ der Variablen liefert einen eindeutigen **Fun**-Homomorphismus $\mathbf{Term}(\mathbf{Fun}, \mathcal{V}) \xrightarrow{\hat{\sigma}} \langle D, I_{\mathbf{Fun}} \rangle$;

¹³Alfred Tarski bzw. ursprünglich Alfred Tarski, 1901–1983) 

Semantik, Übersicht

Die Semantik wurde erst 1934 von Tarski¹³ entwickelt.

In moderner Terminologie:

- Eine **\mathcal{S} -Struktur** $\mathcal{M} = \langle D, I \rangle$ interpretiert \mathcal{S} in einer **Trägermenge**;
- Jede **Belegung** $\mathcal{V} \xrightarrow{\sigma} D$ der Variablen liefert einen eindeutigen **Fun**-Homomorphismus **Term(Fun, \mathcal{V})** $\xrightarrow{\hat{\sigma}} \langle D, I_{\text{Fun}} \rangle$;
- Alle atomaren Formeln in den Symbolen von **Pred** und der formalen Gleichheit \doteq erhalten aufgrund von $\hat{\sigma}$ und I_{Pred} Wahrheitswerte zugewiesen; dies entspricht den Belegungen $\mathcal{A} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{B}$ in der AL.

¹³Alfred Tarski bzw. ursprünglich Alfred Tarski, 1901–1983) 

Semantik, Übersicht

Die Semantik wurde erst 1934 von Tarski¹³ entwickelt.

In moderner Terminologie:

- Eine **\mathcal{S} -Struktur** $\mathcal{M} = \langle D, I \rangle$ interpretiert \mathcal{S} in einer **Trägermenge**;
- Jede **Belegung** $\mathcal{V} \xrightarrow{\sigma} D$ der Variablen liefert einen eindeutigen **Fun**-Homomorphismus **Term(Fun, \mathcal{V})** $\xrightarrow{\hat{\sigma}} \langle D, I_{\text{Fun}} \rangle$;
- Alle atomaren Formeln in den Symbolen von **Pred** und der formalen Gleichheit \doteq erhalten aufgrund von $\hat{\sigma}$ und I_{Pred} Wahrheitswerte zugewiesen; dies entspricht den Belegungen $\mathcal{A} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{B}$ in der AL.

¹³Alfred Tarski bzw. ursprünglich Alfred Tarski, 1901–1983) 

Semantik, Übersicht

Die Semantik wurde erst 1934 von Tarski¹³ entwickelt.

In moderner Terminologie:

- Eine **\mathcal{S} -Struktur** $\mathcal{M} = \langle D, I \rangle$ interpretiert \mathcal{S} in einer **Trägermenge**;
- Jede **Belegung** $\mathcal{V} \xrightarrow{\sigma} D$ der Variablen liefert einen eindeutigen **Fun**-Homomorphismus $\mathbf{Term}(\mathbf{Fun}, \mathcal{V}) \xrightarrow{\hat{\sigma}} \langle D, I_{\mathbf{Fun}} \rangle$;
- Alle atomaren Formeln in den Symbolen von **Pred** und der formalen Gleichheit \doteq erhalten aufgrund von $\hat{\sigma}$ und $I_{\mathbf{Pred}}$ Wahrheitswerte zugewiesen; dies entspricht den Belegungen $\mathcal{A} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{B}$ in der AL.
- Diese Belegung der atomaren Formeln läßt sich wieder eindeutig zu einer Bewertung aller Formeln $F \in \mathbf{FO}(\mathcal{S})$ fortsetzen, in Analogie zu $\mathcal{F}[\mathcal{A}] \xrightarrow{\hat{\varphi}} \mathbb{B}$.

¹³Alfred Tarski bzw. ursprünglich Alfred Tarski, 1901–1983) 

Semantik, Übersicht

Die Semantik wurde erst 1934 von Tarski¹³ entwickelt.

In moderner Terminologie:

- Eine **\mathcal{S} -Struktur** $\mathcal{M} = \langle D, I \rangle$ interpretiert \mathcal{S} in einer **Trägermenge**;
- Jede **Belegung** $\mathcal{V} \xrightarrow{\sigma} D$ der Variablen liefert einen eindeutigen **Fun**-Homomorphismus $\mathbf{Term}(\mathbf{Fun}, \mathcal{V}) \xrightarrow{\hat{\sigma}} \langle D, I_{\mathbf{Fun}} \rangle$;
- Alle atomaren Formeln in den Symbolen von **Pred** und der formalen Gleichheit \doteq erhalten aufgrund von $\hat{\sigma}$ und $I_{\mathbf{Pred}}$ Wahrheitswerte zugewiesen; dies entspricht den Belegungen $\mathcal{A} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{B}$ in der AL.
- Diese Belegung der atomaren Formeln läßt sich wieder eindeutig zu einer Bewertung aller Formeln $F \in \mathbf{FO}(\mathcal{S})$ fortsetzen, in Analogie zu $\mathcal{F}[\mathcal{A}] \xrightarrow{\hat{\varphi}} \mathbb{B}$.
- Mit einem Trick lassen sich die Semantiken für Terme und Formeln in eine ähnliche Form bringen.

¹³Alfred Tarski bzw. ursprünglich Alfred Tarski, 1901–1983) 

Beschreibung mathematischer Beziehungen

Beispiel

Syntax: Konstanten $1, 2, 3$; 2-stellige Funktionssymbole $+, /$;
2-stelliges Prädikat $<$:

Beschreibung mathematischer Beziehungen

Beispiel

Syntax: Konstanten 1, 2, 3; 2-stellige Funktionssymbole +, /;
2-stelliges Prädikat < :

$$\text{Signatur } \mathcal{S} = \langle \{1_{/0}, 2_{/0}, 3_{/0}, +_{/2}, /_{/2}\}, \{<_{/2}\} \rangle$$

Beschreibung mathematischer Beziehungen

Beispiel

Syntax: Konstanten 1, 2, 3; 2-stellige Funktionssymbole +, /;
2-stelliges Prädikat < :

Signatur $\mathcal{S} = \langle \{1_{/0}, 2_{/0}, 3_{/0}, +_{/2}, /_{/2}\}, \{<_{/2}\} \rangle$

Terme 1, $1 + 2/3$, $x + 3/2$

Beschreibung mathematischer Beziehungen

Beispiel

Syntax: Konstanten $1, 2, 3$; 2-stellige Funktionssymbole $+, /$;
2-stelliges Prädikat $<$:

$$\text{Signatur } \mathcal{S} = \langle \{1_{/0}, 2_{/0}, 3_{/0}, +_{/2}, /_{/2}\}, \{<_{/2}\} \rangle$$

$$\text{Terme } 1, 1 + 2/3, x + 3/2$$

Logik: Junktoren \rightarrow, \wedge , Quantoren \forall, \exists ;

Beschreibung mathematischer Beziehungen

Beispiel

Syntax: Konstanten $1, 2, 3$; 2-stellige Funktionssymbole $+, /$;
2-stelliges Prädikat $<$:

Signatur $\mathcal{S} = \langle \{1_{/0}, 2_{/0}, 3_{/0}, +_{/2}, /_{/2}\}, \{<_{/2}\} \rangle$

Terme $1, 1 + 2/3, x + 3/2$

Logik: Junktoren \rightarrow, \wedge , Quantoren \forall, \exists ;

Formeln $x < 3, \forall x \forall y (x < y \rightarrow \exists z (x < z \wedge z < y))$

Beschreibung mathematischer Beziehungen

Beispiel

Syntax: Konstanten $1, 2, 3$; 2-stellige Funktionssymbole $+, /$;
2-stelliges Prädikat $<$:

$$\text{Signatur } \mathcal{S} = \langle \{1_{/0}, 2_{/0}, 3_{/0}, +_{/2}, /_{/2}\}, \{<_{/2}\} \rangle$$

$$\text{Terme } 1, 1 + 2/3, x + 3/2$$

Logik: Junktoren \rightarrow, \wedge , Quantoren \forall, \exists ;

$$\text{Formeln } x < 3, \forall x \forall y (x < y \rightarrow \exists z (x < z \wedge z < y))$$

Semantik: Datenbereich $D = \mathbb{Q}$, Konstante 1 bis Prädikat $<$ mit der üblichen Bedeutung.

Beschreibung mathematischer Beziehungen

Beispiel

Syntax: Konstanten $1, 2, 3$; 2-stellige Funktionssymbole $+, /$;
2-stelliges Prädikat $<$:

$$\text{Signatur } \mathcal{S} = \langle \{1/_0, 2/_0, 3/_0, +/_2, /_2\}, \{</_2\} \rangle$$

$$\text{Terme } 1, 1 + 2/3, x + 3/2$$

Logik: Junktoren \rightarrow, \wedge , Quantoren \forall, \exists ;

$$\text{Formeln } x < 3, \forall x \forall y (x < y \rightarrow \exists z (x < z \wedge z < y))$$

Semantik: Datenbereich $D = \mathbb{Q}$, Konstante 1 bis Prädikat $<$ mit der üblichen Bedeutung.

Achtung: Andere Interpretationen der formalen Symbole in \mathcal{S} sind möglich und dürfen nicht ignoriert werden!

Beschreibung von Beziehungen zwischen Daten

Beispiel

Syntax: Funktion *WeiteDerReise(-)*, Prädikate *istHund(-)*, *istFisch(-)*, $</2$

Beschreibung von Beziehungen zwischen Daten

Beispiel

Syntax: Funktion $WeiteDerReise(-)$, Prädikate $istHund(-)$, $istFisch(-)$, $</2$

Logik: Junktoren \rightarrow , \wedge , Quantoren \forall ;

Beschreibung von Beziehungen zwischen Daten

Beispiel

Syntax: Funktion $WeiteDerReise(-)$, Prädikate $istHund(-)$, $istFisch(-)$, $</2$

Logik: Junktoren \rightarrow , \wedge , Quantoren \forall ;

typische Formel:

$$\forall x \forall y (istHund(x) \wedge istFisch(y) \rightarrow WeiteDerReise(x) < WeiteDerReise(y))$$

Beschreibung von Beziehungen zwischen Daten

Beispiel

Syntax: Funktion $WeiteDerReise(-)$, Prädikate $istHund(-)$, $istFisch(-)$, $<_{/2}$

Logik: Junktoren \rightarrow , \wedge , Quantoren \forall ;

typische Formel:

$$\forall x \forall y (istHund(x) \wedge istFisch(y) \rightarrow WeiteDerReise(x) < WeiteDerReise(y))$$

Semantik: Datenbereich $D = \{Lassie, Nemo\} \cup \mathbb{N} \cup \{\perp\}$

Beschreibung von Beziehungen zwischen Daten

Beispiel

Syntax: Funktion $WeiteDerReise(-)$, Prädikate $istHund(-)$, $istFisch(-)$, $</2$

Logik: Junktoren \rightarrow , \wedge , Quantoren \forall ;

typische Formel:

$$\forall x \forall y (istHund(x) \wedge istFisch(y) \rightarrow WeiteDerReise(x) < WeiteDerReise(y))$$

Semantik: Datenbereich $D = \{Lassie, Nemo\} \cup \mathbb{N} \cup \{\perp\}$

Die Standard-Interpretation der Funktion $WeiteDerReise(-)$ liefert die Weite der Reise, die das Tier im Argument zurückgelegt hat. oder \perp sonst.

Beschreibung von Beziehungen zwischen Daten

Beispiel

Syntax: Funktion $WeiteDerReise(-)$, Prädikate $istHund(-)$, $istFisch(-)$, $</2$

Logik: Junktoren \rightarrow , \wedge , Quantoren \forall ;

typische Formel:

$$\forall x \forall y (istHund(x) \wedge istFisch(y) \rightarrow WeiteDerReise(x) < WeiteDerReise(y))$$

Semantik: Datenbereich $D = \{Lassie, Nemo\} \cup \mathbb{N} \cup \{\perp\}$

Die Standard-Interpretation der Funktion $WeiteDerReise(-)$ liefert die Weite der Reise, die das Tier im Argument zurückgelegt hat. oder \perp sonst.

$istHund$ und $istFisch$ möge die charakteristische Funktion von $\{Lassie\}$ bzw. $\{Nemo\}$ sein.

Kapitel 7

Syntax der Prädikatenlogik

Syntax der Prädikatenlogik

Gegeben seien zwei **entscheidbare** aber nicht notwendig endliche Mengen **Fun** und **Pred**, die zum Alphabet der Aussagenlogik disjunkt sind, und eine **Signatur**

$$\mathcal{S} := \mathbf{Fun} + \mathbf{Pred} \xrightarrow{\text{ar}} \mathbb{N}$$

Syntax der Prädikatenlogik

Gegeben seien zwei **entscheidbare** aber nicht notwendig endliche Mengen **Fun** und **Pred**, die zum Alphabet der Aussagenlogik disjunkt sind, und eine **Signatur**

$$\mathcal{S} := \mathbf{Fun} + \mathbf{Pred} \xrightarrow{\text{ar}} \mathbb{N}$$

Wir wollen die Elemente aus **Fun** als Funktionensymbole interpretieren, und die Elemente aus **Pred** als Prädikatssymbole.

Syntax der Prädikatenlogik

Gegeben seien zwei **entscheidbare** aber nicht notwendig endliche Mengen **Fun** und **Pred**, die zum Alphabet der Aussagenlogik disjunkt sind, und eine **Signatur**

$$\mathcal{S} := \mathbf{Fun} + \mathbf{Pred} \xrightarrow{\text{ar}} \mathbb{N}$$

Wir wollen die Elemente aus **Fun** als Funktionensymbole interpretieren, und die Elemente aus **Pred** as Prädikatssymbole.

Üblicherweise verwenden wir Kleinbuchstaben $f, g, h \dots$ für erstere, und Großbuchstaben $R, S, T \dots$ für letztere.

Syntax der Prädikatenlogik

Gegeben seien zwei **entscheidbare** aber nicht notwendig endliche Mengen **Fun** und **Pred**, die zum Alphabet der Aussagenlogik disjunkt sind, und eine **Signatur**

$$\mathcal{S} := \mathbf{Fun} + \mathbf{Pred} \xrightarrow{\mathbf{ar}} \mathbb{N}$$

Wir wollen die Elemente aus **Fun** als Funktionensymbole interpretieren, und die Elemente aus **Pred** as Prädikatssymbole.

Üblicherweise verwenden wir Kleinbuchstaben $f, g, h \dots$ für erstere, und Großbuchstaben $R, S, T \dots$ für letztere.

$f_{/k}$ und $R_{/k}$ ist Kurzschreibweise für $\mathbf{ar}(f) = k$ bzw. $\mathbf{ar}(R) = k$.

Syntax der Prädikatenlogik

Gegeben seien zwei **entscheidbare** aber nicht notwendig endliche Mengen **Fun** und **Pred**, die zum Alphabet der Aussagenlogik disjunkt sind, und eine **Signatur**

$$\mathcal{S} := \mathbf{Fun} + \mathbf{Pred} \xrightarrow{\mathbf{ar}} \mathbb{N}$$

Wir wollen die Elemente aus **Fun** als Funktionensymbole interpretieren, und die Elemente aus **Pred** as Prädikatssymbole.

Üblicherweise verwenden wir Kleinbuchstaben $f, g, h \dots$ für erstere, und Großbuchstaben $R, S, T \dots$ für letztere.

$f_{/k}$ und $R_{/k}$ ist Kurzschreibweise für $\mathbf{ar}(f) = k$ bzw. $\mathbf{ar}(R) = k$.

0-stellige Funktionssymbole heißen auch **Konstanten**, und 0-stellige Prädikatssymbole **Propositionen**.

Syntax der Prädikatenlogik

Gegeben seien zwei **entscheidbare** aber nicht notwendig endliche Mengen **Fun** und **Pred**, die zum Alphabet der Aussagenlogik disjunkt sind, und eine **Signatur**

$$S := \mathbf{Fun} + \mathbf{Pred} \xrightarrow{\mathbf{ar}} \mathbb{N}$$

Wir wollen die Elemente aus **Fun** als Funktionensymbole interpretieren, und die Elemente aus **Pred** as Prädikatssymbole.

Üblicherweise verwenden wir Kleinbuchstaben $f, g, h \dots$ für erstere, und Großbuchstaben $R, S, T \dots$ für letztere.

$f_{/k}$ und $R_{/k}$ ist Kurzschreibweise für $\mathbf{ar}(f) = k$ bzw. $\mathbf{ar}(R) = k$.

0-stellige Funktionssymbole heißen auch **Konstanten**, und 0-stellige Prädikatssymbole **Propositionen**.

Weiter sei \mathcal{V} eine (abzählbare entscheidbare) Menge von **Variablen**.

Aufbau der Formeln in drei Schritten

- ▷ Zuerst bilden wir, wie auf Folie 12, die Termalgebra $\mathbf{Term}(\mathbf{Fun}, \mathcal{V})$, allerdings nur bzgl. der Funktionssymbole:

$$t ::= v \mid f(t_0, \dots, t_{\mathbf{ar}(f)-1}) \quad \text{mit } v \in \mathcal{V} \quad \text{und } f \in \mathbf{Fun}$$

Aufbau der Formeln in drei Schritten

- ▷ Zuerst bilden wir, wie auf Folie 12, die Termalgebra $\mathbf{Term}(\mathbf{Fun}, \mathcal{V})$, allerdings nur bzgl. der Funktionssymbole:

$$t ::= v \mid f(t_0, \dots, t_{\mathbf{ar}(f)-1}) \quad \text{mit } v \in \mathcal{V} \quad \text{und } f \in \mathbf{Fun}$$

- ▷ Danach bilden wir die Menge $\mathbf{Atm} = \mathbf{Atm}(\mathbf{Pred}, \mathbf{Term}(\mathbf{Fun}, \mathcal{V}))$ der **atomaren Formeln** (mit Gleichheit):

$$A ::= t_0 \doteq t_1 \mid R(t_0, \dots, t_{\mathbf{ar}(f)-1}) \quad \text{mit } R \in \mathbf{Pred}$$

Aufbau der Formeln in drei Schritten

- ▷ Zuerst bilden wir, wie auf Folie 12, die Termalgebra $\mathbf{Term}(\mathbf{Fun}, \mathcal{V})$, allerdings nur bzgl. der Funktionssymbole:

$$t ::= v \mid f(t_0, \dots, t_{\mathbf{ar}(f)-1}) \quad \text{mit } v \in \mathcal{V} \quad \text{und } f \in \mathbf{Fun}$$

- ▷ Danach bilden wir die Menge $\mathbf{Atm} = \mathbf{Atm}(\mathbf{Pred}, \mathbf{Term}(\mathbf{Fun}, \mathcal{V}))$ der **atomaren Formeln** (mit Gleichheit):

$$A ::= t_0 \doteq t_1 \mid R(t_0, \dots, t_{\mathbf{ar}(R)-1}) \quad \text{mit } R \in \mathbf{Pred}$$

- ▷ Und schließlich bilden wir mit Hilfe der um $\forall x_{/1}$ und $\exists x_{/1}$, $x \in \mathcal{V}$, erweiterten Junktormenge \mathcal{J} die Termalgebra $\mathbf{FO}(\mathcal{S})$ der **prädikatenlogischen Formeln erster Stufe** (**first order formulae**):

$$F ::= A \mid \top \mid \perp \mid \neg F \mid (F_0 \star F_1) \mid (\forall x F) \mid (\exists x F)$$

mit $A \in \mathbf{Atm}$, $\star \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ und $x \in \mathcal{V}$.

Gebundene und freie Variablen

Als einstellige Junktoren binden $\forall x$ und $\exists x$ stärker als alle 2-stelligen.

Gebundene und freie Variablen

Als einstellige Junktoren binden $\forall x$ und $\exists x$ stärker als alle 2-stelligen.

Definition

Die Menge $\mathbf{V}(t)$ der in einem Term t **auf tretenden** Variablen ist

$$\mathbf{V}(x) = \{x\} \quad \text{und} \quad \mathbf{V}(f(t_0, \dots, t_{\text{ar}(f)-1})) = \bigcup \{V(t_i) : i < \text{ar}(f)\}$$

Gebundene und freie Variablen

Als einstellige Junktoren binden $\forall x$ und $\exists x$ stärker als alle 2-stelligen.

Definition

Die Menge $\mathbf{V}(t)$ der in einem Term t **auf tretenden** Variablen ist

$$\mathbf{V}(x) = \{x\} \quad \text{und} \quad \mathbf{V}(f(t_0, \dots, t_{\mathbf{ar}(f)-1})) = \bigcup \{ \mathbf{V}(t_i) : i < \mathbf{ar}(f) \}$$

Analog sind die in einer (atomaren) Formel auftretenden Variablen definiert.

Gebundene und freie Variablen

Als einstellige Junktoren binden $\forall x$ und $\exists x$ stärker als alle 2-stelligen.

Definition

Die Menge $\mathbf{V}(t)$ der in einem Term t **auf tretenden** Variablen ist

$$\mathbf{V}(x) = \{x\} \quad \text{und} \quad \mathbf{V}(f(t_0, \dots, t_{\text{ar}(f)-1})) = \bigcup \{ \mathbf{V}(t_i) : i < \text{ar}(f) \}$$

Analog sind die in einer (atomaren) Formel auftretenden Variablen definiert.

In $(Qx F)$ ist F der **Geltungsbereich** für Qx ; jedes Auftreten von x in einem solchen Geltungsbereich heißt **gebunden**, außerhalb jedes solchen Geltungsbereichs **frei**.

Gebundene und freie Variablen

Als einstellige Junktoren binden $\forall x$ und $\exists x$ stärker als alle 2-stelligen.

Definition

Die Menge $\mathbf{V}(t)$ der in einem Term t **auf tretenden** Variablen ist

$$\mathbf{V}(x) = \{x\} \quad \text{und} \quad \mathbf{V}(f(t_0, \dots, t_{\text{ar}(f)-1})) = \bigcup \{ \mathbf{V}(t_i) : i < \text{ar}(f) \}$$

Analog sind die in einer (atomaren) Formel auftretenden Variablen definiert.

In $(Qx F)$ ist F der **Geltungsbereich** für Qx ; jedes Auftreten von x in einem solchen Geltungsbereich heißt **gebunden**, außerhalb jedes solchen Geltungsbereichs **frei**. Die Menge der **gebunden/frei auftretenden Variablen** in $H \in \mathbf{FO}(\mathcal{S})$ wird mit **$\mathbf{GV}(H)$** bzw. **$\mathbf{GV}(H)$** bezeichnet;

Gebundene und freie Variablen

Als einstellige Junktoren binden $\forall x$ und $\exists x$ stärker als alle 2-stelligen.

Definition

Die Menge $\mathbf{V}(t)$ der in einem Term t **auf tretenden** Variablen ist

$$\mathbf{V}(x) = \{x\} \quad \text{und} \quad \mathbf{V}(f(t_0, \dots, t_{\text{ar}(f)-1})) = \bigcup \{ \mathbf{V}(t_i) : i < \text{ar}(f) \}$$

Analog sind die in einer (atomaren) Formel auftretenden Variablen definiert.

In $(Qx F)$ ist F der **Geltungsbereich** für Qx ; jedes Auftreten von x in einem solchen Geltungsbereich heißt **gebunden**, außerhalb jedes solchen Geltungsbereichs **frei**. Die Menge der **gebunden/frei auftretenden Variablen** in $H \in \mathbf{FO}(\mathcal{S})$ wird mit **$\mathbf{GV}(H)$** bzw. **$\mathbf{GV}(H)$** bezeichnet; sie brauchen nicht disjunkt zu sein!

Gebundene und freie Variablen

Als einstellige Junktoren binden $\forall x$ und $\exists x$ stärker als alle 2-stelligen.

Definition

Die Menge $\mathbf{V}(t)$ der in einem Term t **auf tretenden** Variablen ist

$$\mathbf{V}(x) = \{x\} \quad \text{und} \quad \mathbf{V}(f(t_0, \dots, t_{\mathbf{ar}(f)-1})) = \bigcup \{ \mathbf{V}(t_i) : i < \mathbf{ar}(f) \}$$

Analog sind die in einer (atomaren) Formel auftretenden Variablen definiert.

In $(Qx F)$ ist F der **Geltungsbereich** für Qx ; jedes Auftreten von x in einem solchen Geltungsbereich heißt **gebunden**, außerhalb jedes solchen Geltungsbereichs **frei**. Die Menge der **gebunden/frei auftretenden Variablen** in $H \in \mathbf{FO}(\mathcal{S})$ wird mit **$\mathbf{GV}(H)$** bzw. **$\mathbf{GV}(H)$** bezeichnet; sie brauchen nicht disjunkt zu sein!

Formeln ohne frei vorkommende Variablen heißen **abgeschlossen**.

Anmerkungen

Der Begriff der **Entscheidbarkeit** einer Menge wird erst in TheoInf2 offiziell eingeführt.

Anmerkungen

Der Begriff der **Entscheidbarkeit** einer Menge wird erst in TheoInf2 offiziell eingeführt. Informell soll er hier bedeuten, dass wir ihre Elemente effizient, d.h., mit geringem Rechenaufwand oder sogar unmittelbar erkennen können.

Anmerkungen

Der Begriff der **Entscheidbarkeit** einer Menge wird erst in TheoInf2 offiziell eingeführt. Informell soll er hier bedeuten, dass wir ihre Elemente effizient, d.h., mit geringem Rechenaufwand oder sogar unmittelbar erkennen können.

Lemma

- *Die Entscheidbarkeit der Signatur \mathcal{S} und der Variablenmenge \mathcal{V} vererbt sich auf die Mengen der Terme und der (atomaren) Formeln.*

Anmerkungen

Der Begriff der **Entscheidbarkeit** einer Menge wird erst in Theolnf2 offiziell eingeführt. Informell soll er hier bedeuten, dass wir ihre Elemente effizient, d.h., mit geringem Rechenaufwand oder sogar unmittelbar erkennen können.

Lemma

- *Die Entscheidbarkeit der Signatur \mathcal{S} und der Variablenmenge \mathcal{V} vererbt sich auf die Mengen der Terme und der (atomaren) Formeln.*
- *Zusammengesetzte Terme und Formeln lassen sich eindeutig zerlegen.*

Anmerkungen

Der Begriff der **Entscheidbarkeit** einer Menge wird erst in TheoInf2 offiziell eingeführt. Informell soll er hier bedeuten, dass wir ihre Elemente effizient, d.h., mit geringem Rechenaufwand oder sogar unmittelbar erkennen können.

Lemma

- *Die Entscheidbarkeit der Signatur S und der Variablenmenge \mathcal{V} vererbt sich auf die Mengen der Terme und der (atomaren) Formeln.*
- *Zusammengesetzte Terme und Formeln lassen sich eindeutig zerlegen.*
- *Gebundene und freie Vorkommen von Variablen lassen sich effizient bestimmen.*

Kapitel 8

Semantik der Prädikatenlogik

\mathcal{S} -Strukturen

Das Ziel ist die Beschreibung von Beziehungen zwischen Elementen eines konkreten strukturierten Datenbereichs D .

\mathcal{S} -Strukturen

Das Ziel ist die Beschreibung von Beziehungen zwischen Elementen eines konkreten strukturierten Datenbereichs D .

Dafür war eine passende Signatur $\mathcal{S} = \mathbf{Fun} + \mathbf{Pred}$ gewählt worden, evtl. mit suggestiven Namen für die Funktionen- bzw. Prädikatensymbole.

\mathcal{S} -Strukturen

Das Ziel ist die Beschreibung von Beziehungen zwischen Elementen eines konkreten strukturierten Datenbereichs D .

Dafür war eine passende Signatur $\mathcal{S} = \mathbf{Fun} + \mathbf{Pred}$ gewählt worden, evtl. mit suggestiven Namen für die Funktionen- bzw. Prädikatensymbole.

Bei der Definition einer Semantik für die Formeln in $\mathbf{FO}(\mathcal{S})$ ist aber darauf zu achten, dass D evtl. nur einer von vielen möglichen Datenbereichen ist, der zur gewählten Signatur passt.

\mathcal{S} -Strukturen

Das Ziel ist die Beschreibung von Beziehungen zwischen Elementen eines konkreten strukturierten Datenbereichs D .

Dafür war eine passende Signatur $\mathcal{S} = \mathbf{Fun} + \mathbf{Pred}$ gewählt worden, evtl. mit suggestiven Namen für die Funktionen- bzw. Prädikatensymbole.

Bei der Definition einer Semantik für die Formeln in $\mathbf{FO}(\mathcal{S})$ ist aber darauf zu achten, dass D evtl. nur einer von vielen möglichen Datenbereichen ist, der zur gewählten Signatur passt.

Definition

Unter einer \mathcal{S} -Struktur $\mathcal{M} = \langle D, I \rangle$ versteht man eine Menge D , den Datenbereich zusammen mit einer Interpretation der Symbole in \mathcal{S}

$$D^{\text{ar}(f)} \xrightarrow{I(f)} D \text{ für } f \in \mathbf{Fun} \quad \text{und} \quad D^{\text{ar}(R)} \xrightarrow{I(R)} \mathbb{B} \text{ für } R \in \mathbf{Pred}$$

\mathcal{S} -Strukturen

Das Ziel ist die Beschreibung von Beziehungen zwischen Elementen eines konkreten strukturierten Datenbereichs D .

Dafür war eine passende Signatur $\mathcal{S} = \mathbf{Fun} + \mathbf{Pred}$ gewählt worden, evtl. mit suggestiven Namen für die Funktionen- bzw. Prädikatensymbole.

Bei der Definition einer Semantik für die Formeln in $\mathbf{FO}(\mathcal{S})$ ist aber darauf zu achten, dass D evtl. nur einer von vielen möglichen Datenbereichen ist, der zur gewählten Signatur passt.

Definition

Unter einer \mathcal{S} -Struktur $\mathcal{M} = \langle D, I \rangle$ versteht man eine Menge D , den Datenbereich zusammen mit einer Interpretation der Symbole in \mathcal{S}

$$D^{\text{ar}(f)} \xrightarrow{I(f)} D \text{ für } f \in \mathbf{Fun} \quad \text{und} \quad D^{\text{ar}(R)} \xrightarrow{I(R)} \mathbb{B} \text{ für } R \in \mathbf{Pred}$$

Oft schreibt man $f^{\mathcal{M}}$ und $R^{\mathcal{M}}$ statt $I(f)$ bzw. $I(R)$.

Belegungen, Semantik der Terme

In der AL konnte die Menge \mathcal{A} der atomaren Formeln direkt mit Wahrheitswerten belegt werden. In der PL gelingt das nur indirekt.

Belegungen, Semantik der Terme

In der AL konnte die Menge \mathcal{A} der atomaren Formeln direkt mit Wahrheitswerten belegt werden. In der PL gelingt das nur indirekt. Dennoch wollen wir versuchen möglichst viel von der AL zu übernehmen.

Belegungen, Semantik der Terme

In der AL konnte die Menge \mathcal{A} der atomaren Formeln direkt mit Wahrheitswerten belegt werden. In der PL gelingt das nur indirekt. Dennoch wollen wir versuchen möglichst viel von der AL zu übernehmen.

Definition

Eine **Belegung der Variablen** in einer \mathcal{S} -Struktur $\mathcal{M}\langle D, I \rangle$ ist eine Abbildung $\mathcal{V} \xrightarrow{\sigma} D$.

Belegungen, Semantik der Terme

In der AL konnte die Menge \mathcal{A} der atomaren Formeln direkt mit Wahrheitswerten belegt werden. In der PL gelingt das nur indirekt. Dennoch wollen wir versuchen möglichst viel von der AL zu übernehmen.

Definition

Eine **Belegung der Variablen** in einer \mathcal{S} -Struktur $\mathcal{M}\langle D, I \rangle$ ist eine Abbildung $\mathcal{V} \xrightarrow{\sigma} D$.

Aufgrund des Rekursionssatzes (Folie 12) lässt sich solch eine Belegung σ eindeutig zu einem **Fun**-Homomorphismus $\mathbf{Term}(\mathbf{Fun}, \mathcal{V}) \xrightarrow{\tilde{\sigma}} \langle D, I_{\mathbf{Fun}} \rangle$ fortsetzen, der **Semantik der Terme bzgl. $\sigma \in D^{\mathcal{V}}$** .

Belegungen, Semantik der Terme

In der AL konnte die Menge \mathcal{A} der atomaren Formeln direkt mit Wahrheitswerten belegt werden. In der PL gelingt das nur indirekt. Dennoch wollen wir versuchen möglichst viel von der AL zu übernehmen.

Definition

Eine **Belegung der Variablen** in einer \mathcal{S} -Struktur $\mathcal{M}\langle D, I \rangle$ ist eine Abbildung $\mathcal{V} \xrightarrow{\sigma} D$.

Aufgrund des Rekursionssatzes (Folie 12) lässt sich solch eine Belegung σ eindeutig zu einem **Fun**-Homomorphismus $\mathbf{Term}(\mathbf{Fun}, \mathcal{V}) \xrightarrow{\bar{\sigma}} \langle D, I_{\mathbf{Fun}} \rangle$ fortsetzen, der **Semantik der Terme bzgl. $\sigma \in D^{\mathcal{V}}$** .

Daraus gewinnen wir auf kanonische Weise die **Semantik der atomaren Formeln bzgl. σ** als Abbildung $\mathbf{Atm}(\mathbf{Pred}, \mathbf{Term}(\mathbf{Fun}, \mathcal{V})) \xrightarrow{\bar{\sigma}} \mathbb{B}$, die auf verschiedene Weise beschrieben werden kann:

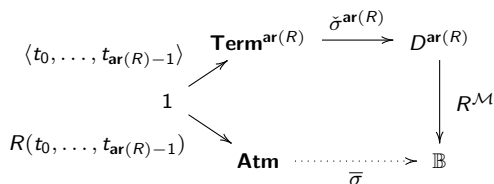
Semantik atomarer Formeln

Achtung: die formale Gleichheit $\doteq/2$ gehört hier nicht zu **Pred**, sondern gilt als logisches Symbol, das immer als tatsächliche Gleichheit bzw. als deren charakteristische Funktion zu interpretieren ist.

Semantik atomarer Formeln

Achtung: die formale Gleichheit $\doteq_{/2}$ gehört hier nicht zu **Pred**, sondern gilt als logisches Symbol, das immer als tatsächliche Gleichheit bzw. als deren charakteristische Funktion zu interpretieren ist.

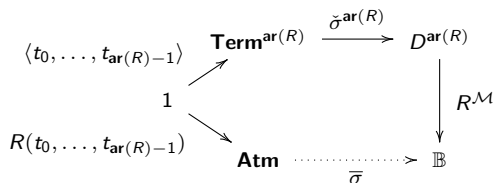
$R \in \mathbf{Pred} + \{\doteq\}$ und $t_i \in \mathbf{Term}(\mathbf{Fun}, \mathcal{V})$, $i < \mathbf{ar}(R)$ ergibt in Diagramm-Form



Semantik atomarer Formeln

Achtung: die formale Gleichheit $\doteq_{/2}$ gehört hier nicht zu **Pred**, sondern gilt als logisches Symbol, das immer als tatsächliche Gleichheit bzw. als deren charakteristische Funktion zu interpretieren ist.

$R \in \mathbf{Pred} + \{\doteq\}$ und $t_i \in \mathbf{Term}(\mathbf{Fun}, \mathcal{V})$, $i < \mathbf{ar}(R)$ ergibt in Diagramm-Form



oder mit Teilmengen $R^{\mathcal{M}}$ anstelle von charakteristischen Funktionen:

$$\bar{\sigma}(t_0 \doteq t_1) = 1 \text{ gdw } \check{\sigma}(t_0) = \check{\sigma}(t_1)$$

$$\bar{\sigma}(R(t_0, \dots, t_{\mathbf{ar}(R)-1})) = 1 \text{ gdw } \langle \check{\sigma}(t_0), \dots, \check{\sigma}(t_{\mathbf{ar}(R)-1}) \rangle \in R^{\mathcal{M}} \subseteq D^{\mathbf{ar}(R)}$$

Semantik von Formeln

Schließlich können wir den Rekursionssatz ein weiteres Mal anwenden und $\mathbf{Atm}(\mathbf{Pred}, \mathbf{Term}(\mathbf{Fun}, \mathcal{V})) \xrightarrow{\bar{\sigma}} \mathbb{B}$ eindeutig zu einem Homomorphismus $\mathbf{FO}(\mathcal{S}) \xrightarrow{\hat{\sigma}} \mathbb{B}$ bzgl. der Signatur $\mathcal{J} + (\{\forall, \exists\} \times \mathcal{V})_{/1}$ fortsetzen, indem wir die Junktoren in \mathcal{J} ebenso wie auf Folie 19 behandeln.

Semantik von Formeln

Schließlich können wir den Rekursionssatz ein weiteres Mal anwenden und $\mathbf{Atm}(\mathbf{Pred}, \mathbf{Term}(\mathbf{Fun}, \mathcal{V})) \xrightarrow{\bar{\sigma}} \mathbb{B}$ eindeutig zu einem Homomorphismus $\mathbf{FO}(\mathcal{S}) \xrightarrow{\hat{\sigma}} \mathbb{B}$ bzgl. der Signatur $\mathcal{J} + (\{\forall, \exists\} \times \mathcal{V})_{/1}$ fortsetzen, indem wir die Junktoren in \mathcal{J} ebenso wie auf Folie 19 behandeln. Weiter gilt:

Definition

Jedes $\sigma \in D^{\mathcal{V}}$ hat **Modifikationen** $\sigma\{x/d\}^a$, $\langle x, d \rangle \in \mathcal{V} \times D$,

$$\sigma\{x/d\}(y) := \begin{cases} d & \text{falls } y = x \\ \sigma(y) & \text{sonst} \end{cases}$$

Semantik von Formeln

Schließlich können wir den Rekursionsatz ein weiteres Mal anwenden und $\text{Atm}(\text{Pred}, \text{Term}(\text{Fun}, \mathcal{V})) \xrightarrow{\bar{\sigma}} \mathbb{B}$ eindeutig zu einem Homomorphismus $\text{FO}(\mathcal{S}) \xrightarrow{\hat{\sigma}} \mathbb{B}$ bzgl. der Signatur $\mathcal{J} + (\{\forall, \exists\} \times \mathcal{V})_{/1}$ fortsetzen, indem wir die Junktoren in \mathcal{J} ebenso wie auf Folie 19 behandeln. Weiter gilt:

Definition

Jedes $\sigma \in D^{\mathcal{V}}$ hat **Modifikationen** $\sigma\{x/d\}$ ^a, $\langle x, d \rangle \in \mathcal{V} \times D$,

$$\sigma\{x/d\}(y) := \begin{cases} d & \text{falls } y = x \\ \sigma(y) & \text{sonst} \end{cases}$$

die es erlauben, die **Semantik quantifizierter Formeln** zu formulieren:

$$\hat{\sigma}(\forall x A) := \inf \{ \widehat{\sigma\{x/d\}}(A) : d \in D \}$$

$$\hat{\sigma}(\exists x A) := \sup \{ \widehat{\sigma\{x/d\}}(A) : d \in D \}$$

^a Beachte die Reihenfolge! Der Operator steht rechts.

Alternative Sicht auf die Semantik der Terme

Die Semantik der Terme, aufgefasst als durch σ parametrisierte Familie von Funktionen

$$D^{\mathcal{V}} \longrightarrow \mathbf{Term}(\mathbf{Fun}, \mathcal{V}) \longrightarrow D \quad , \quad \sigma \longmapsto \check{\sigma}$$

¹⁴nach Haskell Brooks Curry (1900-1982)

Alternative Sicht auf die Semantik der Terme

Die Semantik der Terme, aufgefasst als durch σ parametrisierte Familie von Funktionen

$$D^{\mathcal{V}} \longrightarrow \mathbf{Term}(\mathbf{Fun}, \mathcal{V}) \longrightarrow D \quad , \quad \sigma \longmapsto \check{\sigma}$$

lässt sich in eine (Auswertungs-)Funktion mit zwei Argumenten umwandeln

$$\mathbf{Term}(\mathbf{Fun}, \mathcal{V}) \times D^{\mathcal{V}} \xrightarrow{\mathcal{M}[\llbracket - \rrbracket(-)]} D, \quad , \quad \langle t, \sigma \rangle \longmapsto \check{\sigma}(t)$$

¹⁴nach Haskell Brooks Curry (1900-1982)

Alternative Sicht auf die Semantik der Terme

Die Semantik der Terme, aufgefasst als durch σ parametrisierte Familie von Funktionen

$$D^{\mathcal{V}} \longrightarrow \mathbf{Term}(\mathbf{Fun}, \mathcal{V}) \longrightarrow D, \quad \sigma \longmapsto \check{\sigma}$$

lässt sich in eine (Auswertungs-)Funktion mit zwei Argumenten umwandeln

$$\mathbf{Term}(\mathbf{Fun}, \mathcal{V}) \times D^{\mathcal{V}} \xrightarrow{\mathcal{M}[\llbracket - \rrbracket(-)]} D, \quad \langle t, \sigma \rangle \longmapsto \check{\sigma}(t)$$

ein Verfahren, das als **uncurrying**¹⁴ bekannt ist.

¹⁴nach Haskell Brooks Curry (1900-1982)

Alternative Sicht auf die Semantik der Terme

Die Semantik der Terme, aufgefasst als durch σ parametrisierte Familie von Funktionen

$$D^{\mathcal{V}} \longrightarrow \mathbf{Term}(\mathbf{Fun}, \mathcal{V}) \longrightarrow D \quad , \quad \sigma \longmapsto \check{\sigma}$$

lässt sich in eine (Auswertungs-)Funktion mit zwei Argumenten umwandeln

$$\mathbf{Term}(\mathbf{Fun}, \mathcal{V}) \times D^{\mathcal{V}} \xrightarrow{\mathcal{M}[\![-]\!]} D, \quad , \quad \langle t, \sigma \rangle \longmapsto \check{\sigma}(t)$$

ein Verfahren, das als **uncurrying**¹⁴ bekannt ist. Aufgrund der Symmetrie des cartesischen Produkts erhalten wir mittels **currying** eine durch Terme parametrisierte Familie

$$\mathbf{Term}(\mathbf{Fun}, \mathcal{V}) \longrightarrow D^{\mathcal{V}} \longrightarrow D \quad , \quad t \longmapsto \mathcal{M}[\![t]\!] \quad , \quad \sigma \longmapsto \mathcal{M}[\![t]\!](\sigma) := \check{\sigma}(t)$$

¹⁴nach Haskell Brooks Curry (1900-1982)

Alternative Sicht auf die Semantik der Terme

Die Semantik der Terme, aufgefasst als durch σ parametrisierte Familie von Funktionen

$$D^{\mathcal{V}} \longrightarrow \mathbf{Term}(\mathbf{Fun}, \mathcal{V}) \longrightarrow D \quad , \quad \sigma \longmapsto \check{\sigma}$$

lässt sich in eine (Auswertungs-)Funktion mit zwei Argumenten umwandeln

$$\mathbf{Term}(\mathbf{Fun}, \mathcal{V}) \times D^{\mathcal{V}} \xrightarrow{\mathcal{M}[_]_(-)} D, \quad , \quad \langle t, \sigma \rangle \longmapsto \check{\sigma}(t)$$

ein Verfahren, das als **uncurrying**¹⁴ bekannt ist. Aufgrund der Symmetrie des cartesischen Produkts erhalten wir mittels **currying** eine durch Terme parametrisierte Familie

$$\mathbf{Term}(\mathbf{Fun}, \mathcal{V}) \longrightarrow D^{\mathcal{V}} \longrightarrow D \quad , \quad t \longmapsto \mathcal{M}[\![t]\!] \quad , \quad \sigma \longmapsto \mathcal{M}[\![t]\!](\sigma) := \check{\sigma}(t)$$

die ebenfalls **Semantik der Terme** genannt wird.

¹⁴nach Haskell Brooks Curry (1900-1982)

Alternative Sicht auf die Semantik der Formeln

Die durch $\sigma \in D^\vee$ parametrisierte Familie von Abbildungen

$$D^\vee \longrightarrow \mathbf{FO}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathbb{B} \quad , \quad \sigma \longmapsto \hat{\sigma}$$

hat nach einem analogen uncurry-curry-Trick die Form

$$\mathbf{FO}(\mathcal{S}) \longrightarrow D^\vee \longrightarrow \mathbb{B} \quad , \quad A \longmapsto \mathcal{M}[A] \quad , \quad \sigma \longmapsto \mathcal{M}[A](\sigma) = \hat{\sigma}(A)$$

Alternative Sicht auf die Semantik der Formeln

Die durch $\sigma \in D^\forall$ parametrisierte Familie von Abbildungen

$$D^\forall \longrightarrow \mathbf{FO}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathbb{B} \quad , \quad \sigma \longmapsto \hat{\sigma}$$

hat nach einem analogen uncurry-curry-Trick die Form

$$\mathbf{FO}(\mathcal{S}) \longrightarrow D^\forall \longrightarrow \mathbb{B} \quad , \quad A \longmapsto \mathcal{M}[A] \quad , \quad \sigma \longmapsto \mathcal{M}[A](\sigma) = \hat{\sigma}(A)$$

Diese Variante der **Semantik der Formeln** hat eine zur obigen Semantik der Terme **ähnliche Form**. Ob diese Sichtweise der Semantik tiefere Einsichten beschert, bleibt abzuwarten. Der notationelle Aufwand erscheint zunächst disproportional hoch, aber man muß diese Notation (auch) beherrschen.

Alternative Sicht auf die Semantik der Formeln

Die durch $\sigma \in D^\vee$ parametrisierte Familie von Abbildungen

$$D^\vee \longrightarrow \mathbf{FO}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathbb{B} \quad , \quad \sigma \longmapsto \hat{\sigma}$$

hat nach einem analogen uncurry-curry-Trick die Form

$$\mathbf{FO}(\mathcal{S}) \longrightarrow D^\vee \longrightarrow \mathbb{B} \quad , \quad A \longmapsto \mathcal{M}[A] \quad , \quad \sigma \longmapsto \mathcal{M}[A](\sigma) = \hat{\sigma}(A)$$

Diese Variante der **Semantik der Formeln** hat eine zur obigen Semantik der Terme **ähnliche Form**. Ob diese Sichtweise der Semantik tiefere Einsichten beschert, bleibt abzuwarten. Der notationelle Aufwand erscheint zunächst disproportional hoch, aber man muß diese Notation (auch) beherrschen.

Vorteil: bei geschlossenen Formeln kann man das Argument σ weglassen.

Alternative Sicht auf die Semantik der Formeln

Die durch $\sigma \in D^\vee$ parametrisierte Familie von Abbildungen

$$D^\vee \longrightarrow \mathbf{FO}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathbb{B} \quad , \quad \sigma \longmapsto \hat{\sigma}$$

hat nach einem analogen uncurry-curry-Trick die Form

$$\mathbf{FO}(\mathcal{S}) \longrightarrow D^\vee \longrightarrow \mathbb{B} \quad , \quad A \longmapsto \mathcal{M}[A] \quad , \quad \sigma \longmapsto \mathcal{M}[A](\sigma) = \hat{\sigma}(A)$$

Diese Variante der **Semantik der Formeln** hat eine zur obigen Semantik der Terme **ähnliche Form**. Ob diese Sichtweise der Semantik tiefere Einsichten beschert, bleibt abzuwarten. Der notationelle Aufwand erscheint zunächst disproportional hoch, aber man muß diese Notation (auch) beherrschen.

Vorteil: bei geschlossenen Formeln kann man das Argument σ weglassen.

Die **Semantik-Klammern** $[[\cdot]]$ gehen wohl auf die **denotationellen Semantik** (Scott, Strachey 1971) zurück, und haben seither in vielen Bereichen der formalen Semantik, wie auch der formalen Linguistik Verbreitung gefunden.

Semantik und freie Variable

In der AL konnte die Bewertung $\hat{\varphi}(B)$ einer Formel B nur von den Werten $\varphi(p)$ derjenigen Atome abhängen, die in B vorkamen.

Semantik und freie Variable

In der AL konnte die Bewertung $\hat{\varphi}(B)$ einer Formel B nur von den Werten $\varphi(p)$ derjenigen Atome abhängen, die in B vorkamen.

Entsprechend kann in der PL die Semantik $\mathcal{M}\llbracket A \rrbracket(\sigma) = \hat{\sigma}(A)$ nur von den Werten der in A auftretenden atomaren Formeln abhängen, und somit nur von den σ -Werten der darin vorkommenden Variablen.

Semantik und freie Variable

In der AL konnte die Bewertung $\hat{\varphi}(B)$ einer Formel B nur von den Werten $\varphi(p)$ derjenigen Atome abhängen, die in B vorkamen.

Entsprechend kann in der PL die Semantik $\mathcal{M}\llbracket A \rrbracket(\sigma) = \hat{\sigma}(A)$ nur von den Werten der in A auftretenden atomaren Formeln abhängen, und somit nur von den σ -Werten der darin vorkommenden Variablen.

Gebundene Auftreten von Variablen nehmen dabei keinen Einfluss; daher können gebundene Variablen auch umbenannt werden, siehe Folie 127:

Semantik und freie Variable

In der AL konnte die Bewertung $\hat{\varphi}(B)$ einer Formel B nur von den Werten $\varphi(p)$ derjenigen Atome abhängen, die in B vorkamen.

Entsprechend kann in der PL die Semantik $\mathcal{M}\llbracket A \rrbracket(\sigma) = \hat{\sigma}(A)$ nur von den Werten der in A auftretenden atomaren Formeln abhängen, und somit nur von den σ -Werten der darin vorkommenden Variablen.

Gebundene Auftreten von Variablen nehmen dabei keinen Einfluss; daher können gebundene Variablen auch umbenannt werden, siehe Folie 127:

Lemma (Koinzidenzlemma)

Ist A eine prädikatenlogische Formel über der Signatur \mathcal{S} und $\mathcal{M} = \langle D, I \rangle$ eine \mathcal{S} -Struktur, so gilt für alle Belegungen $\sigma, \tau \in D^\forall$ mit $\sigma(x) = \tau(x)$ für alle $x \in \mathbf{FV}(A)$:

$$\mathcal{M}\llbracket A \rrbracket(\sigma) = \mathcal{M}\llbracket A \rrbracket(\tau) \quad \text{bzw.} \quad \hat{\sigma}(A) = \hat{\tau}(A) \quad \square$$

Erfüllbar- und Allgemeingültigkeit, logische Folgerung \models

Definition (vergl. Folie 22)

Erfüllbar- und Allgemeingültigkeit, logische Folgerung \models

Definition (vergl. Folie 22)

- Die durch $\mathcal{M}\llbracket A \rrbracket(\sigma) = 1$ (A gilt in \mathcal{M} unter σ) spezifizierte Relation zwischen Tripeln $\langle D, I, \sigma \in D^V \rangle$ und Formeln A induziert einen Hüllenoperator $(\)^{\models}$ auf $P(\mathbf{FO}(\mathcal{S}))$.

Erfüllbar- und Allgemeingültigkeit, logische Folgerung \models

Definition (vergl. Folie 22)

- Die durch $\mathcal{M}[[A]](\sigma) = 1$ (A gilt in \mathcal{M} unter σ) spezifizierte Relation zwischen Tripeln $\langle D, I, \sigma \in D^V \rangle$ und Formeln A induziert einen Hüllenoperator $(\)^{\models}$ auf $P(\mathbf{FO}(\mathcal{S}))$. Schreib- bzw. Sprechweise: $\Gamma \models A$ für $A \in \Gamma^{\models}$; A folgt logisch aus der Menge Γ der Prämissen.

Erfüllbar- und Allgemeingültigkeit, logische Folgerung \models

Definition (vergl. Folie 22)

- Die durch $\mathcal{M}[[A]](\sigma) = 1$ (A gilt in \mathcal{M} unter σ) spezifizierte Relation zwischen Tripeln $\langle D, I, \sigma \in D^V \rangle$ und Formeln A induziert einen Hüllenoperator $(\)^{\models}$ auf $P(\mathbf{FO}(\mathcal{S}))$. Schreib- bzw. Sprechweise: $\Gamma \models A$ für $A \in \Gamma^{\models}$; A folgt logisch aus der Menge Γ der Prämissen.
- Ist A geschlossen, so ist die Belegung der Variablen irrelevant; statt zu sagen „ A gilt in \mathcal{M} für jedes σ “, nennt man \mathcal{M} ein Modell für A .

Erfüllbar- und Allgemeingültigkeit, logische Folgerung \models

Definition (vergl. Folie 22)

- Die durch $\mathcal{M}[[A]](\sigma) = 1$ (A gilt in \mathcal{M} unter σ) spezifizierte Relation zwischen Tripeln $\langle D, I, \sigma \in D^{\mathcal{V}} \rangle$ und Formeln A induziert einen Hüllenoperator $(\)^{\models}$ auf $P(\mathbf{FO}(\mathcal{S}))$. Schreib- bzw. Sprechweise: $\Gamma \models A$ für $A \in \Gamma^{\models}$; A folgt logisch aus der Menge Γ der **Prämissen**.
- Ist A geschlossen, so ist die Belegung der Variablen irrelevant; statt zu sagen „ A gilt in \mathcal{M} für jedes σ “, nennt man \mathcal{M} ein **Modell** für A .
- $A \in \mathbf{FO}(\mathcal{S})$ ($\Gamma \subseteq \mathbf{FO}(\mathcal{S})$) heißt **erfüllbar**, wenn es eine \mathcal{S} -Struktur $\mathcal{M} = \langle D, I \rangle$ und eine Belegung $\sigma \in D^{\mathcal{V}}$ gibt mit so dass A (jedes $A \in \Gamma$) in \mathcal{M} unter σ gilt.

Erfüllbar- und Allgemeingültigkeit, logische Folgerung \models

Definition (vergl. Folie 22)

- Die durch $\mathcal{M} \llbracket A \rrbracket (\sigma) = 1$ (A gilt in \mathcal{M} unter σ) spezifizierte Relation zwischen Tripeln $\langle D, I, \sigma \in D^V \rangle$ und Formeln A induziert einen Hüllenoperator $(\)^{\models}$ auf $P(\mathbf{FO}(\mathcal{S}))$. Schreib- bzw. Sprechweise: $\Gamma \models A$ für $A \in \Gamma^{\models}$; A folgt logisch aus der Menge Γ der **Prämissen**.
- Ist A geschlossen, so ist die Belegung der Variablen irrelevant; statt zu sagen „ A gilt in \mathcal{M} für jedes σ “, nennt man \mathcal{M} ein **Modell** für A .
- $A \in \mathbf{FO}(\mathcal{S})$ ($\Gamma \subseteq \mathbf{FO}(\mathcal{S})$) heißt **erfüllbar**, wenn es eine \mathcal{S} -Struktur $\mathcal{M} = \langle D, I \rangle$ und eine Belegung $\sigma \in D^V$ gibt mit so dass A (jedes $A \in \Gamma$) in \mathcal{M} unter σ gilt.
- A heißt **allgemeingültig** oder **Tautologie**, geschrieben $\models A$, falls A in jeder \mathcal{S} -Struktur \mathcal{M} unter allen Belegungen σ gilt.

Erfüllbar- und Allgemeingültigkeit, logische Folgerung \models

Definition (vergl. Folie 22)

- Die durch $\mathcal{M} \llbracket A \rrbracket (\sigma) = 1$ (A gilt in \mathcal{M} unter σ) spezifizierte Relation zwischen Tripeln $\langle D, I, \sigma \in D^{\mathcal{V}} \rangle$ und Formeln A induziert einen **Hüllenoperator** $(\)^{\models}$ auf $P(\mathbf{FO}(\mathcal{S}))$. Schreib- bzw. Sprechweise: $\Gamma \models A$ für $A \in \Gamma^{\models}$; A **folgt logisch aus** der Menge Γ der **Prämissen**.
- Ist A geschlossen, so ist die Belegung der Variablen irrelevant; statt zu sagen „ A gilt in \mathcal{M} für jedes σ “, nennt man \mathcal{M} ein **Modell** für A .
- $A \in \mathbf{FO}(\mathcal{S})$ ($\Gamma \subseteq \mathbf{FO}(\mathcal{S})$) heißt **erfüllbar**, wenn es eine \mathcal{S} -Struktur $\mathcal{M} = \langle D, I \rangle$ und eine Belegung $\sigma \in D^{\mathcal{V}}$ gibt mit so dass A (jedes $A \in \Gamma$) in \mathcal{M} unter σ gilt.
- A heißt **allgemeingültig** oder **Tautologie**, geschrieben $\models A$, falls A in jeder \mathcal{S} -Struktur \mathcal{M} unter allen Belegungen σ gilt.

Die Tripel $\langle D, I, \sigma \in D^{\mathcal{V}} \rangle$ entsprechen den Belegungen $\varphi \in \mathbb{B}^{\mathcal{A}}$ der AL.

Irritierender Gebrauch des Symbols \models

Der Sachverhalt A gilt in \mathcal{M} unter σ , also $\mathcal{M}[[A]](\sigma) = 1$, oder einfacher $\hat{\sigma}(A) = 1$ wird häufig durch

$$\mathcal{M}, \sigma \models A \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{M} \models A \quad \text{falls } A \text{ abgeschlossen}$$

ausgedrückt, was á priori nicht zum obigen Gebrauch von „ \models “ passt.

Irritierender Gebrauch des Symbols \models

Der Sachverhalt A gilt in \mathcal{M} unter σ , also $\mathcal{M}[[A]](\sigma) = 1$, oder einfacher $\hat{\sigma}(A) = 1$ wird häufig durch

$$\mathcal{M}, \sigma \models A \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{M} \models A \quad \text{falls } A \text{ abgeschlossen}$$

ausgedrückt, was á priori nicht zum obigen Gebrauch von „ \models “ passt. Gemeint ist tatsächlich

$$\{ B \in \mathbf{FO}(\mathcal{S}) : B \text{ gilt in } \mathcal{M} \text{ unter } \sigma \} \models A$$

Irritierender Gebrauch des Symbols \models

Der Sachverhalt A gilt in \mathcal{M} unter σ , also $\mathcal{M}[[A]](\sigma) = 1$, oder einfacher $\hat{\sigma}(A) = 1$ wird häufig durch

$$\mathcal{M}, \sigma \models A \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{M} \models A \quad \text{falls } A \text{ abgeschlossen}$$

ausgedrückt, was á priori nicht zum obigen Gebrauch von „ \models “ passt. Gemeint ist tatsächlich

$$\{ B \in \mathbf{FO}(\mathcal{S}) : B \text{ gilt in } \mathcal{M} \text{ unter } \sigma \} \models A$$

und da es sich bei der linken Seite um eine Fixpunkt der Polarität handelt, gilt natürlich

$$\{ B \in \mathbf{FO}(\mathcal{S}) : B \text{ gilt in } \mathcal{M} \text{ unter } \sigma \} \ni A$$

Die kanonische Ordnung und Äquivalenz auf $\mathbf{FO}(\mathcal{S})$

Lemma (vergl. Folie 32)

Eine kanonische Quasi-Ordnung $B \sqsubseteq A$ auf $\mathbf{FO}(\mathcal{S})$ wird durch

$$\{B\} \models A$$

Die kanonische Ordnung und Äquivalenz auf $\mathbf{FO}(\mathcal{S})$

Lemma (vergl. Folie 32)

Eine kanonische Quasi-Ordnung $B \sqsubseteq A$ auf $\mathbf{FO}(\mathcal{S})$ wird durch

$\{B\} \models A$ gdw. $\mathcal{M}[[B]](\sigma) = 1$ impliziert $\mathcal{M}[[A]](\sigma) = 1$ (*)

Die kanonische Ordnung und Äquivalenz auf $\mathbf{FO}(\mathcal{S})$

Lemma (vergl. Folie 32)

Eine kanonische Quasi-Ordnung $B \sqsubseteq A$ auf $\mathbf{FO}(\mathcal{S})$ wird durch

$\{B\} \models A$ gdw. $\mathcal{M}[[B]](\sigma) = 1$ impliziert $\mathcal{M}[[A]](\sigma) = 1$ (*)

gdw. $\mathcal{M}[[B]](\sigma) \leq \mathcal{M}[[A]](\sigma)$ (*)

Die kanonische Ordnung und Äquivalenz auf $\mathbf{FO}(\mathcal{S})$

Lemma (vergl. Folie 32)

Eine kanonische Quasi-Ordnung $B \sqsubseteq A$ auf $\mathbf{FO}(\mathcal{S})$ wird durch

$\{B\} \models A$ gdw. $\mathcal{M}[[B]](\sigma) = 1$ impliziert $\mathcal{M}[[A]](\sigma) = 1$ (*)

gdw. $\mathcal{M}[[B]](\sigma) \leq \mathcal{M}[[A]](\sigma)$ (*)

gdw. $\mathcal{M}[[B \rightarrow A]](\sigma) = 1$ (*)

Die kanonische Ordnung und Äquivalenz auf $\mathbf{FO}(\mathcal{S})$

Lemma (vergl. Folie 32)

Eine kanonische Quasi-Ordnung $B \sqsubseteq A$ auf $\mathbf{FO}(\mathcal{S})$ wird durch

$\{B\} \models A$ gdw. $\mathcal{M}[[B]](\sigma) = 1$ impliziert $\mathcal{M}[[A]](\sigma) = 1$ (*)

gdw. $\mathcal{M}[[B]](\sigma) \leq \mathcal{M}[[A]](\sigma)$ (*)

gdw. $\mathcal{M}[[B \rightarrow A]](\sigma) = 1$ (*)

(*) für alle \mathcal{S} -Strukturen $\mathcal{M} = \langle D, I \rangle$ und alle Belegungen $\sigma \in D^{\mathcal{V}}$

Die kanonische Ordnung und Äquivalenz auf $\mathbf{FO}(\mathcal{S})$

Lemma (vergl. Folie 32)

Eine kanonische Quasi-Ordnung $B \sqsubseteq A$ auf $\mathbf{FO}(\mathcal{S})$ wird durch

$\{B\} \models A$ gdw. $\mathcal{M}[[B]](\sigma) = 1$ impliziert $\mathcal{M}[[A]](\sigma) = 1$ (*)

gdw. $\mathcal{M}[[B]](\sigma) \leq \mathcal{M}[[A]](\sigma)$ (*)

gdw. $\mathcal{M}[[B \rightarrow A]](\sigma) = 1$ (*)

(*) für alle \mathcal{S} -Strukturen $\mathcal{M} = \langle D, I \rangle$ und alle Belegungen $\sigma \in D^{\mathcal{V}}$

definiert.

Die kanonische Ordnung und Äquivalenz auf $\mathbf{FO}(\mathcal{S})$

Lemma (vergl. Folie 32)

Eine kanonische Quasi-Ordnung $B \sqsubseteq A$ auf $\mathbf{FO}(\mathcal{S})$ wird durch

$\{B\} \models A$ gdw. $\mathcal{M}[[B]](\sigma) = 1$ impliziert $\mathcal{M}[[A]](\sigma) = 1$ (*)

gdw. $\mathcal{M}[[B]](\sigma) \leq \mathcal{M}[[A]](\sigma)$ (*)

gdw. $\mathcal{M}[[B \rightarrow A]](\sigma) = 1$ (*)

(*) für alle \mathcal{S} -Strukturen $\mathcal{M} = \langle D, I \rangle$ und alle Belegungen $\sigma \in D^{\mathcal{V}}$

definiert. Wir betrachten sie wieder als **Externalisierung** des Junktors \rightarrow . \square

Die kanonische Ordnung und Äquivalenz auf $\mathbf{FO}(\mathcal{S})$

Lemma (vergl. Folie 32)

Eine kanonische Quasi-Ordnung $B \sqsubseteq A$ auf $\mathbf{FO}(\mathcal{S})$ wird durch

$\{B\} \models A$ gdw. $\mathcal{M}[[B]](\sigma) = 1$ impliziert $\mathcal{M}[[A]](\sigma) = 1$ (*)

gdw. $\mathcal{M}[[B]](\sigma) \leq \mathcal{M}[[A]](\sigma)$ (*)

gdw. $\mathcal{M}[[B \rightarrow A]](\sigma) = 1$ (*)

(*) für alle \mathcal{S} -Strukturen $\mathcal{M} = \langle D, I \rangle$ und alle Belegungen $\sigma \in D^\forall$

definiert. Wir betrachten sie wieder als **Externalisierung** des Junktors \rightarrow . \square

Definition

\models sei die von \sqsubseteq induzierte ÄR, die **Externalisierung** des Junktors \leftrightarrow .

Die kanonische Ordnung und Äquivalenz auf $\mathbf{FO}(\mathcal{S})$

Lemma (vergl. Folie 32)

Eine kanonische Quasi-Ordnung $B \sqsubseteq A$ auf $\mathbf{FO}(\mathcal{S})$ wird durch

$$\{B\} \models A \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{M}[[B]](\sigma) = 1 \quad \text{impliziert} \quad \mathcal{M}[[A]](\sigma) = 1 \quad (*)$$

$$\text{gdw.} \quad \mathcal{M}[[B]](\sigma) \leq \mathcal{M}[[A]](\sigma) \quad (*)$$

$$\text{gdw.} \quad \mathcal{M}[[B \rightarrow A]](\sigma) = 1 \quad (*)$$

(*) für alle \mathcal{S} -Strukturen $\mathcal{M} = \langle D, I \rangle$ und alle Belegungen $\sigma \in D^V$

definiert. Wir betrachten sie wieder als **Externalisierung** des Junktors \rightarrow . \square

Definition

\models sei die von \sqsubseteq induzierte ÄR, die **Externalisierung** des Junktors \leftrightarrow .

Die kanonische Quasi-Ordnung auf $\mathbf{FO}(\mathcal{S})$ mit \models zu bezeichnen kann zu noch mehr Missverständnisse führen, daher verwenden wir \sqsubseteq .

Rechenregeln für Quantoren

Neben den Rechenregeln auf Folien 34 und 35 gelten weitere Regeln für die mittels Quantoren gebildeten neuen unären Junktoren $\forall x$ und $\exists x$:

Rechenregeln für Quantoren

Neben den Rechenregeln auf Folien 34 und 35 gelten weitere Regeln für die mittels Quantoren gebildeten neuen unären Junktoren $\forall x$ und $\exists x$:

Lemma (weitere logische Äquivalenzen in **FO**(\mathcal{S}))

(3)

Rechenregeln für Quantoren

Neben den Rechenregeln auf Folien 34 und 35 gelten weitere Regeln für die mittels Quantoren gebildeten neuen unären Junktoren $\forall x$ und $\exists x$:

Lemma (weitere logische Äquivalenzen in **FO**(\mathcal{S}))

$$\neg \forall x A \vDash \exists x \neg A \qquad \neg \exists x A \vDash \forall x \neg A \qquad (1)$$

(3)

Rechenregeln für Quantoren

Neben den Rechenregeln auf Folien 34 und 35 gelten weitere Regeln für die mittels Quantoren gebildeten neuen unären Junktoren $\forall x$ und $\exists x$:

Lemma (weitere logische Äquivalenzen in **FO**(\mathcal{S}))

$$\neg \forall x A \Leftrightarrow \exists x \neg A \qquad \neg \exists x A \Leftrightarrow \forall x \neg A \qquad (1)$$

$$\forall x A \wedge \forall x B \Leftrightarrow \forall x (A \wedge B) \qquad \exists x A \vee \exists x B \Leftrightarrow \exists x (A \vee B) \qquad (2)$$

(3)

Rechenregeln für Quantoren

Neben den Rechenregeln auf Folien 34 und 35 gelten weitere Regeln für die mittels Quantoren gebildeten neuen unären Junktoren $\forall x$ und $\exists x$:

Lemma (weitere logische Äquivalenzen in **FO**(\mathcal{S}))

$$\neg \forall x A \vDash \exists x \neg A \qquad \neg \exists x A \vDash \forall x \neg A \qquad (1)$$

$$\forall x A \wedge \forall x B \vDash \forall x (A \wedge B) \qquad \exists x A \vee \exists x B \vDash \exists x (A \vee B) \qquad (2)$$

$$\forall x \forall y A \vDash \forall y \forall x A \qquad \exists x \exists y A \vDash \exists y \exists x A \qquad (3)$$

Rechenregeln für Quantoren

Neben den Rechenregeln auf Folien 34 und 35 gelten weitere Regeln für die mittels Quantoren gebildeten neuen unären Junktoren $\forall x$ und $\exists x$:

Lemma (weitere logische Äquivalenzen in $\mathbf{FO}(\mathcal{S})$)

$$\neg \forall x A \equiv \exists x \neg A \qquad \neg \exists x A \equiv \forall x \neg A \qquad (1)$$

$$\forall x A \wedge \forall x B \equiv \forall x (A \wedge B) \qquad \exists x A \vee \exists x B \equiv \exists x (A \vee B) \qquad (2)$$

$$\forall x \forall y A \equiv \forall y \forall x A \qquad \exists x \exists y A \equiv \exists y \exists x A \qquad (3)$$

Sofern $x \notin \mathbf{FV}(A)$ gilt weiterhin

$$A \star Qx B \equiv Qx (A \star B) \quad \text{für } Q \text{ Quantor und } \star \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\} \qquad (4)$$

$$Qx B \rightarrow A \equiv \bar{Q}x (B \rightarrow A) \quad \text{für } Q \text{ und } \bar{Q} \text{ komplementär} \qquad (5)$$

Rechenregeln für Quantoren

Neben den Rechenregeln auf Folien 34 und 35 gelten weitere Regeln für die mittels Quantoren gebildeten neuen unären Junktoren $\forall x$ und $\exists x$:

Lemma (weitere logische Äquivalenzen in $\mathbf{FO}(\mathcal{S})$)

$$\neg \forall x A \equiv \exists x \neg A \qquad \neg \exists x A \equiv \forall x \neg A \qquad (1)$$

$$\forall x A \wedge \forall x B \equiv \forall x (A \wedge B) \qquad \exists x A \vee \exists x B \equiv \exists x (A \vee B) \qquad (2)$$

$$\forall x \forall y A \equiv \forall y \forall x A \qquad \exists x \exists y A \equiv \exists y \exists x A \qquad (3)$$

Sofern $x \notin \mathbf{FV}(A)$ gilt weiterhin

$$A \star Qx B \equiv Qx (A \star B) \quad \text{für } Q \text{ Quantor und } \star \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\} \qquad (4)$$

$$Qx B \rightarrow A \equiv \bar{Q}x (B \rightarrow A) \quad \text{für } Q \text{ und } \bar{Q} \text{ komplementär} \qquad (5)$$

Aber i.A.

$$\forall x A \vee \forall x B \not\equiv \forall x (A \vee B) \quad \exists x A \wedge \exists x B \not\equiv \exists x (A \wedge B) \quad \forall x \exists y A \not\equiv \exists y \forall x A$$

Substitutionen via Rekursionsatz und Modifikationen

Folie 117 zeigte, wie jedes $\langle x, d \rangle \in \mathcal{V} \times D$ Belegungen $\sigma \in D^{\mathcal{V}}$ in neue Belegungen $\sigma\{x/d\} \in D^{\mathcal{V}}$ transformiert.

Substitutionen via Rekursionsatz und Modifikationen

Folie 117 zeigte, wie jedes $\langle x, d \rangle \in \mathcal{V} \times D$ Belegungen $\sigma \in D^{\mathcal{V}}$ in neue Belegungen $\sigma\{x/d\} \in D^{\mathcal{V}}$ transformiert. Betrachte $D = \mathbf{Term}(\mathbf{Fun}, \mathcal{V})$:

Substitutionen via Rekursionsatz und Modifikationen

Folie 117 zeigte, wie jedes $\langle x, d \rangle \in \mathcal{V} \times D$ Belegungen $\sigma \in D^{\mathcal{V}}$ in neue Belegungen $\sigma\{x/d\} \in D^{\mathcal{V}}$ transformiert. Betrachte $D = \mathbf{Term}(\mathbf{Fun}, \mathcal{V})$:

Definition

Ein **Fun**-Endomorphismus

$$\mathbf{Term}(\mathbf{Fun}, \mathcal{V}) \xrightarrow{\check{\vartheta}} \mathbf{Term}(\mathbf{Fun}, \mathcal{V})$$

Substitutionen via Rekursionssatz und Modifikationen

Folie 117 zeigte, wie jedes $\langle x, d \rangle \in \mathcal{V} \times D$ Belegungen $\sigma \in D^{\mathcal{V}}$ in neue Belegungen $\sigma\{x/d\} \in D^{\mathcal{V}}$ transformiert. Betrachte $D = \mathbf{Term}(\mathbf{Fun}, \mathcal{V})$:

Definition

Ein **Fun**-Endomorphismus

$$\mathbf{Term}(\mathbf{Fun}, \mathcal{V}) \xrightarrow{\check{\vartheta}} \mathbf{Term}(\mathbf{Fun}, \mathcal{V})$$

der die Anwendung einer endlichen Komposition ϑ von Modifikationen

$$\mathbf{Term}(\mathbf{Fun}, \mathcal{V})^{\mathcal{V}} \xrightarrow{\{x, t\}} \mathbf{Term}(\mathbf{Fun}, \mathcal{V})^{\mathcal{V}}$$

Substitutionen via Rekursionsatz und Modifikationen

Folie 117 zeigte, wie jedes $\langle x, d \rangle \in \mathcal{V} \times D$ Belegungen $\sigma \in D^{\mathcal{V}}$ in neue Belegungen $\sigma\{x/d\} \in D^{\mathcal{V}}$ transformiert. Betrachte $D = \mathbf{Term}(\mathbf{Fun}, \mathcal{V})$:

Definition

Ein **Fun**-Endomorphismus

$$\mathbf{Term}(\mathbf{Fun}, \mathcal{V}) \xrightarrow{\vartheta} \mathbf{Term}(\mathbf{Fun}, \mathcal{V})$$

der die Anwendung einer endlichen Komposition ϑ von Modifikationen

$$\mathbf{Term}(\mathbf{Fun}, \mathcal{V})^{\mathcal{V}} \xrightarrow{\{x, t\}} \mathbf{Term}(\mathbf{Fun}, \mathcal{V})^{\mathcal{V}}$$

auf die kanonische Belegung $\mathcal{V} \xrightarrow{\iota} \mathbf{Term}(\mathbf{Fun}, \mathcal{V})$ eindeutig fortsetzt, heißt **Substitution**,

Substitutionen via Rekursionsatz und Modifikationen

Folie 117 zeigte, wie jedes $\langle x, d \rangle \in \mathcal{V} \times D$ Belegungen $\sigma \in D^{\mathcal{V}}$ in neue Belegungen $\sigma\{x/d\} \in D^{\mathcal{V}}$ transformiert. Betrachte $D = \mathbf{Term}(\mathbf{Fun}, \mathcal{V})$:

Definition

Ein **Fun**-Endomorphismus

$$\mathbf{Term}(\mathbf{Fun}, \mathcal{V}) \xrightarrow{\check{\vartheta}} \mathbf{Term}(\mathbf{Fun}, \mathcal{V})$$

der die Anwendung einer endlichen Komposition ϑ von Modifikationen

$$\mathbf{Term}(\mathbf{Fun}, \mathcal{V})^{\mathcal{V}} \xrightarrow{\{x, t\}} \mathbf{Term}(\mathbf{Fun}, \mathcal{V})^{\mathcal{V}}$$

auf die kanonische Belegung $\mathcal{V} \xrightarrow{\iota} \mathbf{Term}(\mathbf{Fun}, \mathcal{V})$ eindeutig fortsetzt, heißt **Substitution**, wie auch die eindeutigen Fortsetzungen

$$\mathbf{Atm} \xrightarrow{\bar{\vartheta}} \mathbf{Atm} \quad \text{und} \quad \mathbf{FO}(S) \xrightarrow{\hat{\vartheta}} \mathbf{FO}(S)$$

Anwendung von Substitutionen

Die verdrehte Schreibweise für Modifikationen überträgt sich auf Substitutionen; man braucht $\check{\vartheta}$, $\bar{\vartheta}$ und $\hat{\vartheta}$ nicht länger zu unterscheiden:

Anwendung von Substitutionen

Die verdrehte Schreibweise für Modifikationen überträgt sich auf Substitutionen; man braucht $\check{\vartheta}$, $\bar{\vartheta}$ und $\hat{\vartheta}$ nicht länger zu unterscheiden:
Bei der Anwendung auf quantifizierte Formeln dürfen keine neuen Bindungen erzeugt werden. Ggf. sind gebundene Variable umzubenennen:

Anwendung von Substitutionen

Die verdrehte Schreibweise für Modifikationen überträgt sich auf Substitutionen; man braucht $\check{\vartheta}$, $\bar{\vartheta}$ und $\hat{\vartheta}$ nicht länger zu unterscheiden: Bei der Anwendung auf quantifizierte Formeln dürfen keine neuen Bindungen erzeugt werden. Ggf. sind gebundene Variable umzubenennen:

Definition (Vereinheitlichte Substitutionen)

$$x\vartheta := \check{\vartheta}(x)$$

Anwendung von Substitutionen

Die verdrehte Schreibweise für Modifikationen überträgt sich auf Substitutionen; man braucht $\check{\vartheta}$, $\bar{\vartheta}$ und $\hat{\vartheta}$ nicht länger zu unterscheiden: Bei der Anwendung auf quantifizierte Formeln dürfen keine neuen Bindungen erzeugt werden. Ggf. sind gebundene Variable umzubenennen:

Definition (Vereinheitlichte Substitutionen)

$$x\vartheta := \check{\vartheta}(x)$$

$$f(t_0, \dots, t_{\text{ar}(f)-1})\vartheta := f(t_0\vartheta, \dots, t_{\text{ar}(f)-1}\vartheta)$$

Anwendung von Substitutionen

Die verdrehte Schreibweise für Modifikationen überträgt sich auf Substitutionen; man braucht $\check{\vartheta}$, $\bar{\vartheta}$ und $\hat{\vartheta}$ nicht länger zu unterscheiden: Bei der Anwendung auf quantifizierte Formeln dürfen keine neuen Bindungen erzeugt werden. Ggf. sind gebundene Variable umzubenennen:

Definition (Vereinheitlichte Substitutionen)

$$x\vartheta := \check{\vartheta}(x)$$

$$f(t_0, \dots, t_{\text{ar}(f)-1})\vartheta := f(t_0\vartheta, \dots, t_{\text{ar}(f)-1}\vartheta)$$

$$(t_0 \doteq t_1)\vartheta := t_0\vartheta \doteq t_1\vartheta$$

Anwendung von Substitutionen

Die verdrehte Schreibweise für Modifikationen überträgt sich auf Substitutionen; man braucht $\check{\vartheta}$, $\bar{\vartheta}$ und $\hat{\vartheta}$ nicht länger zu unterscheiden: Bei der Anwendung auf quantifizierte Formeln dürfen keine neuen Bindungen erzeugt werden. Ggf. sind gebundene Variable umzubenennen:

Definition (Vereinheitlichte Substitutionen)

$$x\vartheta := \check{\vartheta}(x)$$

$$f(t_0, \dots, t_{\text{ar}(f)-1})\vartheta := f(t_0\vartheta, \dots, t_{\text{ar}(f)-1}\vartheta)$$

$$(t_0 \doteq t_1)\vartheta := t_0\vartheta \doteq t_1\vartheta$$

$$R(t_0, \dots, t_{\text{ar}(R)-1})\vartheta := R(t_0\vartheta, \dots, t_{\text{ar}(R)-1}\vartheta)$$

Anwendung von Substitutionen

Die verdrehte Schreibweise für Modifikationen überträgt sich auf Substitutionen; man braucht $\check{\vartheta}$, $\bar{\vartheta}$ und $\hat{\vartheta}$ nicht länger zu unterscheiden: Bei der Anwendung auf quantifizierte Formeln dürfen keine neuen Bindungen erzeugt werden. Ggf. sind gebundene Variable umzubenennen:

Definition (Vereinheitlichte Substitutionen)

$$x\vartheta := \check{\vartheta}(x)$$

$$f(t_0, \dots, t_{\text{ar}(f)-1})\vartheta := f(t_0\vartheta, \dots, t_{\text{ar}(f)-1}\vartheta)$$

$$(t_0 \doteq t_1)\vartheta := t_0\vartheta \doteq t_1\vartheta$$

$$R(t_0, \dots, t_{\text{ar}(R)-1})\vartheta := R(t_0\vartheta, \dots, t_{\text{ar}(R)-1}\vartheta)$$

$$(\neg A)\vartheta := \neg(A\vartheta)$$

Anwendung von Substitutionen

Die verdrehte Schreibweise für Modifikationen überträgt sich auf Substitutionen; man braucht $\check{\vartheta}$, $\bar{\vartheta}$ und $\hat{\vartheta}$ nicht länger zu unterscheiden: Bei der Anwendung auf quantifizierte Formeln dürfen keine neuen Bindungen erzeugt werden. Ggf. sind gebundene Variable umzubenennen:

Definition (Vereinheitlichte Substitutionen)

$$x\vartheta := \check{\vartheta}(x)$$

$$f(t_0, \dots, t_{\text{ar}(f)-1})\vartheta := f(t_0\vartheta, \dots, t_{\text{ar}(f)-1}\vartheta)$$

$$(t_0 \doteq t_1)\vartheta := t_0\vartheta \doteq t_1\vartheta$$

$$R(t_0, \dots, t_{\text{ar}(R)-1})\vartheta := R(t_0\vartheta, \dots, t_{\text{ar}(R)-1}\vartheta)$$

$$(\neg A)\vartheta := \neg(A\vartheta)$$

$$(A \star B)\vartheta := A\vartheta \star B\vartheta$$

Anwendung von Substitutionen

Die verdrehte Schreibweise für Modifikationen überträgt sich auf Substitutionen; man braucht $\check{\vartheta}$, $\bar{\vartheta}$ und $\hat{\vartheta}$ nicht länger zu unterscheiden: Bei der Anwendung auf quantifizierte Formeln dürfen keine neuen Bindungen erzeugt werden. Ggf. sind gebundene Variable umzubenennen:

Definition (Vereinheitlichte Substitutionen)

$$x\vartheta := \check{\vartheta}(x)$$

$$f(t_0, \dots, t_{\text{ar}(f)-1})\vartheta := f(t_0\vartheta, \dots, t_{\text{ar}(f)-1}\vartheta)$$

$$(t_0 \doteq t_1)\vartheta := t_0\vartheta \doteq t_1\vartheta$$

$$R(t_0, \dots, t_{\text{ar}(R)-1})\vartheta := R(t_0\vartheta, \dots, t_{\text{ar}(R)-1}\vartheta)$$

$$(\neg A)\vartheta := \neg(A\vartheta)$$

$$(A \star B)\vartheta := A\vartheta \star B\vartheta$$

$$(\mathcal{Q}x A)\vartheta := \mathcal{Q}y (A\{x/y\}\vartheta), y \notin \mathbf{V}(A), y\vartheta = y$$

Anwendung von Substitutionen

Die verdrehte Schreibweise für Modifikationen überträgt sich auf Substitutionen; man braucht $\check{\vartheta}$, $\bar{\vartheta}$ und $\hat{\vartheta}$ nicht länger zu unterscheiden: Bei der Anwendung auf quantifizierte Formeln dürfen keine neuen Bindungen erzeugt werden. Ggf. sind gebundene Variable umzubenennen:

Definition (Vereinheitlichte Substitutionen)

$$x\vartheta := \check{\vartheta}(x)$$

$$f(t_0, \dots, t_{\text{ar}(f)-1})\vartheta := f(t_0\vartheta, \dots, t_{\text{ar}(f)-1}\vartheta)$$

$$(t_0 \doteq t_1)\vartheta := t_0\vartheta \doteq t_1\vartheta$$

$$R(t_0, \dots, t_{\text{ar}(R)-1})\vartheta := R(t_0\vartheta, \dots, t_{\text{ar}(R)-1}\vartheta)$$

$$(\neg A)\vartheta := \neg(A\vartheta)$$

$$(A \star B)\vartheta := A\vartheta \star B\vartheta$$

$$(\mathcal{Q}x A)\vartheta := \mathcal{Q}y (A\{x/y\}\vartheta), \quad y \notin \mathbf{V}(A), \quad y\vartheta = y$$

($\{x/y\}\vartheta$ ist natürlich die Komposition von Modifikationen, die erst $\{x/y\}$ und dann ϑ anwendet.)

Substitutionslemma und gebundene Umbenennung

Der Zusammenhang zwischen Substitutionen (in Termen und (atomaren) Formeln) und der Modifikation von Belegungen nimmt nun folgende eindrucksvolle Form an, was sich mittels Induktion über den Aufbau von Termen bzw. Formeln zeigen lässt (gute Übung, um die Notation zu beherrschen!):

Substitutionslemma und gebundene Umbenennung

Der Zusammenhang zwischen Substitutionen (in Termen und (atomaren) Formeln) und der Modifikation von Belegungen nimmt nun folgende eindrucksvolle Form an, was sich mittels Induktion über den Aufbau von Termen bzw. Formeln zeigen lässt (gute Übung, um die Notation zu beherrschen!):

Lemma (Substitutionslemma)

$$\mathcal{M}[A\{x/t\}](\sigma) = \mathcal{M}[A](\sigma\{x/\mathcal{M}[t](\sigma)\})$$

Substitutionslemma und gebundene Umbenennung

Der Zusammenhang zwischen Substitutionen (in Termen und (atomaren) Formeln) und der Modifikation von Belegungen nimmt nun folgende eindrucksvolle Form an, was sich mittels Induktion über den Aufbau von Termen bzw. Formeln zeigen lässt (gute Übung, um die Notation zu beherrschen!):

Lemma (Substitutionslemma)

$$\mathcal{M}[A\{x/t\}](\sigma) = \mathcal{M}[A](\sigma\{x/\mathcal{M}[t](\sigma)\}) \quad \hat{\sigma}(A\{x/t\}) = \sigma\{\widehat{x/\hat{\sigma}(t)}\}(A)$$

Substitutionslemma und gebundene Umbenennung

Der Zusammenhang zwischen Substitutionen (in Termen und (atomaren) Formeln) und der Modifikation von Belegungen nimmt nun folgende eindrucksvolle Form an, was sich mittels Induktion über den Aufbau von Termen bzw. Formeln zeigen lässt (gute Übung, um die Notation zu beherrschen!):

Lemma (Substitutionslemma)

$$\mathcal{M}[A\{x/t\}](\sigma) = \mathcal{M}[A](\sigma\{x/\mathcal{M}[t](\sigma)\}) \quad \hat{\sigma}(A\{x/t\}) = \sigma\{\widehat{x/\hat{\sigma}(t)}\}(A)$$

Korollar.

Substitutionslemma und gebundene Umbenennung

Der Zusammenhang zwischen Substitutionen (in Termen und (atomaren) Formeln) und der Modifikation von Belegungen nimmt nun folgende eindrucksvolle Form an, was sich mittels Induktion über den Aufbau von Termen bzw. Formeln zeigen lässt (gute Übung, um die Notation zu beherrschen!):

Lemma (Substitutionslemma)

$$\mathcal{M}[A\{x/t\}](\sigma) = \mathcal{M}[A](\sigma\{x/\mathcal{M}[t](\sigma)\}) \quad \hat{\sigma}(A\{x/t\}) = \sigma\{\widehat{x/\hat{\sigma}(t)}\}(A)$$

Korollar.

- 1 Ist $A \in \mathbf{FO}(\mathcal{S})$ allgemeingültig, dann auch $A\{x/t\}$.

Substitutionslemma und gebundene Umbenennung

Der Zusammenhang zwischen Substitutionen (in Termen und (atomaren) Formeln) und der Modifikation von Belegungen nimmt nun folgende eindrucksvolle Form an, was sich mittels Induktion über den Aufbau von Termen bzw. Formeln zeigen lässt (gute Übung, um die Notation zu beherrschen!):

Lemma (Substitutionslemma)

$$\mathcal{M}[A\{x/t\}](\sigma) = \mathcal{M}[A](\sigma\{x/\mathcal{M}[t](\sigma)\}) \quad \hat{\sigma}(A\{x/t\}) = \sigma\{\widehat{x/\hat{\sigma}(t)}\}(A)$$

Korollar.

- ① Ist $A \in \mathbf{FO}(\mathcal{S})$ allgemeingültig, dann auch $A\{x/t\}$.
- ② Die Formel $\forall x A \rightarrow A\{x/t\}$ ist allgemeingültig.

Substitutionslemma und gebundene Umbenennung

Der Zusammenhang zwischen Substitutionen (in Termen und (atomaren) Formeln) und der Modifikation von Belegungen nimmt nun folgende eindrucksvolle Form an, was sich mittels Induktion über den Aufbau von Termen bzw. Formeln zeigen lässt (gute Übung, um die Notation zu beherrschen!):

Lemma (Substitutionslemma)

$$\mathcal{M}[A\{x/t\}](\sigma) = \mathcal{M}[A](\sigma\{x/\mathcal{M}[t](\sigma)\}) \quad \hat{\sigma}(A\{x/t\}) = \sigma\{\widehat{x/\hat{\sigma}(t)}\}(A)$$

Korollar.

- ① Ist $A \in \mathbf{FO}(\mathcal{S})$ allgemeingültig, dann auch $A\{x/t\}$.
- ② Die Formel $\forall x A \rightarrow A\{x/t\}$ ist allgemeingültig.

Lemma (Gebundene Umbenennung erhält Äquivalenz)

$$\mathcal{Q}x A \equiv \mathcal{Q}y A\{x/y\} \text{ sofern } y \notin \mathbf{FV}(A). \quad \square$$

bereinigte Formeln

Die Syntax der Prädikatenlogik enthält manche Fallstricke, die man explizit umgehen muß.

bereinigte Formeln

Die Syntax der Prädikatenlogik enthält manche Fallstricke, die man explizit umgehen muß.

Definition

$A \in \mathbf{FO}(\mathcal{S})$ heißt **bereinigt**, sofern

bereinigte Formeln

Die Syntax der Prädikatenlogik enthält manche Fallstricke, die man explizit umgehen muß.

Definition

$A \in \mathbf{FO}(\mathcal{S})$ heißt **bereinigt**, sofern

- keine Variable frei und gebunden auftritt, $\mathbf{FV}(A) \cap \mathbf{GV}(A) = \emptyset$;

bereinigte Formeln

Die Syntax der Prädikatenlogik enthält manche Fallstricke, die man explizit umgehen muß.

Definition

$A \in \mathbf{FO}(\mathcal{S})$ heißt **bereinigt**, sofern

- keine Variable frei und gebunden auftritt, $\mathbf{FV}(A) \cap \mathbf{GV}(A) = \emptyset$;
- jede Variable höchstens einmal gebunden wird.

bereinigte Formeln

Die Syntax der Prädikatenlogik enthält manche Fallstricke, die man explizit umgehen muß.

Definition

$A \in \mathbf{FO}(\mathcal{S})$ heißt **bereinigt**, sofern

- keine Variable frei und gebunden auftritt, $\mathbf{FV}(A) \cap \mathbf{GV}(A) = \emptyset$;
- jede Variable höchstens einmal gebunden wird.

Durch iterierte gebundene Umbenennung lässt sich jede Formel bereinigen:

bereinigte Formeln

Die Syntax der Prädikatenlogik enthält manche Fallstricke, die man explizit umgehen muß.

Definition

$A \in \mathbf{FO}(\mathcal{S})$ heißt **bereinigt**, sofern

- keine Variable frei und gebunden auftritt, $\mathbf{FV}(A) \cap \mathbf{GV}(A) = \emptyset$;
- jede Variable höchstens einmal gebunden wird.

Durch iterierte gebundene Umbenennung lässt sich jede Formel bereinigen:

Lemma

Zu jeder Formel $A \in \mathbf{FO}(\mathcal{S})$ existiert eine bereinigte Formel $B \in \mathbf{FO}(\mathcal{S})$ mit $A \vDash B$. □

bereinigte Formeln

Die Syntax der Prädikatenlogik enthält manche Fallstricke, die man explizit umgehen muß.

Definition

$A \in \mathbf{FO}(\mathcal{S})$ heißt **bereinigt**, sofern

- keine Variable frei und gebunden auftritt, $\mathbf{FV}(A) \cap \mathbf{GV}(A) = \emptyset$;
- jede Variable höchstens einmal gebunden wird.

Durch iterierte gebundene Umbenennung lässt sich jede Formel bereinigen:

Lemma

Zu jeder Formel $A \in \mathbf{FO}(\mathcal{S})$ existiert eine bereinigte Formel $B \in \mathbf{FO}(\mathcal{S})$ mit $A \vDash B$. □

Folie 124(2) zeigt aber, dass man sich nicht allein auf bereinigte Formeln beschränken kann.

Normalformen

Die Motivation (Folie 82), Formeln der AL in bestimmte einfache Formen zu überführen, greift auch in der PL.

Normalformen

Die Motivation (Folie 82), Formeln der AL in bestimmte einfache Formen zu überführen, greift auch in der PL. Ziel sind einfachere Beweise und effizientere Algorithmen.

Normalformen

Die Motivation (Folie 82), Formeln der AL in bestimmte einfache Formen zu überführen, greift auch in der PL. Ziel sind einfachere Beweise und effizientere Algorithmen.

Wir werden PL-Formeln in zwei Normalformen transformieren:

- ▷ **Pränex-Normalform:**

Normalformen

Die Motivation (Folie 82), Formeln der AL in bestimmte einfache Formen zu überführen, greift auch in der PL. Ziel sind einfachere Beweise und effizientere Algorithmen.

Wir werden PL-Formeln in zwei Normalformen transformieren:

- ▷ **Pränex-Normalform**: alle Quantoren außen; logisch äquivalent;

Normalformen

Die Motivation (Folie 82), Formeln der AL in bestimmte einfache Formen zu überführen, greift auch in der PL. Ziel sind einfachere Beweise und effizientere Algorithmen.

Wir werden PL-Formeln in zwei Normalformen transformieren:

- ▷ **Pränex-Normalform**: alle Quantoren außen; logisch äquivalent;
- ▷ **Skolem-Normalform**:

Normalformen

Die Motivation (Folie 82), Formeln der AL in bestimmte einfache Formen zu überführen, greift auch in der PL. Ziel sind einfachere Beweise und effizientere Algorithmen.

Wir werden PL-Formeln in zwei Normalformen transformieren:

- ▷ **Pränex-Normalform**: alle Quantoren außen; logisch äquivalent;
- ▷ **Skolem-Normalform**: PNF ohne \exists ; erfüllbarkeitsäquivalent.

Normalformen

Die Motivation (Folie 82), Formeln der AL in bestimmte einfache Formen zu überführen, greift auch in der PL. Ziel sind einfachere Beweise und effizientere Algorithmen.

Wir werden PL-Formeln in zwei Normalformen transformieren:

- ▷ **Pränex-Normalform**: alle Quantoren außen; logisch äquivalent;
- ▷ **Skolem-Normalform**: PNF ohne \exists ; erfüllbarkeitsäquivalent.

Lemma (Universeller und existenzieller Abschluss)

Für $A \in \mathbf{FO}(S)$ mit $\mathbf{FV}(A) \subseteq \{x_i : i < n\}$ gilt:

Normalformen

Die Motivation (Folie 82), Formeln der AL in bestimmte einfache Formen zu überführen, greift auch in der PL. Ziel sind einfachere Beweise und effizientere Algorithmen.

Wir werden PL-Formeln in zwei Normalformen transformieren:

- ▷ **Pränex-Normalform**: alle Quantoren außen; logisch äquivalent;
- ▷ **Skolem-Normalform**: PNF ohne \exists ; erfüllbarkeitsäquivalent.

Lemma (Universeller und existenzieller Abschluss)

Für $A \in \mathbf{FO}(S)$ mit $\mathbf{FV}(A) \subseteq \{x_i : i < n\}$ gilt:

A ist allgemeingültig gdw. $\forall x_0 \dots \forall x_{n-1} A$ ist allgemeingültig

Normalformen

Die Motivation (Folie 82), Formeln der AL in bestimmte einfache Formen zu überführen, greift auch in der PL. Ziel sind einfachere Beweise und effizientere Algorithmen.

Wir werden PL-Formeln in zwei Normalformen transformieren:

- ▷ **Pränex-Normalform**: alle Quantoren außen; logisch äquivalent;
- ▷ **Skolem-Normalform**: PNF ohne \exists ; erfüllbarkeitsäquivalent.

Lemma (Universeller und existenzieller Abschluss)

Für $A \in \mathbf{FO}(S)$ mit $\mathbf{FV}(A) \subseteq \{x_i : i < n\}$ gilt:

A ist allgemeingültig gdw. $\forall x_0 \dots \forall x_{n-1} A$ ist allgemeingültig

A ist erfüllbar gdw. $\exists x_0 \dots \exists x_{n-1} A$ ist erfüllbar

Normalformen

Die Motivation (Folie 82), Formeln der AL in bestimmte einfache Formen zu überführen, greift auch in der PL. Ziel sind einfachere Beweise und effizientere Algorithmen.

Wir werden PL-Formeln in zwei Normalformen transformieren:

- ▷ **Pränex-Normalform**: alle Quantoren außen; logisch äquivalent;
- ▷ **Skolem-Normalform**: PNF ohne \exists ; erfüllbarkeitsäquivalent.

Lemma (Universeller und existenzieller Abschluss)

Für $A \in \mathbf{FO}(S)$ mit $\mathbf{FV}(A) \subseteq \{x_i : i < n\}$ gilt:

A ist allgemeingültig gdw. $\forall x_0 \dots \forall x_{n-1} A$ ist allgemeingültig

A ist erfüllbar gdw. $\exists x_0 \dots \exists x_{n-1} A$ ist erfüllbar

Die Formeln auf der rechten Seite heißen **universeller** bzw. **existentieller Abschluss** von A .

Pränex-Normalform

Definition

Eine Formel der Form

$$A = Q_0 y_0 Q_1 y_1 \dots Q_{n-1} y_{n-1} B$$

mit $Q_i \in \{\forall, \exists\}$, $i < n$, liegt in **Pränex-Normalform** oder kurz **PNF** vor, sofern B keine Quantoren enthält.

Pränex-Normalform

Definition

Eine Formel der Form

$$A = Q_0 y_0 Q_1 y_1 \dots Q_{n-1} y_{n-1} B$$

mit $Q_i \in \{\forall, \exists\}$, $i < n$, liegt in **Pränex-Normalform** oder kurz **PNF** vor, sofern B keine Quantoren enthält.

Im bereinigten Fall sprechen wir von einer **bereinigten PNF**, oder kurz **BPF**.

Pränex-Normalform

Definition

Eine Formel der Form

$$A = Q_0 y_0 Q_1 y_1 \dots Q_{n-1} y_{n-1} B$$

mit $Q_i \in \{\forall, \exists\}$, $i < n$, liegt in **Pränex-Normalform** oder kurz **PNF** vor, sofern B keine Quantoren enthält.

Im bereinigten Fall sprechen wir von einer **bereinigten PNF**, oder kurz **BPF**.

Satz

Jede Formel $A \in \mathbf{FO}(\mathcal{S})$ besitzt eine äquivalente Formel B in BPF.

Pränex-Normalform

Definition

Eine Formel der Form

$$A = Q_0 y_0 Q_1 y_1 \dots Q_{n-1} y_{n-1} B$$

mit $Q_i \in \{\forall, \exists\}$, $i < n$, liegt in **Pränex-Normalform** oder kurz **PNF** vor, sofern B keine Quantoren enthält.

Im bereinigten Fall sprechen wir von einer **bereinigten PNF**, oder kurz **BPF**.

Satz

Jede Formel $A \in \mathbf{FO}(S)$ besitzt eine äquivalente Formel B in BPF.

Beweis.

Verwende die logischen Äquivalenzen von Folie 124, HA

Pränex- und Skolem¹⁵ Normalform

Definition

Ist B quantorenfrei, so nennt man eine Formel $A \in \mathbf{FO}(\mathcal{S})$ der Form

$$Q_0 y_0 Q_1 y_1 \dots Q_{n-1} y_{n-1} B$$

mit $Q_i \in \{\forall, \exists\}$, $i < n$, eine

¹⁵Thoralf Albert Skolem (1887–1963)

Pränex- und Skolem¹⁵ Normalform

Definition

Ist B quantorenfrei, so nennt man eine Formel $A \in \mathbf{FO}(\mathcal{S})$ der Form

$$Q_0 y_0 Q_1 y_1 \dots Q_{n-1} y_{n-1} B$$

mit $Q_i \in \{\forall, \exists\}$, $i < n$, eine

- **Pränex-Normalform** oder kurz **PNF**; im bereinigten Fall spricht man von einer **bPNF** (BPF in früheren Folien);

¹⁵Thoralf Albert Skolem (1887–1963)

Pränex- und Skolem¹⁵ Normalform

Definition

Ist B quantorenfrei, so nennt man eine Formel $A \in \mathbf{FO}(\mathcal{S})$ der Form

$$Q_0 y_0 Q_1 y_1 \dots Q_{n-1} y_{n-1} B$$

mit $Q_i \in \{\forall, \exists\}$, $i < n$, eine

- **Pränex-Normalform** oder kurz **PNF**; im bereinigten Fall spricht man von einer **bPNF** (BPF in früheren Folien);
- **Skolem-Normalform** oder kurz **SNF**, falls es sich um eine bPNF ohne Existenzquantoren handelt, d.h., $Q_i = \forall$ für $i < n$

¹⁵Thoralf Albert Skolem (1887–1963)

Pränex- und Skolem¹⁵ Normalform

Definition

Ist B quantorenfrei, so nennt man eine Formel $A \in \mathbf{FO}(\mathcal{S})$ der Form

$$Q_0 y_0 Q_1 y_1 \dots Q_{n-1} y_{n-1} B$$

mit $Q_i \in \{\forall, \exists\}$, $i < n$, eine

- **Pränex-Normalform** oder kurz **PNF**; im bereinigten Fall spricht man von einer **bPNF** (BPF in früheren Folien);
- **Skolem-Normalform** oder kurz **SNF**, falls es sich um eine bPNF ohne Existenzquantoren handelt, d.h., $Q_i = \forall$ für $i < n$

Mit den logischen Äquivalenzen auf Folie 124 sieht man leicht (HA):

¹⁵Thoralf Albert Skolem (1887–1963)

Pränex- und Skolem¹⁵ Normalform

Definition

Ist B quantorenfrei, so nennt man eine Formel $A \in \mathbf{FO}(\mathcal{S})$ der Form

$$Q_0 y_0 Q_1 y_1 \dots Q_{n-1} y_{n-1} B$$

mit $Q_i \in \{\forall, \exists\}$, $i < n$, eine

- **Pränex-Normalform** oder kurz **PNF**; im bereinigten Fall spricht man von einer **bPNF** (BPF in früheren Folien);
- **Skolem-Normalform** oder kurz **SNF**, falls es sich um eine bPNF ohne Existenzquantoren handelt, d.h., $Q_i = \forall$ für $i < n$

Mit den logischen Äquivalenzen auf Folie 124 sieht man leicht (HA):

Satz

Jede Formel $A \in \mathbf{FO}(\mathcal{S})$ besitzt eine äquivalente Formel B in bPNF. \square

¹⁵Thoralf Albert Skolem (1887–1963)

Vorüberlegung zur Skolemisierung

Ziel: Die Existenzquantoren aus einer zu $A \in \mathbf{FO}(\mathcal{S})$ äquivalenten bPNF

$$B = Q_0 y_0 Q_1 y_1 \dots Q_{n-1} y_{n-1} C$$

so entfernen, dass zumindest eine **erfüllbarkeitsäquivalente** Formel entsteht;

Vorüberlegung zur Skolemisierung

Ziel: Die Existenzquantoren aus einer zu $A \in \mathbf{FO}(\mathcal{S})$ äquivalenten bPNF

$$B = Q_0 y_0 Q_1 y_1 \dots Q_{n-1} y_{n-1} C$$

so entfernen, dass zumindest eine **erfüllbarkeitsäquivalente** Formel entsteht;
am zweckmäßigsten (aber nicht zwingend) **von außen nach innen**.

Vorüberlegung zur Skolemisierung

Ziel: Die Existenzquantoren aus einer zu $A \in \mathbf{FO}(\mathcal{S})$ äquivalenten bPNF

$$B = Q_0 y_0 Q_1 y_1 \dots Q_{n-1} y_{n-1} C$$

so entfernen, dass zumindest eine **erfüllbarkeitsäquivalente** Formel entsteht;
am zweckmäßigsten (aber nicht zwingend) **von außen nach innen**.

Der erste Existenzquantor möge in Position k von links auftreten:

$$B = \forall y_0 \dots \forall y_{k-1} \exists y_k Q_{k+1} y_{k+1} \dots Q_{n-1} y_{n-1} C$$

Vorüberlegung zur Skolemisierung

Ziel: Die Existenzquantoren aus einer zu $A \in \mathbf{FO}(\mathcal{S})$ äquivalenten bPNF

$$B = Q_0 y_0 Q_1 y_1 \dots Q_{n-1} y_{n-1} C$$

so entfernen, dass zumindest eine **erfüllbarkeitsäquivalente** Formel entsteht;
am zweckmäßigsten (aber nicht zwingend) **von außen nach innen**.

Der erste Existenzquantor möge in Position k von links auftreten:

$$B = \forall y_0 \dots \forall y_{k-1} \exists y_k Q_{k+1} y_{k+1} \dots Q_{n-1} y_{n-1} C$$

Die Variable y_k (bzw. ihr Wert in einem Datenbereich D), deren Existenz verlangt wird, kann von den k zuvor universell quantifizierten Variablen y_i , $i < k$, abhängen, bzw. von den zugeordneten Elementen aus D^k .

Vorüberlegung zur Skolemisierung

Ziel: Die Existenzquantoren aus einer zu $A \in \mathbf{FO}(\mathcal{S})$ äquivalenten bPNF

$$B = Q_0 y_0 Q_1 y_1 \dots Q_{n-1} y_{n-1} C$$

so entfernen, dass zumindest eine **erfüllbarkeitsäquivalente** Formel entsteht;
am zweckmäßigsten (aber nicht zwingend) **von außen nach innen**.

Der erste Existenzquantor möge in Position k von links auftreten:

$$B = \forall y_0 \dots \forall y_{k-1} \exists y_k Q_{k+1} y_{k+1} \dots Q_{n-1} y_{n-1} C$$

Die Variable y_k (bzw. ihr Wert in einem Datenbereich D), deren Existenz verlangt wird, kann von den k zuvor universell quantifizierten Variablen y_i , $i < k$, abhängen, bzw. von den zugeordneten Elementen aus D^k .

Trick: **formal** einen **funktionalen Zusammenhang** zwischen den y_i , $i < k$, und y_k schaffen

Vorüberlegung zur Skolemisierung

Ziel: Die Existenzquantoren aus einer zu $A \in \mathbf{FO}(\mathcal{S})$ äquivalenten bPNF

$$B = Q_0 y_0 Q_1 y_1 \dots Q_{n-1} y_{n-1} C$$

so entfernen, dass zumindest eine **erfüllbarkeitsäquivalente** Formel entsteht;
am zweckmäßigsten (aber nicht zwingend) **von außen nach innen**.

Der erste Existenzquantor möge in Position k von links auftreten:

$$B = \forall y_0 \dots \forall y_{k-1} \exists y_k Q_{k+1} y_{k+1} \dots Q_{n-1} y_{n-1} C$$

Die Variable y_k (bzw. ihr Wert in einem Datenbereich D), deren Existenz verlangt wird, kann von den k zuvor universell quantifizierten Variablen y_i , $i < k$, abhängen, bzw. von den zugeordneten Elementen aus D^k .

Trick: **formal** einen **funktionalen Zusammenhang** zwischen den y_i , $i < k$, und y_k schaffen mittels eines frischen Funktionssymbols $f_{/k} \notin \mathbf{Fun}$:

Vorüberlegung zur Skolemisierung

Ziel: Die Existenzquantoren aus einer zu $A \in \mathbf{FO}(\mathcal{S})$ äquivalenten bPNF

$$B = Q_0 y_0 Q_1 y_1 \dots Q_{n-1} y_{n-1} C$$

so entfernen, dass zumindest eine **erfüllbarkeitsäquivalente** Formel entsteht; **am zweckmäßigsten** (aber nicht zwingend) **von außen nach innen**.

Der erste Existenzquantor möge in Position k von links auftreten:

$$B = \forall y_0 \dots \forall y_{k-1} \exists y_k Q_{k+1} y_{k+1} \dots Q_{n-1} y_{n-1} C$$

Die Variable y_k (bzw. ihr Wert in einem Datenbereich D), deren Existenz verlangt wird, kann von den k zuvor universell quantifizierten Variablen y_i , $i < k$, abhängen, bzw. von den zugeordneten Elementen aus D^k .

Trick: **formal** einen **funktionalen Zusammenhang** zwischen den y_i , $i < k$, und y_k schaffen mittels eines frischen Funktionssymbols $f_{/k} \notin \mathbf{Fun}$: statt B betrachten wir nun in $\mathbf{FO}(\mathcal{S} + \{f_{/k}\})$ die erfüllungsäquivalente Formel

$$\forall y_0 \dots \forall y_{k-1} Q_{k+1} y_{k+1} \dots Q_{n-1} y_{n-1} C \{y_k / f(y_0, \dots, y_{k-1})\}$$

Anmerkungen

Anmerkungen

- Sobald wir uns auf Erfüllbarkeitsäquivalenz anstelle von Äquivalenz konzentrieren, gewinnen wir den Spielraum, die Signatur zu unserem Vorteil zu verändern.

Anmerkungen

- Sobald wir uns auf Erfüllbarkeitsäquivalenz anstelle von Äquivalenz konzentrieren, gewinnen wir den Spielraum, die Signatur zu unserem Vorteil zu verändern. **Insbesondere hat jede Formel A eine minimale endliche Signatur Σ_A , in der sie formuliert werden kann.**

Anmerkungen

- Sobald wir uns auf Erfüllbarkeitsäquivalenz anstelle von Äquivalenz konzentrieren, gewinnen wir den Spielraum, die Signatur zu unserem Vorteil zu verändern. **Insbesondere hat jede Formel A eine minimale endliche Signatur Σ_A , in der sie formuliert werden kann.**
- Weder die Reihenfolge noch die Anzahl der Quantoren in einer (b)PNF B von $A \in \mathbf{FO}(\mathcal{S})$ sind eindeutig bestimmt:

Anmerkungen

- Sobald wir uns auf Erfüllbarkeitsäquivalenz anstelle von Äquivalenz konzentrieren, gewinnen wir den Spielraum, die Signatur zu unserem Vorteil zu verändern. **Insbesondere hat jede Formel A eine minimale endliche Signatur Σ_A , in der sie formuliert werden kann.**
- Weder die Reihenfolge noch die Anzahl der Quantoren in einer (b)PNF B von $A \in \mathbf{FO}(\mathcal{S})$ sind eindeutig bestimmt:
 - Statt Rechenregel (2) auf Folie 124 anzuwenden, liefert Bereinigen und zweimalige Anwendung von (4) eine äquivalente Formel mit zwei Quantoren; hier ist die Anwendung von (2) vorzuziehen.

Anmerkungen

- Sobald wir uns auf Erfüllbarkeitsäquivalenz anstelle von Äquivalenz konzentrieren, gewinnen wir den Spielraum, die Signatur zu unserem Vorteil zu verändern. **Insbesondere hat jede Formel A eine minimale endliche Signatur Σ_A , in der sie formuliert werden kann.**
- Weder die Reihenfolge noch die Anzahl der Quantoren in einer (b)PNF B von $A \in \mathbf{FO}(\mathcal{S})$ sind eindeutig bestimmt:
 - Statt Rechenregel (2) auf Folie 124 anzuwenden, liefert Bereinigen und zweimalige Anwendung von (4) eine äquivalente Formel mit zwei Quantoren; hier ist die Anwendung von (2) vorzuziehen.
 - Falls in (4) die Formel B die Form $Q'y C$ hat, dann können Qx und $Q'y$ durch zweimalige Anwendung von (4) in beliebiger Reihenfolge nach außen gezogen werden, selbst wenn es sich um verschiedene Quantoren handelt.

Anmerkungen

- Sobald wir uns auf Erfüllbarkeitsäquivalenz anstelle von Äquivalenz konzentrieren, gewinnen wir den Spielraum, die Signatur zu unserem Vorteil zu verändern. **Insbesondere hat jede Formel A eine minimale endliche Signatur Σ_A , in der sie formuliert werden kann.**
- Weder die Reihenfolge noch die Anzahl der Quantoren in einer (b)PNF B von $A \in \mathbf{FO}(\mathcal{S})$ sind eindeutig bestimmt:
 - Statt Rechenregel (2) auf Folie 124 anzuwenden, liefert Bereinigen und zweimalige Anwendung von (4) eine äquivalente Formel mit zwei Quantoren; hier ist die Anwendung von (2) vorzuziehen.
 - Falls in (4) die Formel B die Form $Q'y C$ hat, dann können Qx und $Q'y$ durch zweimalige Anwendung von (4) in beliebiger Reihenfolge nach außen gezogen werden, selbst wenn es sich um verschiedene Quantoren handelt.
- Folglich ist nicht einmal die Signatur für Skolemisierungen von $A \in \mathbf{FO}(\mathcal{S})$ eindeutig bestimmt.

Anmerkungen

- Sobald wir uns auf Erfüllbarkeitsäquivalenz anstelle von Äquivalenz konzentrieren, gewinnen wir den Spielraum, die Signatur zu unserem Vorteil zu verändern. **Insbesondere hat jede Formel A eine minimale endliche Signatur Σ_A , in der sie formuliert werden kann.**
- Weder die Reihenfolge noch die Anzahl der Quantoren in einer (b)PNF B von $A \in \mathbf{FO}(S)$ sind eindeutig bestimmt:
 - Statt Rechenregel (2) auf Folie 124 anzuwenden, liefert Bereinigen und zweimalige Anwendung von (4) eine äquivalente Formel mit zwei Quantoren; hier ist die Anwendung von (2) vorzuziehen.
 - Falls in (4) die Formel B die Form $Q'y C$ hat, dann können Qx und $Q'y$ durch zweimalige Anwendung von (4) in beliebiger Reihenfolge nach außen gezogen werden, selbst wenn es sich um verschiedene Quantoren handelt.
- Folglich ist nicht einmal die Signatur für Skolemisierungen von $A \in \mathbf{FO}(S)$ eindeutig bestimmt. Hat man die Wahl, sind Skolemsymbole möglichst geringer Stelligkeit vorzuziehen.

Skolemisierung

Algorithmus

Gegeben $A \in \mathbf{FO}(\mathcal{S})$.

Skolemisierung

Algorithmus

Gegeben $A \in \mathbf{FO}(\mathcal{S})$.

- ▷ Bestimme eine zu A äquivalente bPNF B ; dabei

Skolemisierung

Algorithmus

Gegeben $A \in \mathbf{FO}(\mathcal{S})$.

- ▷ Bestimme eine zu A äquivalente bPNF B ; dabei
 - bevorzuge Regel (2) auf Folie 124 gegenüber Bereinigung und Regel (4);

Skolemisierung

Algorithmus

Gegeben $A \in \mathbf{FO}(\mathcal{S})$.

- ▷ Bestimme eine zu A äquivalente bPNF B ; dabei
 - bevorzuge Regel (2) auf Folie 124 gegenüber Bereinigung und Regel (4);
 - bei Anwendung von Regel (4) auf zwei Formeln mit verschiedenen ersten Quantoren, ziehe Existenz-Quantoren vor Allquantoren nach außen, um die Stelligkeit der später benötigten Skolem-Symbole zu minimieren.

Skolemisierung

Algorithmus

Gegeben $A \in \mathbf{FO}(\mathcal{S})$.

- ▷ Bestimme eine zu A äquivalente bPNF B ; dabei
 - bevorzuge Regel (2) auf Folie 124 gegenüber Bereinigung und Regel (4);
 - bei Anwendung von Regel (4) auf zwei Formeln mit verschiedenen ersten Quantoren, ziehe Existenz-Quantoren vor Allquantoren nach außen, um die Stelligkeit der später benötigten Skolem-Symbole zu minimieren.
- ▷ Eliminiere die Existenz-Quantoren der resultierenden bPNF (etwa von links nach rechts) mit Hilfe passender Skolem-Symbole, die zur Signatur hinzuzufügen sind.

Skolemisierung

Algorithmus

Gegeben $A \in \mathbf{FO}(\mathcal{S})$.

- ▷ Bestimme eine zu A äquivalente bPNF B ; dabei
 - bevorzuge Regel (2) auf Folie 124 gegenüber Bereinigung und Regel (4);
 - bei Anwendung von Regel (4) auf zwei Formeln mit verschiedenen ersten Quantoren, ziehe Existenz-Quantoren vor Allquantoren nach außen, um die Stelligkeit der später benötigten Skolem-Symbole zu minimieren.
- ▷ Eliminiere die Existenz-Quantoren der resultierenden bPNF (etwa von links nach rechts) mit Hilfe passender Skolem-Symbole, die zur Signatur hinzuzufügen sind.

Satz (HA)

Jede bPNF-Formel $B \in \mathbf{FO}(\mathcal{S})$ ist zu ihrer Skolemisierung in $\mathbf{FO}(\mathcal{S} + \mathbf{Sko})$ erfüllbarkeitsäquivalent. □

Das Allgemeingültigkeitsproblem AGP(PL)

Gegeben: $A \in \mathbf{FO}(\mathcal{S})$

Frage: ist A allgemeingültig?

oder äquivalent: ist $\neg A$ unerfüllbar?

Das Allgemeingültigkeitsproblem AGP(PL)

- Gegeben:** $A \in \mathbf{FO}(\mathcal{S})$
Frage: ist A allgemeingültig?
oder äquivalent: ist $\neg A$ unerfüllbar?

Es wird sich zeigen, dass tatsächlich ein Algorithmus existiert, der in endlich vielen Schritten terminiert, wenn $\neg A$ unerfüllbar ist, aber andernfalls nicht notwendig terminiert.

Das Allgemeingültigkeitsproblem AGP(PL)

- Gegeben:** $A \in \mathbf{FO}(\mathcal{S})$
Frage: ist A allgemeingültig?
oder äquivalent: ist $\neg A$ unerfüllbar?

Es wird sich zeigen, dass tatsächlich ein Algorithmus existiert, der in endlich vielen Schritten terminiert, wenn $\neg A$ unerfüllbar ist, aber andernfalls nicht notwendig terminiert. In der Tat existiert kein Algorithmus, der in jedem Fall terminiert.

Das Allgemeingültigkeitsproblem $AGP(PL)$

- Gegeben:** $A \in \mathbf{FO}(\mathcal{S})$
Frage: ist A allgemeingültig?
oder äquivalent: ist $\neg A$ unerfüllbar?

Es wird sich zeigen, dass tatsächlich ein Algorithmus existiert, der in endlich vielen Schritten terminiert, wenn $\neg A$ unerfüllbar ist, aber andernfalls nicht notwendig terminiert. In der Tat existiert kein Algorithmus, der in jedem Fall terminiert. Daher ist $AGP(PL)$, genau wie das Unerfüllbarkeitsproblem für Formelmengen der AL, nur **semi-entscheidbar**.

Das Allgemeingültigkeitsproblem $AGP(PL)$

- Gegeben: $A \in \mathbf{FO}(\mathcal{S})$
Frage: ist A allgemeingültig?
oder äquivalent: ist $\neg A$ unerfüllbar?

Es wird sich zeigen, dass tatsächlich ein Algorithmus existiert, der in endlich vielen Schritten terminiert, wenn $\neg A$ unerfüllbar ist, aber andernfalls nicht notwendig terminiert. In der Tat existiert kein Algorithmus, der in jedem Fall terminiert. Daher ist $AGP(PL)$, genau wie das Unerfüllbarkeitsproblem für Formelmengen der AL, nur **semi-entscheidbar**.

Das offensichtliche Problem bei der Suche nach einem Algorithmus ist die Vielzahl der möglichen \mathcal{S} -Strukturen $\mathcal{M} = \langle D, I \rangle$:

Das Allgemeingültigkeitsproblem $AGP(PL)$

- Gegeben: $A \in \mathbf{FO}(\mathcal{S})$
Frage: ist A allgemeingültig?
oder äquivalent: ist $\neg A$ unerfüllbar?

Es wird sich zeigen, dass tatsächlich ein Algorithmus existiert, der in endlich vielen Schritten terminiert, wenn $\neg A$ unerfüllbar ist, aber andernfalls nicht notwendig terminiert. In der Tat existiert kein Algorithmus, der in jedem Fall terminiert. Daher ist $AGP(PL)$, genau wie das Unerfüllbarkeitsproblem für Formelmengen der AL, nur **semi-entscheidbar**.

Das offensichtliche Problem bei der Suche nach einem Algorithmus ist die Vielzahl der möglichen \mathcal{S} -Strukturen $\mathcal{M} = \langle D, I \rangle$:

- die Mächtigkeit des Datenbereichs D ist unbeschränkt;

Das Allgemeingültigkeitsproblem $AGP(PL)$

- Gegeben: $A \in \mathbf{FO}(\mathcal{S})$
Frage: ist A allgemeingültig?
oder äquivalent: ist $\neg A$ unerfüllbar?

Es wird sich zeigen, dass tatsächlich ein Algorithmus existiert, der in endlich vielen Schritten terminiert, wenn $\neg A$ unerfüllbar ist, aber andernfalls nicht notwendig terminiert. In der Tat existiert kein Algorithmus, der in jedem Fall terminiert. Daher ist $AGP(PL)$, genau wie das Unerfüllbarkeitsproblem für Formelmengen der AL, nur **semi-entscheidbar**.

Das offensichtliche Problem bei der Suche nach einem Algorithmus ist die Vielzahl der möglichen \mathcal{S} -Strukturen $\mathcal{M} = \langle D, I \rangle$:

- die Mächtigkeit des Datenbereichs D ist unbeschränkt;
- wir haben keine Information über I .

Vorarbeiten zur Herbrand¹⁶ Theorie: Konstanten

Zum Glück kann man sich auf einen **kanonischen** Datenbereich beschränken

¹⁶ Jacques Herbrand (1908–1931)

Vorarbeiten zur Herbrand¹⁶ Theorie: Konstanten

Zum Glück kann man sich auf einen **kanonischen** Datenbereich beschränken

- ▷ wenn die Signatur **Fun** mindestens eine Konstante enthält,

¹⁶ Jacques Herbrand (1908–1931)

Vorarbeiten zur Herbrand¹⁶ Theorie: Konstanten

Zum Glück kann man sich auf einen **kanonischen** Datenbereich beschränken

- ▷ wenn die Signatur **Fun** mindestens eine Konstante enthält,
- ▷ und A das Symbol \doteq nicht enthält, geschrieben $A \in \mathbf{FO}^\neq(\mathcal{S})$.

¹⁶ Jacques Herbrand (1908–1931)

Vorarbeiten zur Herbrand¹⁶ Theorie: Konstanten

Zum Glück kann man sich auf einen **kanonischen** Datenbereich beschränken

- ▷ wenn die Signatur **Fun** mindestens eine Konstante enthält,
- ▷ und A das Symbol \doteq nicht enthält, geschrieben $A \in \mathbf{FO}^\neq(\mathcal{S})$.

Beide Bedingungen lassen sich immer erzwingen:

¹⁶ Jacques Herbrand (1908–1931)

Vorarbeiten zur Herbrand¹⁶ Theorie: Konstanten

Zum Glück kann man sich auf einen **kanonischen** Datenbereich beschränken

- ▷ wenn die Signatur **Fun** mindestens eine Konstante enthält,
- ▷ und A das Symbol \doteq nicht enthält, geschrieben $A \in \mathbf{FO}^\neq(\mathcal{S})$.

Beide Bedingungen lassen sich immer erzwingen:

Da die Datenbereiche unserer \mathcal{S} -Strukturen nicht leer sein müssen, können wir einer Signatur $\mathcal{S} = \mathbf{Fun} + \mathbf{Pre}$ ohne Konstanten in **Fun** problemlos eine Konstante c hinzufügen.

¹⁶ Jacques Herbrand (1908–1931)

Vorarbeiten zur Herbrand¹⁶ Theorie: Konstanten

Zum Glück kann man sich auf einen **kanonischen** Datenbereich beschränken

- ▷ wenn die Signatur **Fun** mindestens eine Konstante enthält,
- ▷ und A das Symbol \doteq nicht enthält, geschrieben $A \in \mathbf{FO}^\neq(\mathcal{S})$.

Beide Bedingungen lassen sich immer erzwingen:

Da die Datenbereiche unserer \mathcal{S} -Strukturen nicht leer sein müssen, können wir einer Signatur $\mathcal{S} = \mathbf{Fun} + \mathbf{Pre}$ ohne Konstanten in **Fun** problemlos eine Konstante c hinzufügen. Einerseits gilt

$$\mathbf{FO}(\mathcal{S}) \subseteq \mathbf{FO}(\mathcal{S} + \{c/0\})$$

¹⁶ Jacques Herbrand (1908–1931)

Vorarbeiten zur Herbrand¹⁶ Theorie: Konstanten

Zum Glück kann man sich auf einen **kanonischen** Datenbereich beschränken

- ▷ wenn die Signatur **Fun** mindestens eine Konstante enthält,
- ▷ und A das Symbol \doteq nicht enthält, geschrieben $A \in \mathbf{FO}^\neq(\mathcal{S})$.

Beide Bedingungen lassen sich immer erzwingen:

Da die Datenbereiche unserer \mathcal{S} -Strukturen nicht leer sein müssen, können wir einer Signatur $\mathcal{S} = \mathbf{Fun} + \mathbf{Pre}$ ohne Konstanten in **Fun** problemlos eine Konstante c hinzufügen. Einerseits gilt

$$\mathbf{FO}(\mathcal{S}) \subseteq \mathbf{FO}(\mathcal{S} + \{c/0\})$$

Andererseits hat jede Formel in $B \in \mathbf{FO}(\mathcal{S} + \{c/0\})$, die c enthält, eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel in $\mathbf{FO}(\mathcal{S})$:

¹⁶ Jacques Herbrand (1908–1931)

Vorarbeiten zur Herbrand¹⁶ Theorie: Konstanten

Zum Glück kann man sich auf einen **kanonischen** Datenbereich beschränken

- ▷ wenn die Signatur **Fun** mindestens eine Konstante enthält,
- ▷ und A das Symbol \doteq nicht enthält, geschrieben $A \in \mathbf{FO}^\neq(\mathcal{S})$.

Beide Bedingungen lassen sich immer erzwingen:

Da die Datenbereiche unserer \mathcal{S} -Strukturen nicht leer sein müssen, können wir einer Signatur $\mathcal{S} = \mathbf{Fun} + \mathbf{Pre}$ ohne Konstanten in **Fun** problemlos eine Konstante c hinzufügen. Einerseits gilt

$$\mathbf{FO}(\mathcal{S}) \subseteq \mathbf{FO}(\mathcal{S} + \{c/0\})$$

Andererseits hat jede Formel in $B \in \mathbf{FO}(\mathcal{S} + \{c/0\})$, die c enthält, eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel in $\mathbf{FO}(\mathcal{S})$: OBdA möge B in (b)PNF vorliegen. Für jedes $x \in \mathcal{V} - \mathbf{FV}(B)$ hat die gewünschte Eigenschaft dann

$$\exists x B\{x/c\}^{-1} \in \mathbf{FO}(\mathcal{S})$$

¹⁶ Jacques Herbrand (1908–1931)

Vorarbeiten zur Herbrand Theorie: Eliminierung von \equiv

Ebenso können wir **Pred** um ein binäres Predikat \mathbb{E} erweitern, so dass jede Formel $A \in \mathbf{FO}(\mathcal{S})$, in der \equiv vorkommt, erfüllungsäquivalent zu einer Formel $B \in \mathbf{FO}^\neq(\mathcal{S} + \{\mathbb{E}\})$ ist.

Vorarbeiten zur Herbrand Theorie: Eliminierung von \doteq

Ebenso können wir **Pred** um ein binäres Predikat \mathbb{E} erweitern, so dass jede Formel $A \in \mathbf{FO}(\mathcal{S})$, in der \doteq vorkommt, erfüllungsäquivalent zu einer Formel $B \in \mathbf{FO}^\neq(\mathcal{S} + \{\mathbb{E}\})$ ist.

OBdA möge A in bPNF vorliegen, und Σ_A sei die Minimalsignatur für A . A' entstehe, indem jedes Auftreten von \doteq in A durch \mathbb{E} ersetzt wird, unter Mißbrauch der Notation $A' := A\{\doteq / \mathbb{E}\}$.

Vorarbeiten zur Herbrand Theorie: Eliminierung von \doteq

Ebenso können wir **Pred** um ein binäres Predikat \mathbb{E} erweitern, so dass jede Formel $A \in \mathbf{FO}(\mathcal{S})$, in der \doteq vorkommt, erfüllungsäquivalent zu einer Formel $B \in \mathbf{FO}^\neq(\mathcal{S} + \{\mathbb{E}\})$ ist.

OBdA möge A in bPNF vorliegen, und Σ_A sei die Minimalsignatur für A . A' entstehe, indem jedes Auftreten von \doteq in A durch \mathbb{E} ersetzt wird, unter Mißbrauch der Notation $A' := A\{\doteq / \mathbb{E}\}$.

Jedes Modell \mathcal{M} für A wird zu einem Modell von A' , wenn man $\mathbb{E}^{\mathcal{M}}$ als Gleichheit interpretiert.

Vorarbeiten zur Herbrand Theorie: Eliminierung von \doteq

Ebenso können wir **Pred** um ein binäres Predikat \mathbb{E} erweitern, so dass jede Formel $A \in \mathbf{FO}(\mathcal{S})$, in der \doteq vorkommt, erfüllungsäquivalent zu einer Formel $B \in \mathbf{FO}^\neq(\mathcal{S} + \{\mathbb{E}\})$ ist.

OBdA möge A in bPNF vorliegen, und Σ_A sei die Minimalsignatur für A . A' entstehe, indem jedes Auftreten von \doteq in A durch \mathbb{E} ersetzt wird, unter Mißbrauch der Notation $A' := A\{\doteq / \mathbb{E}\}$.

Jedes Modell \mathcal{M} für A wird zu einem Modell von A' , wenn man $\mathbb{E}^{\mathcal{M}}$ als Gleichheit interpretiert. Aber es kann A' -Modelle geben, in denen das nicht der Fall ist. Die liefern keine Information über die Existenz von A -Modellen.

Vorarbeiten zur Herbrand Theorie: Eliminierung von \doteq

Ebenso können wir **Pred** um ein binäres Predikat \mathbb{E} erweitern, so dass jede Formel $A \in \mathbf{FO}(\mathcal{S})$, in der \doteq vorkommt, erfüllungsäquivalent zu einer Formel $B \in \mathbf{FO}^\neq(\mathcal{S} + \{\mathbb{E}\})$ ist.

OBdA möge A in bPNF vorliegen, und Σ_A sei die Minimalsignatur für A . A' entstehe, indem jedes Auftreten von \doteq in A durch \mathbb{E} ersetzt wird, unter Mißbrauch der Notation $A' := A\{\doteq / \mathbb{E}\}$.

Jedes Modell \mathcal{M} für A wird zu einem Modell von A' , wenn man $\mathbb{E}^{\mathcal{M}}$ als Gleichheit interpretiert. Aber es kann A' -Modelle geben, in denen das nicht der Fall ist. Die liefern keine Information über die Existenz von A -Modellen.

Bilde die die Konjunktion A^\neq von A' mit endlich vielen Formeln, die jede Interpretation von \mathbb{E} zu einer Kongruenzrelation machen bzgl. der Minimal-Signatur für A' . Dann kann jedes Modell für A^\neq nach dieser Relation faktorisiert werden, was ein Modell für A ergibt (HA).

Der Satz von Herbrand

OBdA möge nun **Fun** eine Konstante enthalten und $A \in \mathbf{FO}^{\neq}(\mathcal{S})$ gelten.

Der Satz von Herbrand

OBdA möge nun **Fun** eine Konstante enthalten und $A \in \mathbf{FO}^\neq(\mathcal{S})$ gelten.

Definition

Der Satz von Herbrand

OBdA möge nun **Fun** eine Konstante enthalten und $A \in \mathbf{FO}^\neq(\mathcal{S})$ gelten.

Definition

- Die Unter-**Fun**-Algebra von $\mathbf{Term}(\mathbf{Fun}, \mathcal{V})$ bezeichnen wir mit $D_{\mathcal{H}}$.

Der Satz von Herbrand

OBdA möge nun **Fun** eine Konstante enthalten und $A \in \mathbf{FO}^\neq(\mathcal{S})$ gelten.

Definition

- Die Unter-**Fun**-Algebra von $\mathbf{Term}(\mathbf{Fun}, \mathcal{V})$ bezeichnen wir mit $D_{\mathcal{H}}$.
- Jede \mathcal{S} -Struktur der Form $\mathcal{H} = \langle D_{\mathcal{H}}, I \rangle$ heißt **Herbrand-Struktur**.

Der Satz von Herbrand

OBdA möge nun **Fun** eine Konstante enthalten und $A \in \mathbf{FO}^\neq(\mathcal{S})$ gelten.

Definition

- Die Unter-**Fun**-Algebra von $\mathbf{Term}(\mathbf{Fun}, \mathcal{V})$ bezeichnen wir mit $D_{\mathcal{H}}$.
- Jede \mathcal{S} -Struktur der Form $\mathcal{H} = \langle D_{\mathcal{H}}, I \rangle$ heißt **Herbrand-Struktur**.
- Falls $\mathcal{H} \models A$ nennen wir \mathcal{H} ein **Herbrand-Modell** von A .

Der Satz von Herbrand

OBdA möge nun **Fun** eine Konstante enthalten und $A \in \mathbf{FO}^\neq(\mathcal{S})$ gelten.

Definition

- Die Unter-**Fun**-Algebra von $\mathbf{Term}(\mathbf{Fun}, \mathcal{V})$ bezeichnen wir mit $D_{\mathcal{H}}$.
- Jede \mathcal{S} -Struktur der Form $\mathcal{H} = \langle D_{\mathcal{H}}, I \rangle$ heißt **Herbrand-Struktur**.
- Falls $\mathcal{H} \models A$ nennen wir \mathcal{H} ein **Herbrand-Modell** von A .

Die Interpretation von **Pred** in einer Herbrand-Struktur ist frei wählbar.

Der Satz von Herbrand

OBdA möge nun **Fun** eine Konstante enthalten und $A \in \mathbf{FO}^\neq(\mathcal{S})$ gelten.

Definition

- Die Unter-**Fun**-Algebra von $\mathbf{Term}(\mathbf{Fun}, \mathcal{V})$ bezeichnen wir mit $D_{\mathcal{H}}$.
- Jede \mathcal{S} -Struktur der Form $\mathcal{H} = \langle D_{\mathcal{H}}, I \rangle$ heißt **Herbrand-Struktur**.
- Falls $\mathcal{H} \models A$ nennen wir \mathcal{H} ein **Herbrand-Modell** von A .

Die Interpretation von **Pred** in einer Herbrand-Struktur ist frei wählbar.

Im mathematischen Sinn ist $D_{\mathcal{H}}$ die **freie Fun-Algebra** über \emptyset ; sie ist genau dann nicht leer, wenn mindestens eine Konstante in **Fun** existiert.

Der Satz von Herbrand

OBdA möge nun **Fun** eine Konstante enthalten und $A \in \mathbf{FO}^\neq(\mathcal{S})$ gelten.

Definition

- Die Unter-**Fun**-Algebra von $\mathbf{Term}(\mathbf{Fun}, \mathcal{V})$ bezeichnen wir mit $D_{\mathcal{H}}$.
- Jede \mathcal{S} -Struktur der Form $\mathcal{H} = \langle D_{\mathcal{H}}, I \rangle$ heißt **Herbrand-Struktur**.
- Falls $\mathcal{H} \models A$ nennen wir \mathcal{H} ein **Herbrand-Modell** von A .

Die Interpretation von **Pred** in einer Herbrand-Struktur ist frei wählbar.

Im mathematischen Sinn ist $D_{\mathcal{H}}$ die **freie Fun-Algebra** über \emptyset ; sie ist genau dann nicht leer, wenn mindestens eine Konstante in **Fun** existiert.

Satz (Herbrand)

Für jede Menge $\Gamma \subseteq \mathbf{FO}^\neq(\mathcal{S})$ geschlossener Formeln in SNF gilt:

Γ ist erfüllbar gdw. Γ hat ein Herbrand-Modell

Beweis.

Wenn Γ ein Herbrand-Modell hat, ist Γ natürlich erfüllbar.

Beweis.

Wenn Γ ein Herbrand-Modell hat, ist Γ natürlich erfüllbar.

Ist $\mathcal{M} = \langle D, I \rangle$ ein Modell für Γ , so ist $\langle D, I_{\mathbf{Fun}} \rangle$ eine **Fun**-Algebra. Die leere Abbildung $\emptyset \xrightarrow{z} D$ lässt sich aufgrund des [Rekursionsatzes](#) eindeutig zu einem **Fun**-Homomorphismus $D_{\mathcal{H}} \xrightarrow{\bar{z}} D$ fortsetzen.

Beweis.

Wenn Γ ein Herbrand-Modell hat, ist Γ natürlich erfüllbar.

Ist $\mathcal{M} = \langle D, I \rangle$ ein Modell für Γ , so ist $\langle D, I_{\mathbf{Fun}} \rangle$ eine **Fun**-Algebra. Die leere Abbildung $\emptyset \xrightarrow{z} D$ lässt sich aufgrund des **Rekursionsatzes** eindeutig zu einem **Fun**-Homomorphismus $D_{\mathcal{H}} \xrightarrow{\bar{z}} D$ fortsetzen.

Die \bar{z} -Urbilder der Prädikate $R^{\mathcal{M}}$, $R \in \mathbf{Pred}$, machen $D_{\mathcal{H}}$ zu einer S -Struktur $\mathcal{M}_{\mathcal{H}}$ und \bar{z} zu einem starken **Pred**-Homomorphismus, d.h.,

$$R^{\mathcal{M}_{\mathcal{H}}}(u_0, \dots, u_{\text{ar}(R)-1}) = R^{\mathcal{M}}(\bar{z}(u_0), \dots, \bar{z}(u_{\text{ar}(R)-1}))$$

für alle $u \in D_{\mathcal{H}}^{\text{ar}(R)-1}$.

Beweis.

Wenn Γ ein Herbrand-Modell hat, ist Γ natürlich erfüllbar.

Ist $\mathcal{M} = \langle D, I \rangle$ ein Modell für Γ , so ist $\langle D, I_{\mathbf{Fun}} \rangle$ eine **Fun**-Algebra. Die leere Abbildung $\emptyset \xrightarrow{z} D$ lässt sich aufgrund des **Rekursionsatzes** eindeutig zu einem **Fun**-Homomorphismus $D_{\mathcal{H}} \xrightarrow{\bar{z}} D$ fortsetzen.

Die \bar{z} -Urbilder der Prädikate $R^{\mathcal{M}}$, $R \in \mathbf{Pred}$, machen $D_{\mathcal{H}}$ zu einer S -Struktur $\mathcal{M}_{\mathcal{H}}$ und \bar{z} zu einem starken **Pred**-Homomorphismus, d.h.,

$$R^{\mathcal{M}_{\mathcal{H}}}(u_0, \dots, u_{\text{ar}(R)-1}) = R^{\mathcal{M}}(\bar{z}(u_0), \dots, \bar{z}(u_{\text{ar}(R)-1}))$$

für alle $u \in D_{\mathcal{H}}^{\text{ar}(R)-1}$.

Achtung: Dieselbe Konstruktion angewendet auf die Gleichheit über D liefert nicht notwendig die Gleichheit über $D_{\mathcal{H}}$, sondern i.A. nur eine Äquivalenzrelation.

Beweis.

Wenn Γ ein Herbrand-Modell hat, ist Γ natürlich erfüllbar.

Ist $\mathcal{M} = \langle D, I \rangle$ ein Modell für Γ , so ist $\langle D, I_{\mathbf{Fun}} \rangle$ eine **Fun**-Algebra. Die leere Abbildung $\emptyset \xrightarrow{z} D$ lässt sich aufgrund des **Rekursionsatzes** eindeutig zu einem **Fun**-Homomorphismus $D_{\mathcal{H}} \xrightarrow{\bar{z}} D$ fortsetzen.

Die \bar{z} -Urbilder der Prädikate $R^{\mathcal{M}}$, $R \in \mathbf{Pred}$, machen $D_{\mathcal{H}}$ zu einer S -Struktur $\mathcal{M}_{\mathcal{H}}$ und \bar{z} zu einem starken **Pred**-Homomorphismus, d.h.,

$$R^{\mathcal{M}_{\mathcal{H}}}(u_0, \dots, u_{\mathbf{ar}(R)-1}) = R^{\mathcal{M}}(\bar{z}(u_0), \dots, \bar{z}(u_{\mathbf{ar}(R)-1}))$$

für alle $u \in D_{\mathcal{H}}^{\mathbf{ar}(R)-1}$.

Achtung: Dieselbe Konstruktion angewendet auf die Gleichheit über D liefert nicht notwendig die Gleichheit über $D_{\mathcal{H}}$, sondern i.A. nur eine Äquivalenzrelation. Aus diesem Grund durfte in Γ kein \doteq vorkommen.

Beweis, Fortsetzung.

Als geschlossene Formel hat $A \in \Gamma$ eine von Belegungen unabhängige Semantik.

Beweis, Fortsetzung.

Als geschlossene Formel hat $A \in \Gamma$ eine von Belegungen unabhängige Semantik. Wähle eine Belegung $\sigma \in D^{\mathcal{V}}$ und setze $\tau := \sigma \circ \bar{z} \in (D_{\mathcal{H}})^{\mathcal{V}}$.

Beweis, Fortsetzung.

Als geschlossene Formel hat $A \in \Gamma$ eine von Belegungen unabhängige Semantik. Wähle eine Belegung $\sigma \in D^{\mathcal{V}}$ und setze $\tau := \sigma \circ \bar{z} \in (D_{\mathcal{H}})^{\mathcal{V}}$. Die Quantifikation in A erstrecke sich über die Variablen $x = \langle x_i : i < n \rangle$.

Beweis, Fortsetzung.

Als geschlossene Formel hat $A \in \Gamma$ eine von Belegungen unabhängige Semantik. Wähle eine Belegung $\sigma \in D^{\mathcal{V}}$ und setze $\tau := \sigma \circ \bar{z} \in (D_{\mathcal{H}})^{\mathcal{V}}$. Die Quantifikation in A erstrecke sich über die Variablen $x = \langle x_i : i < n \rangle$. Aufgrund des Substitutionslemmas gilt nun für jedes $u \in (D_{\mathcal{H}})^n$:

Beweis, Fortsetzung.

Als geschlossene Formel hat $A \in \Gamma$ eine von Belegungen unabhängige Semantik. Wähle eine Belegung $\sigma \in D^{\mathcal{V}}$ und setze $\tau := \sigma \circ \bar{z} \in (D_{\mathcal{H}})^{\mathcal{V}}$. Die Quantifikation in A erstreckt sich über die Variablen $x = \langle x_i : i < n \rangle$. Aufgrund des Substitutionslemmas gilt nun für jedes $u \in (D_{\mathcal{H}})^n$:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{H}}[A\{x/u\}](\tau)$$

Beweis, Fortsetzung.

Als geschlossene Formel hat $A \in \Gamma$ eine von Belegungen unabhängige Semantik. Wähle eine Belegung $\sigma \in D^{\mathcal{V}}$ und setze $\tau := \sigma \circ \bar{z} \in (D_{\mathcal{H}})^{\mathcal{V}}$. Die Quantifikation in A erstrecke sich über die Variablen $x = \langle x_i : i < n \rangle$. Aufgrund des Substitutionslemmas gilt nun für jedes $u \in (D_{\mathcal{H}})^n$:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{H}}[A\{x/u\}](\tau) = \mathcal{M}[A\{x/\bar{z}(u)\}](\sigma)$$

Beweis, Fortsetzung.

Als geschlossene Formel hat $A \in \Gamma$ eine von Belegungen unabhängige Semantik. Wähle eine Belegung $\sigma \in D^{\mathcal{V}}$ und setze $\tau := \sigma \circ \bar{z} \in (D_{\mathcal{H}})^{\mathcal{V}}$. Die Quantifikation in A erstrecke sich über die Variablen $x = \langle x_i : i < n \rangle$. Aufgrund des Substitutionslemmas gilt nun für jedes $u \in (D_{\mathcal{H}})^n$:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\mathcal{H}}[A\{x/u\}](\tau) &= \mathcal{M}[A\{x/\bar{z}(u)\}](\sigma) \\ &= \mathcal{M}[A](\sigma\{x/\mathcal{M}[\bar{z}(u)](\sigma)\}) \end{aligned}$$

Beweis, Fortsetzung.

Als geschlossene Formel hat $A \in \Gamma$ eine von Belegungen unabhängige Semantik. Wähle eine Belegung $\sigma \in D^{\mathcal{V}}$ und setze $\tau := \sigma \circ \bar{z} \in (D_{\mathcal{H}})^{\mathcal{V}}$. Die Quantifikation in A erstrecke sich über die Variablen $x = \langle x_i : i < n \rangle$. Aufgrund des Substitutionslemmas gilt nun für jedes $u \in (D_{\mathcal{H}})^n$:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\mathcal{H}}[A\{x/u\}](\tau) &= \mathcal{M}[A\{x/\bar{z}(u)\}](\sigma) \\ &= \mathcal{M}[A](\sigma\{x/\mathcal{M}[\bar{z}(u)](\sigma)\}) = 1 \end{aligned}$$

Beweis, Fortsetzung.

Als geschlossene Formel hat $A \in \Gamma$ eine von Belegungen unabhängige Semantik. Wähle eine Belegung $\sigma \in D^{\mathcal{V}}$ und setze $\tau := \sigma \circ \bar{z} \in (D_{\mathcal{H}})^{\mathcal{V}}$. Die Quantifikation in A erstrecke sich über die Variablen $x = \langle x_i : i < n \rangle$. Aufgrund des Substitutionslemmas gilt nun für jedes $u \in (D_{\mathcal{H}})^n$:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\mathcal{H}}[A\{x/u\}](\tau) &= \mathcal{M}[A\{x/\bar{z}(u)\}](\sigma) \\ &= \mathcal{M}[A](\sigma\{x/\mathcal{M}[\bar{z}(u)](\sigma)\}) = 1 \end{aligned}$$

bzw. in weniger bombastischer Notation

$$\hat{\tau}(A\{x/u\}) = \hat{\sigma}(A\{x/\bar{z}(u)\}) = \sigma\{x/\widehat{\sigma}(\bar{z}(u))\}(A) = 1$$

Beweis, Fortsetzung.

Als geschlossene Formel hat $A \in \Gamma$ eine von Belegungen unabhängige Semantik. Wähle eine Belegung $\sigma \in D^{\mathcal{V}}$ und setze $\tau := \sigma \circ \bar{z} \in (D_{\mathcal{H}})^{\mathcal{V}}$. Die Quantifikation in A erstreckt sich über die Variablen $x = \langle x_i : i < n \rangle$. Aufgrund des Substitutionslemmas gilt nun für jedes $u \in (D_{\mathcal{H}})^n$:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\mathcal{H}}[A\{x/u\}](\tau) &= \mathcal{M}[A\{x/\bar{z}(u)\}](\sigma) \\ &= \mathcal{M}[A](\sigma\{x/\mathcal{M}[\bar{z}(u)](\sigma)\}) = 1 \end{aligned}$$

bzw. in weniger bombastischer Notation

$$\hat{\tau}(A\{x/u\}) = \hat{\sigma}(A\{x/\bar{z}(u)\}) = \sigma\{x/\widehat{\sigma}(\bar{z}(u))\}(A) = 1$$

woraus wir für alle $\rho \in D_{\mathcal{H}}^{\mathcal{V}}$ und alle $\sigma \in D^{\mathcal{V}}$ schließen

Beweis, Fortsetzung.

Als geschlossene Formel hat $A \in \Gamma$ eine von Belegungen unabhängige Semantik. Wähle eine Belegung $\sigma \in D^{\mathcal{V}}$ und setze $\tau := \sigma \circ \bar{z} \in (D_{\mathcal{H}})^{\mathcal{V}}$. Die Quantifikation in A erstreckt sich über die Variablen $x = \langle x_i : i < n \rangle$. Aufgrund des Substitutionslemmas gilt nun für jedes $u \in (D_{\mathcal{H}})^n$:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\mathcal{H}}[A\{x/u\}](\tau) &= \mathcal{M}[A\{x/\bar{z}(u)\}](\sigma) \\ &= \mathcal{M}[A](\sigma\{x/\mathcal{M}[\bar{z}(u)](\sigma)\}) = 1 \end{aligned}$$

bzw. in weniger bombastischer Notation

$$\hat{\tau}(A\{x/u\}) = \hat{\sigma}(A\{x/\bar{z}(u)\}) = \sigma\{x/\widehat{\sigma}(\bar{z}(u))\}(A) = 1$$

woraus wir für alle $\rho \in D_{\mathcal{H}}^{\mathcal{V}}$ und alle $\sigma \in D^{\mathcal{V}}$ schließen

$$\mathcal{M}_{\mathcal{H}}[A] = \mathcal{M}_{\mathcal{H}}[A](\rho) = \mathcal{M}_{\mathcal{H}}[A](\sigma \circ \bar{z}) = \mathcal{M}[A](\sigma) = \mathcal{M}[A] = 1$$

Beweis, Fortsetzung.

Als geschlossene Formel hat $A \in \Gamma$ eine von Belegungen unabhängige Semantik. Wähle eine Belegung $\sigma \in D^{\mathcal{V}}$ und setze $\tau := \sigma \circ \bar{z} \in (D_{\mathcal{H}})^{\mathcal{V}}$. Die Quantifikation in A erstrecke sich über die Variablen $x = \langle x_i : i < n \rangle$. Aufgrund des Substitutionslemmas gilt nun für jedes $u \in (D_{\mathcal{H}})^n$:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\mathcal{H}}[A\{x/u\}](\tau) &= \mathcal{M}[A\{x/\bar{z}(u)\}](\sigma) \\ &= \mathcal{M}[A](\sigma\{x/\mathcal{M}[\bar{z}(u)](\sigma)\}) = 1 \end{aligned}$$

bzw. in weniger bombastischer Notation

$$\hat{\tau}(A\{x/u\}) = \hat{\sigma}(A\{x/\bar{z}(u)\}) = \sigma\{x/\widehat{\sigma}(\bar{z}(u))\}(A) = 1$$

woraus wir für alle $\rho \in D_{\mathcal{H}}^{\mathcal{V}}$ und alle $\sigma \in D^{\mathcal{V}}$ schließen

$$\mathcal{M}_{\mathcal{H}}[A] = \mathcal{M}_{\mathcal{H}}[A](\rho) = \mathcal{M}_{\mathcal{H}}[A](\sigma \circ \bar{z}) = \mathcal{M}[A](\sigma) = \mathcal{M}[A] = 1$$

Damit ist $\mathcal{M}_{\mathcal{H}}$ ein Herbrand-Modell für A , also auch für Γ . □

Satz von Löwenheim¹⁷-Skolem

Satz (Löwenheim 1915; Skolem 1922)

Jede erfüllbare Menge Γ von Formeln hat ein abzählbares Modell.

¹⁷ Leopold Löwenheim (1878–1957)

Satz von Löwenheim¹⁷-Skolem

Satz (Löwenheim 1915; Skolem 1922)

Jede erfüllbare Menge Γ von Formeln hat ein abzählbares Modell.

Beweis.

Γ ist genau dann erfüllbar, wenn das für die Menge Γ' der existenziellen Abschlüsse gilt.

¹⁷ Leopold Löwenheim (1878–1957)

Satz von Löwenheim¹⁷-Skolem

Satz (Löwenheim 1915; Skolem 1922)

Jede erfüllbare Menge Γ von Formeln hat ein abzählbares Modell.

Beweis.

Γ ist genau dann erfüllbar, wenn das für die Menge Γ' der existenziellen Abschlüsse gilt. Nun betrachten wir die Mengen Γ'' derer Skolemisierungen; diese ist ebenfalls erfüllbarkeitsäquivalent zu Γ .

¹⁷ Leopold Löwenheim (1878–1957)

Satz von Löwenheim¹⁷-Skolem

Satz (Löwenheim 1915; Skolem 1922)

Jede erfüllbare Menge Γ von Formeln hat ein abzählbares Modell.

Beweis.

Γ ist genau dann erfüllbar, wenn das für die Menge Γ' der existenziellen Abschlüsse gilt. Nun betrachten wir die Mengen Γ'' derer Skolemisierungen; diese ist ebenfalls erfüllbarkeitsäquivalent zu Γ .

Nun kann in Γ , und damit in Γ'' , das Symbol \doteq vorkommen.

¹⁷ Leopold Löwenheim (1878–1957)

Satz von Löwenheim¹⁷-Skolem

Satz (Löwenheim 1915; Skolem 1922)

Jede erfüllbare Menge Γ von Formeln hat ein abzählbares Modell.

Beweis.

Γ ist genau dann erfüllbar, wenn das für die Menge Γ' der existenziellen Abschlüsse gilt. Nun betrachten wir die Mengen Γ'' derer Skolemisierungen; diese ist ebenfalls erfüllbarkeitsäquivalent zu Γ .

Nun kann in Γ , und damit in Γ'' , das Symbol \doteq vorkommen. Insofern braucht $\mathcal{M}_{\mathcal{H}}$ aus dem obigen Beweis kein Modell von Γ'' zu sein.

¹⁷ Leopold Löwenheim (1878–1957)

Satz von Löwenheim¹⁷-Skolem

Satz (Löwenheim 1915; Skolem 1922)

Jede erfüllbare Menge Γ von Formeln hat ein abzählbares Modell.

Beweis.

Γ ist genau dann erfüllbar, wenn das für die Menge Γ' der existenziellen Abschlüsse gilt. Nun betrachten wir die Mengen Γ'' derer Skolemisierungen; diese ist ebenfalls erfüllbarkeitsäquivalent zu Γ .

Nun kann in Γ , und damit in Γ'' , das Symbol \doteq vorkommen. Insofern braucht $\mathcal{M}_{\mathcal{H}}$ aus dem obigen Beweis kein Modell von Γ'' zu sein. Aber wir können diese Struktur nach dem \bar{z} -Urbild der Gleichheit auf D (und somit einer Kongruenzrelation auf $D_{\mathcal{H}}$) faktorisieren und erhalten so ein Modell für Γ'' und folglich auch für Γ .

¹⁷ Leopold Löwenheim (1878–1957)

Satz von Löwenheim¹⁷-Skolem

Satz (Löwenheim 1915; Skolem 1922)

Jede erfüllbare Menge Γ von Formeln hat ein abzählbares Modell.

Beweis.

Γ ist genau dann erfüllbar, wenn das für die Menge Γ' der existenziellen Abschlüsse gilt. Nun betrachten wir die Mengen Γ'' derer Skolemisierungen; diese ist ebenfalls erfüllbarkeitsäquivalent zu Γ .

Nun kann in Γ , und damit in Γ'' , das Symbol \doteq vorkommen. Insofern braucht $\mathcal{M}_{\mathcal{H}}$ aus dem obigen Beweis kein Modell von Γ'' zu sein. Aber wir können diese Struktur nach dem \bar{z} -Urbild der Gleichheit auf D (und somit einer Kongruenzrelation auf $D_{\mathcal{H}}$) faktorisieren und erhalten so ein Modell für Γ'' und folglich auch für Γ . Aus der Abzählbarkeit von $D_{\mathcal{H}}$ folgt auch die der Quotientenmenge (warum?). □

¹⁷ Leopold Löwenheim (1878–1957)

Herbrand Expansion

Definition

Ist die Formel $A = \forall x_0 \forall x_1 \dots \forall x_{n-1} B \in \mathbf{FO}^\neq(\mathcal{S})$ mit quantorenfreiem B abgeschlossen und in Skolem-Normalform, so ist ihre **Herbrand-Expansion**

$$E(A) := \{ B\{x/t\} : t \in (D_{\mathcal{H}})^n \}$$

Herbrand Expansion

Definition

Ist die Formel $A = \forall x_0 \forall x_1 \dots \forall x_{n-1} B \in \mathbf{FO}^\neq(\mathcal{S})$ mit quantorenfreiem B abgeschlossen und in Skolem-Normalform, so ist ihre **Herbrand-Expansion**

$$E(A) := \{ B\{x/t\} : t \in (D_{\mathcal{H}})^n \}$$

Anschaulich entsteht $E(A)$, indem die Variablen x_i , durch beliebige Terme $t_i \in D_{\mathcal{H}}$, $i < n$, substituiert werden.

Herbrand Expansion

Definition

Ist die Formel $A = \forall x_0 \forall x_1 \dots \forall x_{n-1} B \in \mathbf{FO}^\neq(\mathcal{S})$ mit quantorenfreiem B abgeschlossen und in Skolem-Normalform, so ist ihre **Herbrand-Expansion**

$$E(A) := \{ B\{x/t\} : t \in (D_{\mathcal{H}})^n \}$$

Anschaulich entsteht $E(A)$, indem die Variablen x_i , durch beliebige Terme $t_i \in D_{\mathcal{H}}$, $i < n$, substituiert werden. Analog: $E(\Gamma)$ für Formelmengen.

Herbrand Expansion

Definition

Ist die Formel $A = \forall x_0 \forall x_1 \dots \forall x_{n-1} B \in \mathbf{FO}^\neq(\mathcal{S})$ mit quantorenfreiem B abgeschlossen und in Skolem-Normalform, so ist ihre **Herbrand-Expansion**

$$E(A) := \{ B\{x/t\} : t \in (D_{\mathcal{H}})^n \}$$

Anschaulich entsteht $E(A)$, indem die Variablen x_i , durch beliebige Terme $t_i \in D_{\mathcal{H}}$, $i < n$, substituiert werden. Analog: $E(\Gamma)$ für Formelmengen.

Bemerkung.

Die Formeln in $E(\Gamma)$ enthalten keine Variablen und können somit wie in der AL behandelt werden, mit der Tableau-Methode, oder mittels Resolution, falls jedes $B \in \text{KNF}$.

Herbrand Expansion

Definition

Ist die Formel $A = \forall x_0 \forall x_1 \dots \forall x_{n-1} B \in \mathbf{FO}^\neq(\mathcal{S})$ mit quantorenfreiem B abgeschlossen und in Skolem-Normalform, so ist ihre **Herbrand-Expansion**

$$E(A) := \{ B\{x/t\} : t \in (D_{\mathcal{H}})^n \}$$

Anschaulich entsteht $E(A)$, indem die Variablen x_i , durch beliebige Terme $t_i \in D_{\mathcal{H}}$, $i < n$, substituiert werden. Analog: $E(\Gamma)$ für Formelmengen.

Bemerkung.

Die Formeln in $E(\Gamma)$ enthalten keine Variablen und können somit wie in der AL behandelt werden, mit der Tableau-Methode, oder mittels Resolution, falls jedes $B \in \text{KNF}$. Das **Belegen** der atomaren Formeln in $D_{\mathcal{H}}$ mit Wahrheitswerten aus $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ entspricht dann der Spezifikation einer \mathcal{S} -Struktur auf $D_{\mathcal{H}}$.

Lemma

Belegungen **ATM** $(\mathbf{Pred}, D_{\mathcal{H}}) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{B}$ stehen in bijektiver Beziehung zu Interpretationen der Symbole $R \in \mathbf{Pred}$ als Funktionen $D_{\mathcal{H}}^{\text{ar}(R)} \xrightarrow{I_{\text{Pred}}(R)} \mathbb{B}$.

Lemma

Belegungen $\mathbf{ATM}(\mathbf{Pred}, D_{\mathcal{H}}) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{B}$ stehen in bijektiver Beziehung zu Interpretationen der Symbole $R \in \mathbf{Pred}$ als Funktionen $D_{\mathcal{H}}^{\text{ar}(R)} \xrightarrow{I_{\text{Pred}(R)}} \mathbb{B}$.

Beweis.

$\mathbf{ATM}(\mathbf{Pred}, D_{\mathcal{H}})$ ist die disjunkte Vereinigung der Mengen

$$\{ R(t_0, \dots, t_{\text{ar}(R)-1}) : t \in D_{\mathcal{H}}^{\text{ar}(R)} \}, \quad R \in \mathbf{Pred}$$

mit $\{ t_0 \doteq t_1 : t \in D_{\mathcal{H}}^2 \}$.

Lemma

Belegungen $\mathbf{ATM}(\mathbf{Pred}, D_{\mathcal{H}}) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{B}$ stehen in bijektiver Beziehung zu Interpretationen der Symbole $R \in \mathbf{Pred}$ als Funktionen $D_{\mathcal{H}}^{\mathbf{ar}(R)} \xrightarrow{I_{\mathbf{Pred}}(R)} \mathbb{B}$.

Beweis.

$\mathbf{ATM}(\mathbf{Pred}, D_{\mathcal{H}})$ ist die disjunkte Vereinigung der Mengen

$$\{ R(t_0, \dots, t_{\mathbf{ar}(R)-1}) : t \in D_{\mathcal{H}}^{\mathbf{ar}(R)} \} , R \in \mathbf{Pred}$$

mit $\{ t_0 \doteq t_1 : t \in D_{\mathcal{H}}^2 \}$. Die Einschränkung von φ auf diese Mengen liefert die gewünschte Familie $I_{\mathbf{Pred}}$ von Interpretation via

$$I_{\mathbf{Pred}}(R)(t_0, \dots, t_{\mathbf{ar}(R)-1}) := \varphi(R(t_0, \dots, t_{\mathbf{ar}(R)-1}))$$

Lemma

Belegungen $\mathbf{ATM}(\mathbf{Pred}, D_{\mathcal{H}}) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{B}$ stehen in bijektiver Beziehung zu Interpretationen der Symbole $R \in \mathbf{Pred}$ als Funktionen $D_{\mathcal{H}}^{\mathbf{ar}(R)} \xrightarrow{I_{\mathbf{Pred}}(R)} \mathbb{B}$.

Beweis.

$\mathbf{ATM}(\mathbf{Pred}, D_{\mathcal{H}})$ ist die disjunkte Vereinigung der Mengen

$$\{ R(t_0, \dots, t_{\mathbf{ar}(R)-1}) : t \in D_{\mathcal{H}}^{\mathbf{ar}(R)} \} , R \in \mathbf{Pred}$$

mit $\{ t_0 \doteq t_1 : t \in D_{\mathcal{H}}^2 \}$. Die Einschränkung von φ auf diese Mengen liefert die gewünschte Familie $I_{\mathbf{Pred}}$ von Interpretation via

$$I_{\mathbf{Pred}}(R)(t_0, \dots, t_{\mathbf{ar}(R)-1}) := \varphi(R(t_0, \dots, t_{\mathbf{ar}(R)-1}))$$

Umgekehrt lässt sich aus einer Familie von Interpretation eine Belegung zusammenstückeln. □

Satz von Gödel¹⁸-Herbrand-Skolem

Satz

Für eine Menge $\Gamma \subseteq \mathbf{FO}^{\neq}(\mathcal{S})$ geschlossener Formeln in SNF gilt

Γ ist erfüllbar gdw. $E(\Gamma)$ ist aussagenlogisch erfüllbar

¹⁸ Kurt Gödel (1906–1978)

Satz von Gödel¹⁸-Herbrand-Skolem

Satz

Für eine Menge $\Gamma \subseteq \mathbf{FO}^\neq(\mathcal{S})$ geschlossener Formeln in SNF gilt

Γ ist erfüllbar gdw. $E(\Gamma)$ ist aussagenlogisch erfüllbar

Beweis.

Es genügt nachzuweisen, dass aus der Erfüllbarkeit von $E(\Gamma)$ die Existenz eines Herbrand-Modells folgt.

¹⁸ Kurt Gödel (1906–1978)

Satz von Gödel¹⁸-Herbrand-Skolem

Satz

Für eine Menge $\Gamma \subseteq \mathbf{FO}^\neq(\mathcal{S})$ geschlossener Formeln in SNF gilt

Γ ist erfüllbar gdw. $E(\Gamma)$ ist aussagenlogisch erfüllbar

Beweis.

Es genügt nachzuweisen, dass aus der Erfüllbarkeit von $E(\Gamma)$ die Existenz eines Herbrand-Modells folgt.

Aus einer Belegung φ der atomaren Formeln über $D_{\mathcal{H}}$ erhalten wir nach obigem Lemma eine Interpretation der Prädikatssymbole in $D_{\mathcal{H}}$, und somit eine Herbrand-Struktur $\mathcal{M}_{\mathcal{H}} = \langle D_{\mathcal{H}}, I \rangle$.

¹⁸ Kurt Gödel (1906–1978)

Satz von Gödel¹⁸-Herbrand-Skolem

Satz

Für eine Menge $\Gamma \subseteq \mathbf{FO}^\neq(\mathcal{S})$ geschlossener Formeln in SNF gilt

Γ ist erfüllbar gdw. $E(\Gamma)$ ist aussagenlogisch erfüllbar

Beweis.

Es genügt nachzuweisen, dass aus der Erfüllbarkeit von $E(\Gamma)$ die Existenz eines Herbrand-Modells folgt.

Aus einer Belegung φ der atomaren Formeln über $D_{\mathcal{H}}$ erhalten wir nach obigem Lemma eine Interpretation der Prädikatssymbole in $D_{\mathcal{H}}$, und somit eine Herbrand-Struktur $\mathcal{M}_{\mathcal{H}} = \langle D_{\mathcal{H}}, I \rangle$.

Für $A \in \Gamma$ der Form $\forall x_0 \dots \forall x_{n-1} B$ mit B quantorenfrei, gilt wegen der Geschlossenheit von A unabhängig von jedweder Belegung $\sigma \in D_{\mathcal{H}}^{\forall}$:

¹⁸ Kurt Gödel (1906–1978)

Beweis, Fortsetzung.

$$\hat{\varphi}(C) = 1 \text{ für alle } C \in E(A)$$

Beweis, Fortsetzung.

$$\hat{\varphi}(C) = 1 \text{ für alle } C \in E(A)$$

$$\text{gdw } \mathcal{M}_{\mathcal{H}}[[C]](\sigma) = 1 \text{ für alle } C \in E(A)$$

Beweis, Fortsetzung.

$$\hat{\varphi}(C) = 1 \text{ für alle } C \in E(A)$$

$$\text{gdw } \mathcal{M}_{\mathcal{H}}[C](\sigma) = 1 \text{ für alle } C \in E(A)$$

$$\text{gdw } \mathcal{M}_{\mathcal{H}}[B\{x/t\}](\sigma) = 1 \text{ für alle } t \in (D_{\mathcal{H}})^n$$

Beweis, Fortsetzung.

$$\hat{\varphi}(C) = 1 \text{ für alle } C \in E(A)$$

$$\text{gdw } \mathcal{M}_{\mathcal{H}}[C](\sigma) = 1 \text{ für alle } C \in E(A)$$

$$\text{gdw } \mathcal{M}_{\mathcal{H}}[B\{x/t\}](\sigma) = 1 \text{ für alle } t \in (D_{\mathcal{H}})^n$$

$$\text{gdw } \mathcal{M}_{\mathcal{H}}[B](\sigma\{x/\mathcal{M}_{\mathcal{H}}[t](\sigma)\}) = 1 \text{ für alle } t \in (D_{\mathcal{H}})^n$$

Beweis, Fortsetzung.

$$\hat{\varphi}(C) = 1 \text{ für alle } C \in E(A)$$

$$\text{gdw } \mathcal{M}_{\mathcal{H}}[C](\sigma) = 1 \text{ für alle } C \in E(A)$$

$$\text{gdw } \mathcal{M}_{\mathcal{H}}[B\{x/t\}](\sigma) = 1 \text{ für alle } t \in (D_{\mathcal{H}})^n$$

$$\text{gdw } \mathcal{M}_{\mathcal{H}}[B](\sigma\{x/\mathcal{M}_{\mathcal{H}}[t](\sigma)\}) = 1 \text{ für alle } t \in (D_{\mathcal{H}})^n$$

$$\text{gdw } \mathcal{M}_{\mathcal{H}}[A](\sigma) = 1$$

Beweis, Fortsetzung.

$$\hat{\varphi}(C) = 1 \text{ für alle } C \in E(A)$$

gdw $\mathcal{M}_{\mathcal{H}}[C](\sigma) = 1$ für alle $C \in E(A)$

gdw $\mathcal{M}_{\mathcal{H}}[B\{x/t\}](\sigma) = 1$ für alle $t \in (D_{\mathcal{H}})^n$

gdw $\mathcal{M}_{\mathcal{H}}[B](\sigma\{x/\mathcal{M}_{\mathcal{H}}[t](\sigma)\}) = 1$ für alle $t \in (D_{\mathcal{H}})^n$

gdw $\mathcal{M}_{\mathcal{H}}[A](\sigma) = 1$

gdw $\mathcal{M}_{\mathcal{H}}, \sigma$ ist ein Herbrand-Modell für A

Beweis, Fortsetzung.

$$\hat{\varphi}(C) = 1 \text{ für alle } C \in E(A)$$

$$\text{gdw } \mathcal{M}_{\mathcal{H}}[C](\sigma) = 1 \text{ für alle } C \in E(A)$$

$$\text{gdw } \mathcal{M}_{\mathcal{H}}[B\{x/t\}](\sigma) = 1 \text{ für alle } t \in (D_{\mathcal{H}})^n$$

$$\text{gdw } \mathcal{M}_{\mathcal{H}}[B](\sigma\{x/\mathcal{M}_{\mathcal{H}}[t](\sigma)\}) = 1 \text{ für alle } t \in (D_{\mathcal{H}})^n$$

$$\text{gdw } \mathcal{M}_{\mathcal{H}}[A](\sigma) = 1$$

$$\text{gdw } \mathcal{M}_{\mathcal{H}}, \sigma \text{ ist ein Herbrand-Modell für } A$$

$$\text{gdw } \mathcal{M}_{\mathcal{H}} \text{ ist ein Herbrand-Modell für } A$$

Beweis, Fortsetzung.

$$\hat{\varphi}(C) = 1 \text{ für alle } C \in E(A)$$

$$\text{gdw } \mathcal{M}_{\mathcal{H}}[C](\sigma) = 1 \text{ für alle } C \in E(A)$$

$$\text{gdw } \mathcal{M}_{\mathcal{H}}[B\{x/t\}](\sigma) = 1 \text{ für alle } t \in (D_{\mathcal{H}})^n$$

$$\text{gdw } \mathcal{M}_{\mathcal{H}}[B](\sigma\{x/\mathcal{M}_{\mathcal{H}}[t](\sigma)\}) = 1 \text{ für alle } t \in (D_{\mathcal{H}})^n$$

$$\text{gdw } \mathcal{M}_{\mathcal{H}}[A](\sigma) = 1$$

$$\text{gdw } \mathcal{M}_{\mathcal{H}}, \sigma \text{ ist ein Herbrand-Modell für } A$$

$$\text{gdw } \mathcal{M}_{\mathcal{H}} \text{ ist ein Herbrand-Modell für } A$$

wobei im 3. Schritt das Substitutionslemma zum Tragen kommt.

Beweis, Fortsetzung.

$$\hat{\varphi}(C) = 1 \text{ für alle } C \in E(A)$$

$$\text{gdw } \mathcal{M}_{\mathcal{H}}[C](\sigma) = 1 \text{ für alle } C \in E(A)$$

$$\text{gdw } \mathcal{M}_{\mathcal{H}}[B\{x/t\}](\sigma) = 1 \text{ für alle } t \in (D_{\mathcal{H}})^n$$

$$\text{gdw } \mathcal{M}_{\mathcal{H}}[B](\sigma\{x/\mathcal{M}_{\mathcal{H}}[t](\sigma)\}) = 1 \text{ für alle } t \in (D_{\mathcal{H}})^n$$

$$\text{gdw } \mathcal{M}_{\mathcal{H}}[A](\sigma) = 1$$

$$\text{gdw } \mathcal{M}_{\mathcal{H}}, \sigma \text{ ist ein Herbrand-Modell für } A$$

$$\text{gdw } \mathcal{M}_{\mathcal{H}} \text{ ist ein Herbrand-Modell für } A$$

wobei im 3. Schritt das Substitutionslemma zum Tragen kommt.

In Verbindung mit dem Kompaktheitssatz der Aussagenlogik ergibt sich

Beweis, Fortsetzung.

$$\hat{\varphi}(C) = 1 \text{ für alle } C \in E(A)$$

$$\text{gdw } \mathcal{M}_{\mathcal{H}} \llbracket C \rrbracket (\sigma) = 1 \text{ für alle } C \in E(A)$$

$$\text{gdw } \mathcal{M}_{\mathcal{H}} \llbracket B\{x/t\} \rrbracket (\sigma) = 1 \text{ für alle } t \in (D_{\mathcal{H}})^n$$

$$\text{gdw } \mathcal{M}_{\mathcal{H}} \llbracket B \rrbracket (\sigma\{x/\mathcal{M}_{\mathcal{H}} \llbracket t \rrbracket (\sigma)\}) = 1 \text{ für alle } t \in (D_{\mathcal{H}})^n$$

$$\text{gdw } \mathcal{M}_{\mathcal{H}} \llbracket A \rrbracket (\sigma) = 1$$

$$\text{gdw } \mathcal{M}_{\mathcal{H}}, \sigma \text{ ist ein Herbrand-Modell für } A$$

$$\text{gdw } \mathcal{M}_{\mathcal{H}} \text{ ist ein Herbrand-Modell für } A$$

wobei im 3. Schritt das Substitutionslemma zum Tragen kommt. □

In Verbindung mit dem Kompaktheitssatz der Aussagenlogik ergibt sich

Corollar

Eine Menge $\Gamma \subseteq \mathbf{FO}^{\neq}(\mathcal{S})$ geschlossener Formeln in SNF ist unerfüllbar, genau dann wenn eine endliche Teilmenge von $E(\Gamma)$ unerfüllbar ist.

Algorithmus von Gilmore (ineffizient)

Algorithmus

Eingabe: $\Gamma \subseteq \mathbf{FO}^\neq(\mathcal{S})$ geschlossen und in SNF, $A_i, i \in \mathbb{N}$ Aufzählung von $E(\Gamma)$.

Algorithmus von Gilmore (ineffizient)

Algorithmus

Eingabe: $\Gamma \subseteq \mathbf{FO}^{\neq}(\mathcal{S})$ geschlossen und in SNF, $A_i, i \in \mathbb{N}$ Aufzählung von $E(\Gamma)$.

Algorithmus: Solange $G_n := \bigwedge_{i < n} A_i$ erfüllbar ist, bilde $G_{n+1} = G_n \wedge A_n$.

Algorithmus von Gilmore (ineffizient)

Algorithmus

Eingabe: $\Gamma \subseteq \mathbf{FO}^\neq(\mathcal{S})$ geschlossen und in SNF, $A_i, i \in \mathbb{N}$ Aufzählung von $E(\Gamma)$.

Algorithmus: Solange $G_n := \bigwedge_{i < n} A_i$ erfüllbar ist, bilde $G_{n+1} = G_n \wedge A_n$.
 A ist genau dann unerfüllbar, wenn das Verfahren terminiert.

Algorithmus von Gilmore (ineffizient)

Algorithmus

Eingabe: $\Gamma \subseteq \mathbf{FO}^\neq(\mathcal{S})$ geschlossen und in SNF, $A_i, i \in \mathbb{N}$ Aufzählung von $E(\Gamma)$.

Algorithmus: Solange $G_n := \bigwedge_{i < n} A_i$ erfüllbar ist, bilde $G_{n+1} = G_n \wedge A_n$.
 A ist genau dann unerfüllbar, wenn das Verfahren terminiert.

Der Algorithmus terminiert genau dann, wenn A unerfüllbar ist und liefert dann das korrekte Ergebnis.

Algorithmus von Gilmore (ineffizient)

Algorithmus

Eingabe: $\Gamma \subseteq \mathbf{FO}^\neq(\mathcal{S})$ geschlossen und in SNF, A_i , $i \in \mathbb{N}$ Aufzählung von $E(\Gamma)$.

Algorithmus: Solange $G_n := \bigwedge_{i < n} A_i$ erfüllbar ist, bilde $G_{n+1} = G_n \wedge A_n$.
 A ist genau dann unerfüllbar, wenn das Verfahren terminiert.

Der Algorithmus terminiert genau dann, wenn A unerfüllbar ist und liefert dann das korrekte Ergebnis. Daher ist das $\text{AGP}(\text{PL})$ semi-entscheidbar.

Algorithmus von Gilmore (ineffizient)

Algorithmus

Eingabe: $\Gamma \subseteq \mathbf{FO}^\neq(\mathcal{S})$ geschlossen und in SNF, $A_i, i \in \mathbb{N}$ Aufzählung von $E(\Gamma)$.

Algorithmus: Solange $G_n := \bigwedge_{i < n} A_i$ erfüllbar ist, bilde $G_{n+1} = G_n \wedge A_n$.
 A ist genau dann unerfüllbar, wenn das Verfahren terminiert.

Der Algorithmus terminiert genau dann, wenn A unerfüllbar ist und liefert dann das korrekte Ergebnis. Daher ist das $\text{AGP}(\text{PL})$ semi-entscheidbar.

Achtung: für die Entscheidbarkeit von $\text{AGP}(\text{PL})$ bräuchte man die Semi-Entscheidbarkeit von $\not\models A$, was aber leider nicht zu $\models \neg A$ äquivalent ist; nur letzteres lässt sich mit dem Gilmore-Algorithmus semi-entscheiden.

Algorithmus von Gilmore (ineffizient)

Algorithmus

Eingabe: $\Gamma \subseteq \mathbf{FO}^\neq(\mathcal{S})$ geschlossen und in SNF, $A_i, i \in \mathbb{N}$ Aufzählung von $E(\Gamma)$.

Algorithmus: Solange $G_n := \bigwedge_{i < n} A_i$ erfüllbar ist, bilde $G_{n+1} = G_n \wedge A_n$.
 A ist genau dann unerfüllbar, wenn das Verfahren terminiert.

Der Algorithmus terminiert genau dann, wenn A unerfüllbar ist und liefert dann das korrekte Ergebnis. Daher ist das $\text{AGP}(\text{PL})$ semi-entscheidbar.

Achtung: für die Entscheidbarkeit von $\text{AGP}(\text{PL})$ bräuchte man die Semi-Entscheidbarkeit von $\not\models A$, was aber leider nicht zu $\models \neg A$ äquivalent ist; nur letzteres lässt sich mit dem Gilmore-Algorithmus semi-entscheiden.

Die Begriffe der „Entscheidbarkeit“ und der „Semi-Entscheidbarkeit“ werden offiziell in der VL „Theoretische Informatik 2“ behandelt.

Tableaus in der PL

Um die Tableau-Methode in die PL übertragen, ist die Klassifikation der Formeln aus $\mathbf{FO}^\neq(\mathcal{S})$ zu erweitern:

Tableaus in der PL

Um die Tableau-Methode in die PL übertragen, ist die Klassifikation der Formeln aus $\mathbf{FO}^\neq(\mathcal{S})$ zu erweitern:

Definition

Tableaus in der PL

Um die Tableau-Methode in die PL übertragen, ist die Klassifikation der Formeln aus $\mathbf{FO}^\neq(\mathcal{S})$ zu erweitern:

Definition

- ▷ „Literale“: atomare Formeln und ihre Negationen;

Tableaus in der PL

Um die Tableau-Methode in die PL übertragen, ist die Klassifikation der Formeln aus $\mathbf{FO}^{\neq}(\mathcal{S})$ zu erweitern:

Definition

- ▷ „Literale“: atomare Formeln und ihre Negationen;
- ▷ α : $A \wedge B$, $\neg(A \vee B)$, $\neg(A \rightarrow B)$, $\neg\neg A$;

Tableaus in der PL

Um die Tableau-Methode in die PL übertragen, ist die Klassifikation der Formeln aus $\mathbf{FO}^\neq(\mathcal{S})$ zu erweitern:

Definition

- ▷ „Literale“: atomare Formeln und ihre Negationen;
- ▷ α : $A \wedge B$, $\neg(A \vee B)$, $\neg(A \rightarrow B)$, $\neg\neg A$;
- ▷ β : $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $\neg(A \wedge B)$;

Tableaus in der PL

Um die Tableau-Methode in die PL übertragen, ist die Klassifikation der Formeln aus $\mathbf{FO}^\neq(\mathcal{S})$ zu erweitern:

Definition

- ▷ „Literale“: atomare Formeln und ihre Negationen;
- ▷ α : $A \wedge B$, $\neg(A \vee B)$, $\neg(A \rightarrow B)$, $\neg\neg A$;
- ▷ β : $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $\neg(A \wedge B)$;
- ▷ γ : $\forall x A$, $\neg\exists x A$;

Tableaus in der PL

Um die Tableau-Methode in die PL übertragen, ist die Klassifikation der Formeln aus $\mathbf{FO}^\neq(\mathcal{S})$ zu erweitern:

Definition

- ▷ „Literale“: atomare Formeln und ihre Negationen;
- ▷ α : $A \wedge B$, $\neg(A \vee B)$, $\neg(A \rightarrow B)$, $\neg\neg A$;
- ▷ β : $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $\neg(A \wedge B)$;
- ▷ γ : $\forall x A$, $\neg\exists x A$;
- ▷ δ : $\exists x A$, $\neg\forall x A$.

Tableaus in der PL

Um die Tableau-Methode in die PL übertragen, ist die Klassifikation der Formeln aus $\mathbf{FO}^\neq(\mathcal{S})$ zu erweitern:

Definition

- ▷ „Literale“: atomare Formeln und ihre Negationen;
- ▷ α : $A \wedge B$, $\neg(A \vee B)$, $\neg(A \rightarrow B)$, $\neg\neg A$;
- ▷ β : $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $\neg(A \wedge B)$;
- ▷ γ : $\forall x A$, $\neg\exists x A$;
- ▷ δ : $\exists x A$, $\neg\forall x A$.

Neue Regeln mit $t \in D_{\mathcal{H}}$ bzw. c frische Konstante für den Ast:

$$\frac{\forall x A}{A\{x/t\}} \quad , \quad \frac{\neg\exists x A}{\neg A\{x/t\}} \quad , \quad \frac{\exists x A}{A\{x/c\}} \quad , \quad \frac{\neg\forall x A}{\neg A\{x/c\}}$$

Tableaus in der PL

Um die Tableau-Methode in die PL übertragen, ist die Klassifikation der Formeln aus $\mathbf{FO}^\neq(\mathcal{S})$ zu erweitern:

Definition

- ▷ „Literale“: atomare Formeln und ihre Negationen;
- ▷ α : $A \wedge B$, $\neg(A \vee B)$, $\neg(A \rightarrow B)$, $\neg\neg A$;
- ▷ β : $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $\neg(A \wedge B)$;
- ▷ γ : $\forall x A$, $\neg\exists x A$;
- ▷ δ : $\exists x A$, $\neg\forall x A$.

Neue Regeln mit $t \in D_{\mathcal{H}}$ bzw. c frische Konstante für den Ast:

$$\frac{\forall x A}{A\{x/t\}} \quad , \quad \frac{\neg\exists x A}{\neg A\{x/t\}} \quad , \quad \frac{\exists x A}{A\{x/c\}} \quad , \quad \frac{\neg\forall x A}{\neg A\{x/c\}}$$

Details + Anwendungen: siehe alte Folien.

Resolution in der PL

Gehört die quantorenfreie Formel B der geschlossenen Skolem-Normalform A zu KNF, so auch alle Elemente der Herbrand-Expansion, und deren Konjunktionen. Nun lässt sich die Resolutionsmethode der AL anwenden.

Resolution in der PL

Gehört die quantorenfreie Formel B der geschlossenen Skolem-Normalform A zu KNF, so auch alle Elemente der Herbrand-Expansion, und deren Konjunktionen. Nun lässt sich die Resolutionsmethode der AL anwenden.

Beispiel

$S = \{a/0, f/1; R/1\}$ und $A = \forall x(R(x) \wedge \neg R(f(x)))$ liefert

$$E(A) = \{R(a) \wedge \neg R(f(a)), R(f(a)) \wedge \neg R(f(f(a))), \dots\}$$

Resolution in der PL

Gehört die quantorenfreie Formel B der geschlossenen Skolem-Normalform A zu KNF, so auch alle Elemente der Herbrand-Expansion, und deren Konjunktionen. Nun lässt sich die Resolutionsmethode der AL anwenden.

Beispiel

$S = \{a/0, f/1; R/1\}$ und $A = \forall x(R(x) \wedge \neg R(f(x)))$ liefert

$$E(A) = \{R(a) \wedge \neg R(f(a)), R(f(a)) \wedge \neg R(f(f(a))), \dots\}$$

Die vier Unit-Klauseln der ersten beiden Elemente liefern bereits die leere Resolvente. Damit ist A nicht erfüllbar.

Resolution in der PL

Gehört die quantorenfreie Formel B der geschlossenen Skolem-Normalform A zu KNF, so auch alle Elemente der Herbrand-Expansion, und deren Konjunktionen. Nun lässt sich die Resolutionsmethode der AL anwenden.

Beispiel

$S = \{a/0, f/1; R/1\}$ und $A = \forall x(R(x) \wedge \neg R(f(x)))$ liefert

$$E(A) = \{R(a) \wedge \neg R(f(a)), R(f(a)) \wedge \neg R(f(f(a))), \dots\}$$

Die vier Unit-Klauseln der ersten beiden Elemente liefern bereits die leere Resolvente. Damit ist A nicht erfüllbar.

Idee zur Vermeidung nicht-zielführender Klauseln: $E(\Gamma)$ „verfeinern“, indem man nicht in ganz B sondern nur in „vielversprechende“ Klauseln von B substituiert \implies **Unifikation** (siehe alte Folien)

Der Kompaktheitssatz der PL

Satz

Eine Formelmenge $\Gamma \subseteq \mathbf{FO}(\mathcal{S})$ ist genau dann erfüllbar, wenn sie endlich erfüllbar ist, d.h., wenn jede endliche Teilmenge $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ erfüllbar ist.

Der Kompaktheitssatz der PL

Satz

Eine Formelmenge $\Gamma \subseteq \mathbf{FO}(\mathcal{S})$ ist genau dann erfüllbar, wenn sie endlich erfüllbar ist, d.h., wenn jede endliche Teilmenge $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ erfüllbar ist.

Beweis.

Die Notwendigkeit ist klar.

Der Kompaktheitssatz der PL

Satz

Eine Formelmenge $\Gamma \subseteq \mathbf{FO}(\mathcal{S})$ ist genau dann erfüllbar, wenn sie endlich erfüllbar ist, d.h., wenn jede endliche Teilmenge $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ erfüllbar ist.

Beweis.

Die Notwendigkeit ist klar.

Für die Hinlänglichkeit beschränken wir uns zunächst auf den Fall geschlossener Formeln in Skolem-Normalform ohne \doteq .

Der Kompaktheitssatz der PL

Satz

Eine Formelmenge $\Gamma \subseteq \mathbf{FO}(\mathcal{S})$ ist genau dann erfüllbar, wenn sie endlich erfüllbar ist, d.h., wenn jede endliche Teilmenge $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ erfüllbar ist.

Beweis.

Die Notwendigkeit ist klar.

Für die Hinlänglichkeit beschränken wir uns zunächst auf den Fall geschlossener Formeln in Skolem-Normalform ohne $\dot{=}$. Offenbar ist Γ genau dann erfüllbar, wenn das für $E(\Gamma) := \bigcup \{ E(A) : A \in \Gamma \}$ gilt, was nach dem KPS(AL) zur endlichen Erfüllbarkeit von $E(\Gamma)$ äquivalent ist.

Der Kompaktheitssatz der PL

Satz

Eine Formelmenge $\Gamma \subseteq \mathbf{FO}(\mathcal{S})$ ist genau dann erfüllbar, wenn sie endlich erfüllbar ist, d.h., wenn jede endliche Teilmenge $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ erfüllbar ist.

Beweis.

Die Notwendigkeit ist klar.

Für die Hinlänglichkeit beschränken wir uns zunächst auf den Fall geschlossener Formeln in Skolem-Normalform ohne \doteq . Offenbar ist Γ genau dann erfüllbar, wenn das für $E(\Gamma) := \bigcup \{ E(A) : A \in \Gamma \}$ gilt, was nach dem KPS(AL) zur endlichen Erfüllbarkeit von $E(\Gamma)$ äquivalent ist.

Ist Γ endlich erfüllbar, finden wir zu jeder endlichen Teilmenge $\Delta_0 \subseteq E(\Gamma)$ eine endliche und somit erfüllbare Teilmenge $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ mit $\Delta_0 \subseteq E(\Gamma_0)$.

Der Kompaktheitssatz der PL

Satz

Eine Formelmenge $\Gamma \subseteq \mathbf{FO}(\mathcal{S})$ ist genau dann erfüllbar, wenn sie endlich erfüllbar ist, d.h., wenn jede endliche Teilmenge $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ erfüllbar ist.

Beweis.

Die Notwendigkeit ist klar.

Für die Hinlänglichkeit beschränken wir uns zunächst auf den Fall geschlossener Formeln in Skolem-Normalform ohne $\dot{=}$. Offenbar ist Γ genau dann erfüllbar, wenn das für $E(\Gamma) := \bigcup \{ E(A) : A \in \Gamma \}$ gilt, was nach dem KPS(AL) zur endlichen Erfüllbarkeit von $E(\Gamma)$ äquivalent ist.

Ist Γ endlich erfüllbar, finden wir zu jeder endlichen Teilmenge $\Delta_0 \subseteq E(\Gamma)$ eine endliche und somit erfüllbare Teilmenge $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ mit $\Delta_0 \subseteq E(\Gamma_0)$. Damit ist Δ_0 erfüllbar, und damit ist $E(\Gamma)$ endlich erfüllbar.

Der Kompaktheitssatz der PL

Satz

Eine Formelmenge $\Gamma \subseteq \mathbf{FO}(\mathcal{S})$ ist genau dann erfüllbar, wenn sie endlich erfüllbar ist, d.h., wenn jede endliche Teilmenge $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ erfüllbar ist.

Beweis.

Die Notwendigkeit ist klar.

Für die Hinlänglichkeit beschränken wir uns zunächst auf den Fall geschlossener Formeln in Skolem-Normalform ohne $\dot{=}$. Offenbar ist Γ genau dann erfüllbar, wenn das für $E(\Gamma) := \bigcup \{ E(A) : A \in \Gamma \}$ gilt, was nach dem KPS(AL) zur endlichen Erfüllbarkeit von $E(\Gamma)$ äquivalent ist.

Ist Γ endlich erfüllbar, finden wir zu jeder endlichen Teilmenge $\Delta_0 \subseteq E(\Gamma)$ eine endliche und somit erfüllbare Teilmenge $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ mit $\Delta_0 \subseteq E(\Gamma_0)$. Damit ist Δ_0 erfüllbar, und damit ist $E(\Gamma)$ endlich erfüllbar. Also ist $E(\Gamma)$ nach dem KPS(AL) erfüllbar.

Beweis, Fortsetzung.

Nun betrachte eine beliebige Menge $\Gamma \subseteq \mathbf{FO}(\mathcal{S})$.

Beweis, Fortsetzung.

Nun betrachte eine beliebige Menge $\Gamma \subseteq \mathbf{FO}(\mathcal{S})$.

- (0) alle freien Variablen, die in Formeln in Γ auftreten, werden durch frische Konstanten ersetzt; es ist sicherzustellen, dass mindestens eine Konstante in der neuen Signatur auftritt.

Beweis, Fortsetzung.

Nun betrachte eine beliebige Menge $\Gamma \subseteq \mathbf{FO}(\mathcal{S})$.

- (0) alle freien Variablen, die in Formeln in Γ auftreten, werden durch frische Konstanten ersetzt; es ist sicherzustellen, dass mindestens eine Konstante in der neuen Signatur auftritt.
- (1) In der resultierenden Menge $\Gamma' \subseteq \mathbf{FO}(\mathcal{S} + \mathbf{Con})$ kann noch das Symbol \doteq auftreten. Dies ersetzen wir durch ein binäres Prädikatssymbol \mathbb{E} , und wir erweitern Γ' um neue Formeln, die sicherstellen, dass \mathbb{E} in jeder Struktur als Kongruenz interpretiert werden muß (vergl. HA).

Beweis, Fortsetzung.

Nun betrachte eine beliebige Menge $\Gamma \subseteq \mathbf{FO}(\mathcal{S})$.

- (0) alle freien Variablen, die in Formeln in Γ auftreten, werden durch frische Konstanten ersetzt; es ist sicherzustellen, dass mindestens eine Konstante in der neuen Signatur auftritt.
- (1) In der resultierenden Menge $\Gamma' \subseteq \mathbf{FO}(\mathcal{S} + \mathbf{Con})$ kann noch das Symbol \doteq auftreten. Dies ersetzen wir durch ein binäres Prädikatssymbol \mathbb{E} , und wir erweitern Γ' um neue Formeln, die sicherstellen, dass \mathbb{E} in jeder Struktur als Kongruenz interpretiert werden muß (vergl. HA).
- (2) Die Elemente der resultierenden Menge $\Gamma'' \subseteq \mathbf{FO}^{\neq}(\mathcal{S} + \mathbf{Con} + \{\mathbb{E}\})$ werden in Skolem-Normalform überführt.

Beweis, Fortsetzung.

Nun betrachte eine beliebige Menge $\Gamma \subseteq \mathbf{FO}(\mathcal{S})$.

- (0) alle freien Variablen, die in Formeln in Γ auftreten, werden durch frische Konstanten ersetzt; es ist sicherzustellen, dass mindestens eine Konstante in der neuen Signatur auftritt.
- (1) In der resultierenden Menge $\Gamma' \subseteq \mathbf{FO}(\mathcal{S} + \mathbf{Con})$ kann noch das Symbol \doteq auftreten. Dies ersetzen wir durch ein binäres Prädikatssymbol \mathbb{E} , und wir erweitern Γ' um neue Formeln, die sicherstellen, dass \mathbb{E} in jeder Struktur als Kongruenz interpretiert werden muß (vergl. HA).
- (2) Die Elemente der resultierenden Menge $\Gamma'' \subseteq \mathbf{FO}^{\neq}(\mathcal{S} + \mathbf{Con} + \{\mathbb{E}\})$ werden in Skolem-Normalform überführt.
- (3) Die resultierende Menge $\Gamma''' \subseteq \mathbf{FO}(\mathcal{S} + \mathbf{Con} + \{\mathbb{E}\} + \mathbf{Sko})$ kann nun wie oben behandelt werden. □

Beweis, Fortsetzung.

Nun betrachte eine beliebige Menge $\Gamma \subseteq \mathbf{FO}(\mathcal{S})$.

- (0) alle freien Variablen, die in Formeln in Γ auftreten, werden durch frische Konstanten ersetzt; es ist sicherzustellen, dass mindestens eine Konstante in der neuen Signatur auftritt.
- (1) In der resultierenden Menge $\Gamma' \subseteq \mathbf{FO}(\mathcal{S} + \mathbf{Con})$ kann noch das Symbol \doteq auftreten. Dies ersetzen wir durch ein binäres Prädikatssymbol \mathbb{E} , und wir erweitern Γ' um neue Formeln, die sicherstellen, dass \mathbb{E} in jeder Struktur als Kongruenz interpretiert werden muß (vergl. HA).
- (2) Die Elemente der resultierenden Menge $\Gamma'' \subseteq \mathbf{FO}^{\neq}(\mathcal{S} + \mathbf{Con} + \{\mathbb{E}\})$ werden in Skolem-Normalform überführt.
- (3) Die resultierende Menge $\Gamma''' \subseteq \mathbf{FO}(\mathcal{S} + \mathbf{Con} + \{\mathbb{E}\} + \mathbf{Sko})$ kann nun wie oben behandelt werden. □

Schritt (0) kann als Skolemisierung der existentiellen Abschlüsse aufgefaßt werden.

Nichtstandard-Modelle

Betrachte die Signatur der Arithmetik: $\mathcal{S}_{\text{Arith}} = \{0/0, 1/0, +/2, \cdot/2; </2\}$;

Nichtstandard-Modelle

Betrachte die Signatur der Arithmetik: $\mathcal{S}_{\text{Arith}} = \{0/0, 1/0, +/2, \cdot/2; </2\}$; die intendierte Struktur sind die natürlichen Zahlen \mathbb{N} mit den kanonischen Operationen/Relationen.

Nichtstandard-Modelle

Betrachte die Signatur der Arithmetik: $\mathcal{S}_{\text{Arith}} = \{0/0, 1/0, +/2, \cdot/2; </2\}$; die intendierte Struktur sind die natürlichen Zahlen \mathbb{N} mit den kanonischen Operationen/Relationen.

Ziel: zeigen, dass es „seltsame“ $\mathcal{S}_{\text{Arith}}$ -Strukturen $\mathcal{M}^* = \langle D^*, I^* \rangle$ gibt, die dieselben geschlossenen Formeln erfüllen wie \mathbb{N} mit der kanonischen Interpretation, aber nicht zu \mathbb{N} isomorph sind.

Nichtstandard-Modelle

Betrachte die Signatur der Arithmetik: $\mathcal{S}_{\text{Arith}} = \{0/0, 1/0, +/2, \cdot/2; </2\}$; die intendierte Struktur sind die natürlichen Zahlen \mathbb{N} mit den kanonischen Operationen/Relationen.

Ziel: zeigen, dass es „seltsame“ $\mathcal{S}_{\text{Arith}}$ -Strukturen $\mathcal{M}^* = \langle D^*, I^* \rangle$ gibt, die dieselben geschlossenen Formeln erfüllen wie \mathbb{N} mit der kanonischen Interpretation, aber nicht zu \mathbb{N} isomorph sind.

Solche Modelle heißen **Nichtstandard-Modelle**.

Nichtstandard-Modelle

Betrachte die Signatur der Arithmetik: $\mathcal{S}_{\text{Arith}} = \{0_{/0}, 1_{/0}, +_{/2}, \cdot_{/2}; <_{/2}\}$; die intendierte Struktur sind die natürlichen Zahlen \mathbb{N} mit den kanonischen Operationen/Relationen.

Ziel: zeigen, dass es „seltsame“ $\mathcal{S}_{\text{Arith}}$ -Strukturen $\mathcal{M}^* = \langle D^*, I^* \rangle$ gibt, die dieselben geschlossenen Formeln erfüllen wie \mathbb{N} mit der kanonischen Interpretation, aber nicht zu \mathbb{N} isomorph sind.

Solche Modelle heißen **Nichtstandard-Modelle**.

Einsicht: Wichtige Eigenschaften z.B. der natürlichen Zahlen lassen sich **nicht** in **FO** erfassen.

Nichtstandard-Modelle

Betrachte die Signatur der Arithmetik: $\mathcal{S}_{\text{Arith}} = \{0_{/0}, 1_{/0}, +_{/2}, \cdot_{/2}; <_{/2}\}$; die intendierte Struktur sind die natürlichen Zahlen \mathbb{N} mit den kanonischen Operationen/Relationen.

Ziel: zeigen, dass es „seltsame“ $\mathcal{S}_{\text{Arith}}$ -Strukturen $\mathcal{M}^* = \langle D^*, I^* \rangle$ gibt, die dieselben geschlossenen Formeln erfüllen wie \mathbb{N} mit der kanonischen Interpretation, aber nicht zu \mathbb{N} isomorph sind.

Solche Modelle heißen **Nichtstandard-Modelle**.

Einsicht: Wichtige Eigenschaften z.B. der natürlichen Zahlen lassen sich **nicht** in **FO** erfassen.

Anwendungen:

Nichtstandard-Modelle

Betrachte die Signatur der Arithmetik: $\mathcal{S}_{\text{Arith}} = \{0/0, 1/0, +/2, \cdot/2; </2\}$; die intendierte Struktur sind die natürlichen Zahlen \mathbb{N} mit den kanonischen Operationen/Relationen.

Ziel: zeigen, dass es „seltsame“ $\mathcal{S}_{\text{Arith}}$ -Strukturen $\mathcal{M}^* = \langle D^*, I^* \rangle$ gibt, die dieselben geschlossenen Formeln erfüllen wie \mathbb{N} mit der kanonischen Interpretation, aber nicht zu \mathbb{N} isomorph sind.

Solche Modelle heißen **Nichtstandard-Modelle**.

Einsicht: Wichtige Eigenschaften z.B. der natürlichen Zahlen lassen sich **nicht** in **FO** erfassen.

Anwendungen:

- [Nichtstandard Analysis](#) (Robinson, 1966);

Nichtstandard-Modelle

Betrachte die Signatur der Arithmetik: $\mathcal{S}_{\text{Arith}} = \{0/0, 1/0, +/2, \cdot/2; </2\}$; die intendierte Struktur sind die natürlichen Zahlen \mathbb{N} mit den kanonischen Operationen/Relationen.

Ziel: zeigen, dass es „seltsame“ $\mathcal{S}_{\text{Arith}}$ -Strukturen $\mathcal{M}^* = \langle D^*, I^* \rangle$ gibt, die dieselben geschlossenen Formeln erfüllen wie \mathbb{N} mit der kanonischen Interpretation, aber nicht zu \mathbb{N} isomorph sind.

Solche Modelle heißen **Nichtstandard-Modelle**.

Einsicht: Wichtige Eigenschaften z.B. der natürlichen Zahlen lassen sich **nicht** in **FO** erfassen.

Anwendungen:

- **Nichtstandard Analysis** (Robinson, 1966);
- Computer-Algebra;

Nichtstandard-Modelle

Betrachte die Signatur der Arithmetik: $\mathcal{S}_{\text{Arith}} = \{0/0, 1/0, +/2, \cdot/2; </2\}$; die intendierte Struktur sind die natürlichen Zahlen \mathbb{N} mit den kanonischen Operationen/Relationen.

Ziel: zeigen, dass es „seltsame“ $\mathcal{S}_{\text{Arith}}$ -Strukturen $\mathcal{M}^* = \langle D^*, I^* \rangle$ gibt, die dieselben geschlossenen Formeln erfüllen wie \mathbb{N} mit der kanonischen Interpretation, aber nicht zu \mathbb{N} isomorph sind.

Solche Modelle heißen **Nichtstandard-Modelle**.

Einsicht: Wichtige Eigenschaften z.B. der natürlichen Zahlen lassen sich **nicht** in **FO** erfassen.

Anwendungen:

- **Nichtstandard Analysis** (Robinson, 1966);
- Computer-Algebra;
- Verifikation hybrider Systeme (Zug- und Flugzeugcontroller)

Satz

Es gibt Nicht-Standard-Modelle der Arithmetik.

Satz

Es gibt Nicht-Standard-Modelle der Arithmetik.

Beweis.

Setze $A_n = n \cdot 1 := 1 + \dots + 1 < x$ mit freiem x und

$$\Gamma = \{ A \in \mathbf{FO}(\mathcal{S}_{\text{arith}}) : A \text{ geschlossen, und } \mathbb{N} \models A \} \cup \{ A_i : i \in \mathbb{N} \}$$

Satz

Es gibt Nicht-Standard-Modelle der Arithmetik.

Beweis.

Setze $A_n = n \cdot 1 := 1 + \dots + 1 < x$ mit freiem x und

$$\Gamma = \{ A \in \mathbf{FO}(\mathcal{S}_{\text{arith}}) : A \text{ geschlossen, und } \mathbb{N} \models A \} \cup \{ A_i : i \in \mathbb{N} \}$$

Offenbar ist jede endliche Teilmenge von Γ erfüllbar, nämlich im Standard-Modell \mathbb{N} : da nur endlich viele Formeln der Form A_i vorkommen, findet man einen hinreichend großen Wert für x .

Satz

Es gibt Nicht-Standard-Modelle der Arithmetik.

Beweis.

Setze $A_n = n \cdot 1 := 1 + \dots + 1 < x$ mit freiem x und

$$\Gamma = \{ A \in \mathbf{FO}(\mathcal{S}_{\text{arith}}) : A \text{ geschlossen, und } \mathbb{N} \models A \} \cup \{ A_i : i \in \mathbb{N} \}$$

Offenbar ist jede endliche Teilmenge von Γ erfüllbar, nämlich im Standard-Modell \mathbb{N} : da nur endlich viele Formeln der Form A_i vorkommen, findet man einen hinreichend großen Wert für x .

Jedes Modell \mathcal{M}^* von Γ muß

Satz

Es gibt Nicht-Standard-Modelle der Arithmetik.

Beweis.

Setze $A_n = n \cdot 1 := 1 + \dots + 1 < x$ mit freiem x und

$$\Gamma = \{ A \in \mathbf{FO}(\mathcal{S}_{\text{arith}}) : A \text{ geschlossen, und } \mathbb{N} \models A \} \cup \{ A_i : i \in \mathbb{N} \}$$

Offenbar ist jede endliche Teilmenge von Γ erfüllbar, nämlich im Standard-Modell \mathbb{N} : da nur endlich viele Formeln der Form A_i vorkommen, findet man einen hinreichend großen Wert für x .

Jedes Modell \mathcal{M}^* von Γ muß

- ▷ alle geschlossenen in \mathbb{N} gültigen $\mathcal{S}_{\text{arith}}$ -Formeln erfüllen,

Satz

Es gibt Nicht-Standard-Modelle der Arithmetik.

Beweis.

Setze $A_n = n \cdot 1 := 1 + \dots + 1 < x$ mit freiem x und

$$\Gamma = \{ A \in \mathbf{FO}(\mathcal{S}_{\text{arith}}) : A \text{ geschlossen, und } \mathbb{N} \models A \} \cup \{ A_i : i \in \mathbb{N} \}$$

Offenbar ist jede endliche Teilmenge von Γ erfüllbar, nämlich im Standard-Modell \mathbb{N} : da nur endlich viele Formeln der Form A_i vorkommen, findet man einen hinreichend großen Wert für x .

Jedes Modell \mathcal{M}^* von Γ muß

- ▷ alle geschlossenen in \mathbb{N} gültigen $\mathcal{S}_{\text{arith}}$ -Formeln erfüllen,
- ▷ ein bzgl. $I^*(<)$ größtes Element haben, was $\mathcal{M}^* \not\models \mathbb{N}$ impliziert

Satz

Es gibt Nicht-Standard-Modelle der Arithmetik.

Beweis.

Setze $A_n = n \cdot 1 := 1 + \dots + 1 < x$ mit freiem x und

$$\Gamma = \{ A \in \mathbf{FO}(\mathcal{S}_{\text{arith}}) : A \text{ geschlossen, und } \mathbb{N} \models A \} \cup \{ A_i : i \in \mathbb{N} \}$$

Offenbar ist jede endliche Teilmenge von Γ erfüllbar, nämlich im Standard-Modell \mathbb{N} : da nur endlich viele Formeln der Form A_i vorkommen, findet man einen hinreichend großen Wert für x .

Jedes Modell \mathcal{M}^* von Γ muß

- ▷ alle geschlossenen in \mathbb{N} gültigen $\mathcal{S}_{\text{arith}}$ -Formeln erfüllen,
- ▷ ein bzgl. $I^*(<)$ größtes Element haben, was $\mathcal{M}^* \not\models \mathbb{N}$ impliziert

Daher lassen sich \mathbb{N} und \mathcal{M}^* **nicht** durch geschlossene $\mathcal{S}_{\text{arith}}$ -Formeln unterscheiden. □

Skolems Paradox

Die übliche Mengenlehre (Anhang C) ist ein Modell für die dortigen Axiom-Schemata. Nach dem Satz von Löwenheim-Skolem muß es also auch ein **abzählbares Modell \mathcal{M}_{LS} von ZFC** geben.

Skolems Paradox

Die übliche Mengenlehre (Anhang C) ist ein Modell für die dortigen Axiom-Schemata. Nach dem Satz von Löwenheim-Skolem muß es also auch ein **abzählbares Modell \mathcal{M}_{LS} von ZFC** geben.

Gemäß Anhang zur Abzählbarkeit ist im Standardmodell der Mengenlehre die Potenzmenge von \mathbb{N} überabzählbar.

Skolems Paradox

Die übliche Mengenlehre (Anhang C) ist ein Modell für die dortigen Axiom-Schemata. Nach dem Satz von Löwenheim-Skolem muß es also auch ein **abzählbares Modell \mathcal{M}_{LS} von ZFC** geben.

Gemäß Anhang zur Abzählbarkeit ist im Standardmodell der Mengenlehre die Potenzmenge von \mathbb{N} überabzählbar. In \mathcal{M}_{LS} muß es Objekte N und P geben, die die Rolle der „Menge der natürlichen Zahlen“ bzw. deren „Potenzmenge“ spielen. Weiterhin muß dann P „überabzählbar“ sein.

Skolems Paradox

Die übliche Mengenlehre (Anhang C) ist ein Modell für die dortigen Axiom-Schemata. Nach dem Satz von Löwenheim-Skolem muß es also auch ein **abzählbares Modell \mathcal{M}_{LS} von ZFC** geben.

Gemäß Anhang zur Abzählbarkeit ist im Standardmodell der Mengenlehre die Potenzmenge von \mathbb{N} überabzählbar. In \mathcal{M}_{LS} muß es Objekte N und P geben, die die Rolle der „Menge der natürlichen Zahlen“ bzw. deren „Potenzmenge“ spielen. Weiterhin muß dann P „überabzählbar“ sein.

Warum ist das kein Widerspruch?

Skolems Paradox

Die übliche Mengenlehre (Anhang C) ist ein Modell für die dortigen Axiom-Schemata. Nach dem Satz von Löwenheim-Skolem muß es also auch ein **abzählbares Modell \mathcal{M}_{LS} von ZFC** geben.

Gemäß Anhang zur Abzählbarkeit ist im Standardmodell der Mengenlehre die Potenzmenge von \mathbb{N} überabzählbar. In \mathcal{M}_{LS} muß es Objekte N und P geben, die die Rolle der „Menge der natürlichen Zahlen“ bzw. deren „Potenzmenge“ spielen. Weiterhin muß dann P „überabzählbar“ sein.

Warum ist das kein Widerspruch?

Die „Überabzählbarkeit“ von P in \mathcal{M}_{LS} bedeutet lediglich, dass kein Analogon zu einer „Abbildung“ von P nach N in \mathcal{M}_{LS} „injektiv“ ist.

Skolems Paradox

Die übliche Mengenlehre (Anhang C) ist ein Modell für die dortigen Axiom-Schemata. Nach dem Satz von Löwenheim-Skolem muß es also auch ein **abzählbares Modell \mathcal{M}_{LS} von ZFC** geben.

Gemäß Anhang zur Abzählbarkeit ist im Standardmodell der Mengenlehre die Potenzmenge von \mathbb{N} überabzählbar. In \mathcal{M}_{LS} muß es Objekte N und P geben, die die Rolle der „Menge der natürlichen Zahlen“ bzw. deren „Potenzmenge“ spielen. Weiterhin muß dann P „überabzählbar“ sein.

Warum ist das kein Widerspruch?

Die „Überabzählbarkeit“ von P in \mathcal{M}_{LS} bedeutet lediglich, dass kein Analogon zu einer „Abbildung“ von P nach N in \mathcal{M}_{LS} „injektiv“ ist. Dagegen ist die Abzählbarkeit von \mathcal{M}_{LS} eine Aussage im Standardmodell der Mengenlehre und kann insofern gar nicht mit der „Überabzählbarkeit“ in \mathcal{M}_{LS} in Beziehung gesetzt werden.

Skolems Paradox

Die übliche Mengenlehre (Anhang C) ist ein Modell für die dortigen Axiom-Schemata. Nach dem Satz von Löwenheim-Skolem muß es also auch ein **abzählbares Modell \mathcal{M}_{LS} von ZFC** geben.

Gemäß Anhang zur Abzählbarkeit ist im Standardmodell der Mengenlehre die Potenzmenge von \mathbb{N} überabzählbar. In \mathcal{M}_{LS} muß es Objekte N und P geben, die die Rolle der „Menge der natürlichen Zahlen“ bzw. deren „Potenzmenge“ spielen. Weiterhin muß dann P „überabzählbar“ sein.

Warum ist das kein Widerspruch?

Die „Überabzählbarkeit“ von P in \mathcal{M}_{LS} bedeutet lediglich, dass kein Analogon zu einer „Abbildung“ von P nach N in \mathcal{M}_{LS} „injektiv“ ist. Dagegen ist die Abzählbarkeit von \mathcal{M}_{LS} eine Aussage im Standardmodell der Mengenlehre und kann insofern gar nicht mit der „Überabzählbarkeit“ in \mathcal{M}_{LS} in Beziehung gesetzt werden. Ein Problem entsteht erst dann, wenn man beide Modelle unzulässig vermischt (Anführungszeichen weglässt).

Logische Folgerung in der PL (vergl. Folie 121f)

Lemma

Logische Folgerung in der PL (vergl. Folie 121f)

Lemma

(0) $\Gamma \models A$ gdw. $\Gamma \cup \{\neg A\}$ nicht erfüllbar.

Logische Folgerung in der PL (vergl. Folie 121f)

Lemma

- (0) $\Gamma \models A$ gdw. $\Gamma \cup \{\neg A\}$ nicht erfüllbar.
- (1) $\emptyset \models A$ bzw. $\models A$ gdw. A allgemeingültig.

Logische Folgerung in der PL (vergl. Folie 121f)

Lemma

- (0) $\Gamma \models A$ gdw. $\Gamma \cup \{\neg A\}$ nicht erfüllbar.
- (1) $\emptyset \models A$ bzw. $\models A$ gdw. A allgemeingültig.
- (2) Γ nicht erf'bar gdw. $\Gamma \models A$ für alle $A \in \mathbf{FO}(\mathcal{S})$ gdw. $\mathbf{FO}(\mathcal{S}) \subseteq \Gamma^{\models}$.

Logische Folgerung in der PL (vergl. Folie 121f)

Lemma

- (0) $\Gamma \models A$ gdw. $\Gamma \cup \{\neg A\}$ nicht erfüllbar.
- (1) $\emptyset \models A$ bzw. $\models A$ gdw. A allgemeingültig.
- (2) Γ nicht erf'bar gdw. $\Gamma \models A$ für alle $A \in \mathbf{FO}(S)$ gdw. $\mathbf{FO}(S) \subseteq \Gamma^{\models}$.
- (3) $A \sqsubseteq B$ gdw. $\models A \rightarrow B$ gdw. $\mathcal{M} \llbracket A \rrbracket (\sigma) \leq \mathcal{M} \llbracket B \rrbracket (\sigma)$, alle \mathcal{M}, σ

Logische Folgerung in der PL (vergl. Folie 121f)

Lemma

- (0) $\Gamma \models A$ gdw. $\Gamma \cup \{\neg A\}$ nicht erfüllbar.
- (1) $\emptyset \models A$ bzw. $\models A$ gdw. A allgemeingültig.
- (2) Γ nicht erf'bar gdw. $\Gamma \models A$ für alle $A \in \mathbf{FO}(S)$ gdw. $\mathbf{FO}(S) \subseteq \Gamma \models$.
- (3) $A \sqsubseteq B$ gdw. $\models A \rightarrow B$ gdw. $\mathcal{M} \llbracket A \rrbracket(\sigma) \leq \mathcal{M} \llbracket B \rrbracket(\sigma)$, alle \mathcal{M}, σ
- (4) $A \equiv B$ gdw. $\models A \leftrightarrow B$ gdw. $\mathcal{M} \llbracket A \rrbracket(\sigma) = \mathcal{M} \llbracket B \rrbracket(\sigma)$, alle \mathcal{M}, σ

Wichtige Sätze zur logischen Folgerung

Betrachte $\Gamma \subseteq \mathbf{FO}(\mathcal{S}) \ni A, B$.

Wichtige Sätze zur logischen Folgerung

Betrachte $\Gamma \subseteq \mathbf{FO}(\mathcal{S}) \ni A, B$.

- $\Gamma \cup \{B\} \models A$ gdw. $\Gamma \models B \rightarrow A$ (**Deduktionstheorem**).

Wichtige Sätze zur logischen Folgerung

Betrachte $\Gamma \subseteq \mathbf{FO}(\mathcal{S}) \ni A, B$.

- $\Gamma \cup \{B\} \models A$ gdw. $\Gamma \models B \rightarrow A$ (**Deduktionstheorem**).
- $\Gamma \models B$ und $\Gamma \models B \rightarrow A$ impliziert $\Gamma \models A$ (**Modus Ponens**).

Wichtige Sätze zur logischen Folgerung

Betrachte $\Gamma \subseteq \mathbf{FO}(\mathcal{S}) \ni A, B$.

- $\Gamma \cup \{B\} \models A$ gdw. $\Gamma \models B \rightarrow A$ (**Deduktionstheorem**).
- $\Gamma \models B$ und $\Gamma \models B \rightarrow A$ impliziert $\Gamma \models A$ (**Modus Ponens**).
- $\Gamma \cup \{B\} \models \neg A$ gdw. $\Gamma \cup \{A\} \models \neg B$ (**Kontraposition**).

Wichtige Sätze zur logischen Folgerung

Betrachte $\Gamma \subseteq \mathbf{FO}(\mathcal{S}) \ni A, B$.

- $\Gamma \cup \{B\} \models A$ gdw. $\Gamma \models B \rightarrow A$ (**Deduktionstheorem**).
- $\Gamma \models B$ und $\Gamma \models B \rightarrow A$ impliziert $\Gamma \models A$ (**Modus Ponens**).
- $\Gamma \cup \{B\} \models \neg A$ gdw. $\Gamma \cup \{A\} \models \neg B$ (**Kontraposition**).
- Falls $x \notin \mathbf{FV}(G)$ für alle $G \in \Gamma$, dann

Wichtige Sätze zur logischen Folgerung

Betrachte $\Gamma \subseteq \mathbf{FO}(\mathcal{S}) \ni A, B$.

- $\Gamma \cup \{B\} \models A$ gdw. $\Gamma \models B \rightarrow A$ (**Deduktionstheorem**).
- $\Gamma \models B$ und $\Gamma \models B \rightarrow A$ impliziert $\Gamma \models A$ (**Modus Ponens**).
- $\Gamma \cup \{B\} \models \neg A$ gdw. $\Gamma \cup \{A\} \models \neg B$ (**Kontraposition**).
- Falls $x \notin \mathbf{FV}(G)$ für alle $G \in \Gamma$, dann
 $\Gamma \models A$ gdw. $\Gamma \models \forall x A$ (**Generalisierung**);

Wichtige Sätze zur logischen Folgerung

Betrachte $\Gamma \subseteq \mathbf{FO}(\mathcal{S}) \ni A, B$.

- $\Gamma \cup \{B\} \models A$ gdw. $\Gamma \models B \rightarrow A$ (**Deduktionstheorem**).
- $\Gamma \models B$ und $\Gamma \models B \rightarrow A$ impliziert $\Gamma \models A$ (**Modus Ponens**).
- $\Gamma \cup \{B\} \models \neg A$ gdw. $\Gamma \cup \{A\} \models \neg B$ (**Kontraposition**).
- Falls $x \notin \mathbf{FV}(G)$ für alle $G \in \Gamma$, dann
 $\Gamma \models A$ gdw. $\Gamma \models \forall x A$ (**Generalisierung**);
 – insbesondere $\{A\} \models \forall x A$, bzw. $\models A \rightarrow \forall x A$, sofern $x \notin \mathbf{FV}(A)$.

Wichtige Sätze zur logischen Folgerung

Betrachte $\Gamma \subseteq \mathbf{FO}(\mathcal{S}) \ni A, B$.

- $\Gamma \cup \{B\} \models A$ gdw. $\Gamma \models B \rightarrow A$ (**Deduktionstheorem**).
- $\Gamma \models B$ und $\Gamma \models B \rightarrow A$ impliziert $\Gamma \models A$ (**Modus Ponens**).
- $\Gamma \cup \{B\} \models \neg A$ gdw. $\Gamma \cup \{A\} \models \neg B$ (**Kontraposition**).
- Falls $x \notin \mathbf{FV}(G)$ für alle $G \in \Gamma$, dann
 $\Gamma \models A$ gdw. $\Gamma \models \forall x A$ (**Generalisierung**);
 – insbesondere $\{A\} \models \forall x A$, bzw. $\models A \rightarrow \forall x A$, sofern $x \notin \mathbf{FV}(A)$.
- Entsteht A' aus A durch erlaubte (beachte Quantoren!) Ersetzung einiger Vorkommen von x durch y , dann
 $\models \forall x \forall y (x \doteq y \rightarrow (A \leftrightarrow A'))$ (**Variante der Kongruenz**)

Beispiel

- $\{\forall x A\} \models A$ folgt mittels Deduktionstheorem aus der Allgemeingültigkeit von $\forall x A \rightarrow A\{x/t\}$ (Folie 127), mit $t = x$.

Beispiel

- $\{\forall x A\} \models A$ folgt mittels Deduktionstheorem aus der Allgemeingültigkeit von $\forall x A \rightarrow A\{x/t\}$ (Folie 127), mit $t = x$.
- Falls $y \in \mathbf{FV}(A)$ braucht $\{A\} \models \forall y A$ i.A. nicht zu gelten:

Beispiel

- $\{\forall x A\} \models A$ folgt mittels Deduktionstheorem aus der Allgemeingültigkeit von $\forall x A \rightarrow A\{x/t\}$ (Folie 127), mit $t = x$.
- Falls $y \in \mathbf{FV}(A)$ braucht $\{A\} \models \forall y A$ i.A. nicht zu gelten:
Für $\mathcal{S} = \{R_{/1}\}$ und $A = R(y)$ betrachte $\mathcal{M} = \langle \{0, 1\}, R^{\mathcal{M}} = \chi_{\{0\}} \rangle$.

Beispiel

- $\{\forall x A\} \models A$ folgt mittels Deduktionstheorem aus der Allgemeingültigkeit von $\forall x A \rightarrow A\{x/t\}$ (Folie 127), mit $t = x$.
- Falls $y \in \mathbf{FV}(A)$ braucht $\{A\} \models \forall y A$ i.A. nicht zu gelten:

Für $\mathcal{S} = \{R_{/1}\}$ und $A = R(y)$ betrachte $\mathcal{M} = \langle \{0, 1\}, R^{\mathcal{M}} = \chi_{\{0\}} \rangle$. Die konstante 0-wertige Belegung $\sigma \in \{0, 1\}^{\mathcal{V}}$ liefert $\mathcal{M} \llbracket A \rrbracket (\sigma) = 1$ aber $\mathcal{M} \llbracket \forall y A \rrbracket (\sigma) = 0$, da auch $\mathcal{M} \llbracket A \rrbracket (\sigma\{x/1\}) = 0$ hierbei zu berücksichtigen ist.

Beispiel

- $\{\forall x A\} \models A$ folgt mittels Deduktionstheorem aus der Allgemeingültigkeit von $\forall x A \rightarrow A\{x/t\}$ (Folie 127), mit $t = x$.
- Falls $y \in \mathbf{FV}(A)$ braucht $\{A\} \models \forall y A$ i.A. nicht zu gelten:

Für $\mathcal{S} = \{R/1\}$ und $A = R(y)$ betrachte $\mathcal{M} = \langle \{0, 1\}, R^{\mathcal{M}} = \chi_{\{0\}} \rangle$. Die konstante 0-wertige Belegung $\sigma \in \{0, 1\}^{\mathcal{V}}$ liefert $\mathcal{M} \models A(\sigma) = 1$ aber $\mathcal{M} \models \forall y A(\sigma) = 0$, da auch $\mathcal{M} \models A(\sigma\{x/1\}) = 0$ hierbei zu berücksichtigen ist.

- $\models \exists x (R(x) \rightarrow \forall x R(x))$:

Beispiel

- $\{\forall x A\} \models A$ folgt mittels Deduktionstheorem aus der Allgemeingültigkeit von $\forall x A \rightarrow A\{x/t\}$ (Folie 127), mit $t = x$.
- Falls $y \in \mathbf{FV}(A)$ braucht $\{A\} \models \forall y A$ i.A. nicht zu gelten:

Für $\mathcal{S} = \{R_{/1}\}$ und $A = R(y)$ betrachte $\mathcal{M} = \langle \{0, 1\}, R^{\mathcal{M}} = \chi_{\{0\}} \rangle$. Die konstante 0-wertige Belegung $\sigma \in \{0, 1\}^{\mathcal{V}}$ liefert $\mathcal{M} \llbracket A \rrbracket (\sigma) = 1$ aber $\mathcal{M} \llbracket \forall y A \rrbracket (\sigma) = 0$, da auch $\mathcal{M} \llbracket A \rrbracket (\sigma\{x/1\}) = 0$ hierbei zu berücksichtigen ist.

- $\models \exists x (R(x) \rightarrow \forall x R(x))$: Die Formel wird in \mathcal{M} als wahr interpretiert, wenn ein $d \in D$ mit $R^{\mathcal{M}}(d) = 0$ existiert, oder wenn $R^{\mathcal{M}}(d) = 1$ für alle $d \in D$ gilt; und eine dieser Alternativen muß eintreten.

Beispiel

- $\{\forall x A\} \models A$ folgt mittels Deduktionstheorem aus der Allgemeingültigkeit von $\forall x A \rightarrow A\{x/t\}$ (Folie 127), mit $t = x$.

- Falls $y \in \mathbf{FV}(A)$ braucht $\{A\} \models \forall y A$ i.A. nicht zu gelten:

Für $\mathcal{S} = \{R_{/1}\}$ und $A = R(y)$ betrachte $\mathcal{M} = \langle \{0, 1\}, R^{\mathcal{M}} = \chi_{\{0\}} \rangle$. Die konstante 0-wertige Belegung $\sigma \in \{0, 1\}^{\mathcal{V}}$ liefert $\mathcal{M} \llbracket A \rrbracket (\sigma) = 1$ aber $\mathcal{M} \llbracket \forall y A \rrbracket (\sigma) = 0$, da auch $\mathcal{M} \llbracket A \rrbracket (\sigma\{x/1\}) = 0$ hierbei zu berücksichtigen ist.

- $\models \exists x (R(x) \rightarrow \forall x R(x))$: Die Formel wird in \mathcal{M} als wahr interpretiert, wenn ein $d \in D$ mit $R^{\mathcal{M}}(d) = 0$ existiert, oder wenn $R^{\mathcal{M}}(d) = 1$ für alle $d \in D$ gilt; und eine dieser Alternativen muß eintreten.
- $\forall x (A \rightarrow B) \models \forall x A \rightarrow \forall x B$, nach DT, RR (2) auf Folie 124 und MP der Aussagenlogik.

Beispiel

- $\models \exists x \forall y A \rightarrow \forall y \exists x A$

Beispiel

- $\models \exists x \forall y A \rightarrow \forall y \exists x A$
gdw. $\exists x \forall y A \models \forall y \exists x A$

Deduktionstheorem

Beispiel

- $\models \exists x \forall y A \rightarrow \forall y \exists x A$

gdw. $\exists x \forall y A \models \forall y \exists x A$

gdw. $\exists x \forall y A \models \exists x A$

Deduktionstheorem

Generalisierungstheorem

Beispiel

- $\models \exists x \forall y A \rightarrow \forall y \exists x A$

gdw. $\exists x \forall y A \models \forall y \exists x A$

gdw. $\exists x \forall y A \models \exists x A$

gdw. $\neg \forall x \neg \forall y A \models \neg \forall x \neg A$

Deduktionstheorem

Generalisierungstheorem

logische Äquivalenz

Beispiel

- $\models \exists x \forall y A \rightarrow \forall y \exists x A$

gdw. $\exists x \forall y A \models \forall y \exists x A$

gdw. $\exists x \forall y A \models \exists x A$

gdw. $\neg \forall x \neg \forall y A \models \neg \forall x \neg A$

gdw. $\forall x \neg A \models \forall x \neg \forall y A$

Deduktionstheorem

Generalisierungstheorem

logische Äquivalenz

Kontraposition

Beispiel

- $\models \exists x \forall y A \rightarrow \forall y \exists x A$

gdw. $\exists x \forall y A \models \forall y \exists x A$

gdw. $\exists x \forall y A \models \exists x A$

gdw. $\neg \forall x \neg \forall y A \models \neg \forall x \neg A$

gdw. $\forall x \neg A \models \forall x \neg \forall y A$

gdw. $\forall x \neg A \models \neg \forall y A$

Deduktionstheorem

Generalisierungstheorem

logische Äquivalenz

Kontraposition

Generalisierungstheorem

Beispiel

- $\models \exists x \forall y A \rightarrow \forall y \exists x A$
 gdw. $\exists x \forall y A \models \forall y \exists x A$ Deduktionstheorem
 gdw. $\exists x \forall y A \models \exists x A$ Generalisierungstheorem
 gdw. $\neg \forall x \neg \forall y A \models \neg \forall x \neg A$ logische Äquivalenz
 gdw. $\forall x \neg A \models \forall x \neg \forall y A$ Kontraposition
 gdw. $\forall x \neg A \models \neg \forall y A$ Generalisierungstheorem
 gdw. $\{\forall x \neg A, \forall y A\}$ nicht erfüllbar Lemma (0)

Beispiel

- $\models \exists x \forall y A \rightarrow \forall y \exists x A$
- gdw. $\exists x \forall y A \models \forall y \exists x A$ Deduktionstheorem
- gdw. $\exists x \forall y A \models \exists x A$ Generalisierungstheorem
- gdw. $\neg \forall x \neg \forall y A \models \neg \forall x \neg A$ logische Äquivalenz
- gdw. $\forall x \neg A \models \forall x \neg \forall y A$ Kontraposition
- gdw. $\forall x \neg A \models \neg \forall y A$ Generalisierungstheorem
- gdw. $\{\forall x \neg A, \forall y A\}$ nicht erfüllbar Lemma (0)
- gdw. $\{\exists y \forall x \neg A, \exists x \forall y A\}$ nicht erfüllbar existentieller Abschluß

Beispiel

- $\models \exists x \forall y A \rightarrow \forall y \exists x A$
- gdw. $\exists x \forall y A \models \forall y \exists x A$ Deduktionstheorem
- gdw. $\exists x \forall y A \models \exists x A$ Generalisierungstheorem
- gdw. $\neg \forall x \neg \forall y A \models \neg \forall x \neg A$ logische Äquivalenz
- gdw. $\forall x \neg A \models \forall x \neg \forall y A$ Kontraposition
- gdw. $\forall x \neg A \models \neg \forall y A$ Generalisierungstheorem
- gdw. $\{\forall x \neg A, \forall y A\}$ nicht erfüllbar Lemma (0)
- gdw. $\{\exists y \forall x \neg A, \exists x \forall y A\}$ nicht erfüllbar existentieller Abschluß
- gdw. $\{\neg \forall y \exists x A, \exists x \forall y A\}$ nicht erfüllbar logische Äquivalenz

Beispiel

- $\models \exists x \forall y A \rightarrow \forall y \exists x A$
 gdw. $\exists x \forall y A \models \forall y \exists x A$ Deduktionstheorem
 gdw. $\exists x \forall y A \models \exists x A$ Generalisierungstheorem
 gdw. $\neg \forall x \neg \forall y A \models \neg \forall x \neg A$ logische Äquivalenz
 gdw. $\forall x \neg A \models \forall x \neg \forall y A$ Kontraposition
 gdw. $\forall x \neg A \models \neg \forall y A$ Generalisierungstheorem
 gdw. $\{\forall x \neg A, \forall y A\}$ nicht erfüllbar Lemma (0)
 gdw. $\{\exists y \forall x \neg A, \exists x \forall y A\}$ nicht erfüllbar existentieller Abschluß
 gdw. $\{\neg \forall y \exists x A, \exists x \forall y A\}$ nicht erfüllbar logische Äquivalenz
 gdw. $\exists x \forall y A \wedge \neg \forall y \exists x A$ nicht erfüllbar

Beispiel

- $\models \exists x \forall y A \rightarrow \forall y \exists x A$
 gdw. $\exists x \forall y A \models \forall y \exists x A$ Deduktionstheorem
 gdw. $\exists x \forall y A \models \exists x A$ Generalisierungstheorem
 gdw. $\neg \forall x \neg \forall y A \models \neg \forall x \neg A$ logische Äquivalenz
 gdw. $\forall x \neg A \models \forall x \neg \forall y A$ Kontraposition
 gdw. $\forall x \neg A \models \neg \forall y A$ Generalisierungstheorem
 gdw. $\{\forall x \neg A, \forall y A\}$ nicht erfüllbar Lemma (0)
 gdw. $\{\exists y \forall x \neg A, \exists x \forall y A\}$ nicht erfüllbar existentieller Abschluß
 gdw. $\{\neg \forall y \exists x A, \exists x \forall y A\}$ nicht erfüllbar logische Äquivalenz
 gdw. $\exists x \forall y A \wedge \neg \forall y \exists x A$ nicht erfüllbar
- $\forall x \forall y (x \doteq y \rightarrow (f(x, y) = g(x) \leftrightarrow f(y, y) = g(x)))$ gilt immer,
 wenn \mathcal{S} Funktionssymbole $f_{/0}$ und $g_{/2}$ enthält.

Anhang A

Ordnungstheorie

Eigenschaften von Relationen

Definition

Eine Relation $R \subseteq X \times X$ heißt

Eigenschaften von Relationen

Definition

Eine Relation $R \subseteq X \times X$ heißt

- **reflexiv**, falls xRx für alle $x \in X$;

Eigenschaften von Relationen

Definition

Eine Relation $R \subseteq X \times X$ heißt

- **reflexiv**, falls xRx für alle $x \in X$;
- **transitiv**, falls aus $xRyRz$ folgt xRy für alle $x, y, z \in X$;

Eigenschaften von Relationen

Definition

Eine Relation $R \subseteq X \times X$ heißt

- **reflexiv**, falls xRx für alle $x \in X$;
- **transitiv**, falls aus $xRyRz$ folgt xRy für alle $x, y, z \in X$;
- **symmetrisch**, falls aus xRy folgt yRx für alle $x, y \in X$;

Eigenschaften von Relationen

Definition

Eine Relation $R \subseteq X \times X$ heißt

- **reflexiv**, falls xRx für alle $x \in X$;
- **transitiv**, falls aus $xRyRz$ folgt xRz für alle $x, y, z \in X$;
- **symmetrisch**, falls aus xRy folgt yRx für alle $x, y \in X$;
- **antisymmetrisch**, falls aus xRy und yRx folgt $x = y$ für alle $x, y \in X$;

Eigenschaften von Relationen

Definition

Eine Relation $R \subseteq X \times X$ heißt

- **reflexiv**, falls xRx für alle $x \in X$;
- **transitiv**, falls aus $xRyRz$ folgt xRy für alle $x, y, z \in X$;
- **symmetrisch**, falls aus xRy folgt yRx für alle $x, y \in X$;
- **antisymmetrisch**, falls aus xRy und yRx folgt $x = y$ für alle $x, y \in X$;
- **linear**, falls xRz oder yRx gilt für alle $x, y \in X$;

Eigenschaften von Relationen

Definition

Eine Relation $R \subseteq X \times X$ heißt

- **reflexiv**, falls xRx für alle $x \in X$;
- **transitiv**, falls aus $xRyRz$ folgt xRy für alle $x, y, z \in X$;
- **symmetrisch**, falls aus xRy folgt yRx für alle $x, y \in X$;
- **antisymmetrisch**, falls aus xRy und yRx folgt $x = y$ für alle $x, y \in X$;
- **linear**, falls xRz oder yRx gilt für alle $x, y \in X$;
- **Äquivalenzrelation**, falls R reflexiv, transitiv und symmetrisch ist;

Eigenschaften von Relationen

Definition

Eine Relation $R \subseteq X \times X$ heißt

- **reflexiv**, falls xRx für alle $x \in X$;
- **transitiv**, falls aus $xRyRz$ folgt xRy für alle $x, y, z \in X$;
- **symmetrisch**, falls aus xRy folgt yRx für alle $x, y \in X$;
- **antisymmetrisch**, falls aus xRy und yRx folgt $x = y$ für alle $x, y \in X$;
- **linear**, falls xRz oder yRx gilt für alle $x, y \in X$;
- **Äquivalenzrelation**, falls R reflexiv, transitiv und symmetrisch ist;
- **Quasi-Ordnung**, falls R reflexiv und transitiv ist;

Eigenschaften von Relationen

Definition

Eine Relation $R \subseteq X \times X$ heißt

- **reflexiv**, falls xRx für alle $x \in X$;
- **transitiv**, falls aus $xRyRz$ folgt xRy für alle $x, y, z \in X$;
- **symmetrisch**, falls aus xRy folgt yRx für alle $x, y \in X$;
- **antisymmetrisch**, falls aus xRy und yRx folgt $x = y$ für alle $x, y \in X$;
- **linear**, falls xRz oder yRx gilt für alle $x, y \in X$;
- **Äquivalenzrelation**, falls R reflexiv, transitiv und symmetrisch ist;
- **Quasi-Ordnung**, falls R reflexiv und transitiv ist;
- **Halb-Ordnung**, falls R reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist.

Eigenschaften von Relationen

Definition

Eine Relation $R \subseteq X \times X$ heißt

- **reflexiv**, falls xRx für alle $x \in X$;
- **transitiv**, falls aus $xRyRz$ folgt xRz für alle $x, y, z \in X$;
- **symmetrisch**, falls aus xRy folgt yRx für alle $x, y \in X$;
- **antisymmetrisch**, falls aus xRy und yRx folgt $x = y$ für alle $x, y \in X$;
- **linear**, falls xRz oder yRx gilt für alle $x, y \in X$;
- **Äquivalenzrelation**, falls R reflexiv, transitiv und symmetrisch ist;
- **Quasi-Ordnung**, falls R reflexiv und transitiv ist;
- **Halb-Ordnung**, falls R reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist.

Weiter sei $R^{\text{op}} := \{ \langle b, a \rangle \in X \times X : \langle a, b \rangle \in R \}$, die zu R **duale** Relation.

Beispiele für Quasi-/Halb-Ordnungen

Beispiel

Beispiele für Quasi-/Halb-Ordnungen

Beispiel

- Die Gleichheit $=$ ist sowohl eine Äquivalenzrelation als auch eine Halbordnung auf jeder Menge X ;

Beispiele für Quasi-/Halb-Ordnungen

Beispiel

- Die Gleichheit $=$ ist sowohl eine Äquivalenzrelation als auch eine Halbordnung auf jeder Menge X ;
- \leq ist eine lineare Halb-Ordnung auf \mathbb{B} , \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{R} ;

Beispiele für Quasi-/Halb-Ordnungen

Beispiel

- Die Gleichheit $=$ ist sowohl eine Äquivalenzrelation als auch eine Halbordnung auf jeder Menge X ;
- \leq ist eine lineare Halb-Ordnung auf \mathbb{B} , \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{R} ;
- \subseteq ist eine Halb-Ordnung auf der Potenzmenge $P(X)$ einer Menge X , i.A. nicht linear;

Beispiele für Quasi-/Halb-Ordnungen

Beispiel

- Die Gleichheit $=$ ist sowohl eine Äquivalenzrelation als auch eine Halbordnung auf jeder Menge X ;
- \leq ist eine lineare Halb-Ordnung auf \mathbb{B} , \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{R} ;
- \subseteq ist eine Halb-Ordnung auf der Potenzmenge $P(X)$ einer Menge X , i.A. nicht linear;
- die Teilbarkeitsrelation $|$ ist eine nicht lineare Halbordnung auf \mathbb{N} ;

Beispiele für Quasi-/Halb-Ordnungen

Beispiel

- Die Gleichheit $=$ ist sowohl eine Äquivalenzrelation als auch eine Halbordnung auf jeder Menge X ;
- \leq ist eine lineare Halb-Ordnung auf \mathbb{B} , \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{R} ;
- \subseteq ist eine Halb-Ordnung auf der Potenzmenge $P(X)$ einer Menge X , i.A. nicht linear;
- die Teilbarkeitsrelation $|$ ist eine nicht lineare Halbordnung auf \mathbb{N} ;
- Jede Abbildung $X \xrightarrow{f} Y$ induziert eine Äquivalenzrelation auf X vermöge $x \sim x'$ gdw. $f(x) = f(x')$;
- Jede Abbildung $X \xrightarrow{f} \langle Y, \leq \rangle$ in eine quasi-geordnete Menge induziert eine Quasi-Ordnung auf X vermöge $x \sqsubseteq x'$ gdw. $f(x) \leq f(x')$;

Ordnungstheoretische Grundbegriffe

Definition

Sei $\langle X, \sqsubseteq \rangle$ eine quasi-geordnete Menge, $Q \subseteq X$ und $x \in X$.

DUALE BEGRIFFE: oberer Abschnitt, $\uparrow Q$, obere Schranke, Q^\uparrow .

Ordnungstheoretische Grundbegriffe

Definition

Sei $\langle X, \sqsubseteq \rangle$ eine quasi-geordnete Menge, $Q \subseteq X$ und $x \in X$.

- Q heißt **unterer Abschnitt**, falls $x \sqsubseteq q \in Q$ immer $x \in Q$ impliziert;

DUALE BEGRIFFE: **oberer Abschnitt**, $\uparrow Q$, **obere Schranke**, Q^\uparrow .

Ordnungstheoretische Grundbegriffe

Definition

Sei $\langle X, \sqsubseteq \rangle$ eine quasi-geordnete Menge, $Q \subseteq X$ und $x \in X$.

- Q heißt **unterer Abschnitt**, falls $x \sqsubseteq q \in Q$ immer $x \in Q$ impliziert;
- der **von Q erzeugte** untere Abschnitt ist

$$\downarrow Q := \{x \in X : \text{es gibt ein } q \in Q \text{ mit } x \sqsubseteq q\}$$

- x heißt **untere Schranke** von Q , falls $x \sqsubseteq q$ für alle $q \in Q$;

DUALE BEGRIFFE: **oberer Abschnitt**, $\uparrow Q$, **obere Schranke**, Q^\uparrow .

Ordnungstheoretische Grundbegriffe

Definition

Sei $\langle X, \sqsubseteq \rangle$ eine quasi-geordnete Menge, $Q \subseteq X$ und $x \in X$.

- Q heißt **unterer Abschnitt**, falls $x \sqsubseteq q \in Q$ immer $x \in Q$ impliziert;
- der **von Q erzeugte** untere Abschnitt ist

$$\downarrow Q := \{x \in X : \text{es gibt ein } q \in Q \text{ mit } x \sqsubseteq q\}$$

- x heißt **untere Schranke** von Q , falls $x \sqsubseteq q$ für alle $q \in Q$;
- Der untere Abschnitt aller unteren Schranken von Q ist

$$Q^\downarrow := \{x \in X : \text{für alle } q \in Q \text{ gilt } x \sqsubseteq q\}$$

DUALE BEGRIFFE: **oberer Abschnitt**, $\uparrow Q$, **obere Schranke**, Q^\uparrow .

Verbände

Definition

In einem \sqcap -Halbverband hat jede endliche Teilmenge eine größte untere Schranke, auch **Infimum** genannt.

Verbände

Definition

In einem \sqcap -Halbverband hat jede endliche Teilmenge eine größte untere Schranke, auch **Infimum** genannt.

DUALER BEGRIFF: \sqcup -Halbverband

Verbände

Definition

In einem \sqcap -Halbverband hat jede endliche Teilmenge eine größte untere Schranke, auch **Infimum** genannt.

DUALER BEGRIFF: \sqcup -Halbverband

In einem **Verband** hat jede endliche Teilmenge eine größte untere und eine kleinste obere Schranke.

Verbände

Definition

In einem \sqcap -Halbverband hat jede endliche Teilmenge eine größte untere Schranke, auch **Infimum** genannt.

DUALER BEGRIFF: \sqcup -Halbverband

In einem **Verband** hat jede endliche Teilmenge eine größte untere und eine kleinste obere Schranke.

Beispiel

Verbände

Definition

In einem \sqcap -Halbverband hat jede endliche Teilmenge eine größte untere Schranke, auch **Infimum** genannt.

DUALER BEGRIFF: \sqcup -Halbverband

In einem **Verband** hat jede endliche Teilmenge eine größte untere und eine kleinste obere Schranke.

Beispiel

- Jede linear geordnete Menge ist ein Verband mit $\sqcap = \min$ und $\sqcup = \max$.

Verbände

Definition

In einem \sqcap -Halbverband hat jede endliche Teilmenge eine größte untere Schranke, auch **Infimum** genannt.

DUALER BEGRIFF: \sqcup -Halbverband

In einem **Verband** hat jede endliche Teilmenge eine größte untere und eine kleinste obere Schranke.

Beispiel

- Jede linear geordnete Menge ist ein Verband mit $\sqcap = \min$ und $\sqcup = \max$.
- Jede Potenzmenge ist ein Verband mit $\sqcap = \cap$ und $\sqcup = \cup$.

Verbände

Definition

In einem \sqcap -Halbverband hat jede endliche Teilmenge eine größte untere Schranke, auch **Infimum** genannt.

DUALER BEGRIFF: \sqcup -Halbverband

In einem **Verband** hat jede endliche Teilmenge eine größte untere und eine kleinste obere Schranke.

Beispiel

- Jede linear geordnete Menge ist ein Verband mit $\sqcap = \min$ und $\sqcup = \max$.
- Jede Potenzmenge ist ein Verband mit $\sqcap = \cap$ und $\sqcup = \cup$.
- \mathbb{N} ist ein Verband bzgl. der Teilbarkeitsrelation mit $\sqcap = \mathbf{ggT}$ und $\sqcup = \mathbf{kgV}$.

Polaritäten

Definition

Eine Abbildung $\langle X, \leq \rangle \xrightarrow{f} \langle Y, \sqsubseteq \rangle$ zwischen quasi-geordneten Mengen heißt **monoton**, bzw. **antiton**, falls für alle $a, b \in X$

$$a \leq b \text{ impliziert } f(a) \sqsubseteq f(b) \text{ bzw. } f(b) \sqsubseteq f(a)$$

Polaritäten

Definition

Eine Abbildung $\langle X, \leq \rangle \xrightarrow{f} \langle Y, \sqsubseteq \rangle$ zwischen quasi-geordneten Mengen heißt **monoton**, bzw. **antiton**, falls für alle $a, b \in X$

$$a \leq b \text{ impliziert } f(a) \sqsubseteq f(b) \text{ bzw. } f(b) \sqsubseteq f(a)$$

Satz

Jedes $R \subseteq X \times Y$ induziert ein Paar antitoner Abbildungen (**Polarität**)

$$P(X) \begin{array}{c} \xleftarrow{\circ R} \\ \xrightarrow{R^\circ} \end{array} P(Y) \quad \text{via} \quad \begin{array}{l} \circ R(V) := \{x \in X : xRy \text{ für jedes } y \in V\} \\ R^\circ(U) := \{y \in Y : xRy \text{ für jedes } x \in U\} \end{array}$$

mit $U \subseteq \circ R(V)$ gdw. $V \subseteq R^\circ(U)$ für alle $U \subseteq X$ und alle $V \subseteq Y$. \square

Polaritäten

Definition

Eine Abbildung $\langle X, \leq \rangle \xrightarrow{f} \langle Y, \sqsubseteq \rangle$ zwischen quasi-geordneten Mengen heißt **monoton**, bzw. **antiton**, falls für alle $a, b \in X$

$$a \leq b \text{ impliziert } f(a) \sqsubseteq f(b) \text{ bzw. } f(b) \sqsubseteq f(a)$$

Satz

Jedes $R \subseteq X \times Y$ induziert ein Paar antitoner Abbildungen (**Polarität**)

$$P(X) \begin{array}{c} \xleftarrow{\circ R} \\ \xrightarrow{R^\circ} \end{array} P(Y) \quad \text{via} \quad \begin{array}{l} \circ R(V) := \{x \in X : xRy \text{ für jedes } y \in V\} \\ R^\circ(U) := \{y \in Y : xRy \text{ für jedes } x \in U\} \end{array}$$

mit $U \subseteq \circ R(V)$ gdw. $V \subseteq R^\circ(U)$ für alle $U \subseteq X$ und alle $V \subseteq Y$. \square

Für eine Quasi-Ordnung \sqsubseteq auf X gilt $\sqsubseteq^\circ = (\)^\uparrow$ und ${}^\circ \sqsubseteq = (\)^\downarrow$.

Hüllenoperatoren

Definition

Eine monotone Abbildung $\langle X, \leq \rangle \xrightarrow{H} \langle X, \leq \rangle$ auf einer quasi-geordneten Menge heißt **Hüllenoperator**, falls sie

Hüllenoperatoren

Definition

Eine monotone Abbildung $\langle X, \leq \rangle \xrightarrow{H} \langle X, \leq \rangle$ auf einer quasi-geordneten Menge heißt **Hüllenoperator**, falls sie

- **expansiv** ist, d.h. $x \leq H(x)$ für alle $x \in X$;

Im halb-geordneten Fall gilt wegen der Monotonie $H(H(x)) = H(x)$.

Hüllenoperatoren

Definition

Eine monotone Abbildung $\langle X, \leq \rangle \xrightarrow{H} \langle X, \leq \rangle$ auf einer quasi-geordneten Menge heißt **Hüllenoperator**, falls sie

- **expansiv** ist, d.h. $x \leq H(x)$ für alle $x \in X$;
- **idempotent** ist, d.h., $H(H(x)) \leq H(x)$ für alle $x \in X$.

Im halb-geordneten Fall gilt wegen der Monotonie $H(H(x)) = H(x)$.

Satz

Für jede Relation $R \subseteq X \times Y$ ist $g_R \circ f_R$ und $f_R \circ g_R$ ein Hüllenoperator auf $P(X)$ bzw. $P(Y)$.

Hüllenoperatoren

Definition

Eine monotone Abbildung $\langle X, \leq \rangle \xrightarrow{H} \langle X, \leq \rangle$ auf einer quasi-geordneten Menge heißt **Hüllenoperator**, falls sie

- **expansiv** ist, d.h. $x \leq H(x)$ für alle $x \in X$;
- **idempotent** ist, d.h., $H(H(x)) \leq H(x)$ für alle $x \in X$.

Im halb-geordneten Fall gilt wegen der Monotonie $H(H(x)) = H(x)$.

Satz

Für jede Relation $R \subseteq X \times Y$ ist $g_R \circ f_R$ und $f_R \circ g_R$ ein Hüllenoperator auf $P(X)$ bzw. $P(Y)$.

Beweis für $f_R \circ g_R$.

Wegen $g_R(V) \subseteq g_R(V)$ gdw. $V \subseteq f_R(g_R(V))$ ist $f_R \circ g_R$ expansiv, wegen $g_R(V) \supseteq g_R(f_R(g_R(V)))$ also auch idempotent. \square

Anhang B

Abzählbarkeit

Abzählbarkeit

\mathbb{N} bezeichnet die unendliche Menge $\{0, 1, 2, \dots\}$ der natürlichen Zahlen.

Abzählbarkeit

\mathbb{N} bezeichnet die unendliche Menge $\{0, 1, 2, \dots\}$ der natürlichen Zahlen.

Definition

Eine Menge B heißt **abzählbar**, wenn es eine injektive Abbildung $B \xrightarrow{f} \mathbb{N}$ gibt.

Abzählbarkeit

\mathbb{N} bezeichnet die unendliche Menge $\{0, 1, 2, \dots\}$ der natürlichen Zahlen.

Definition

Eine Menge B heißt **abzählbar**, wenn es eine injektive Abbildung $B \xrightarrow{f} \mathbb{N}$ gibt. Anderfalls heißt sie *überabzählbar*.

Abzählbarkeit

\mathbb{N} bezeichnet die unendliche Menge $\{0, 1, 2, \dots\}$ der natürlichen Zahlen.

Definition

Eine Menge B heißt **abzählbar**, wenn es eine injektive Abbildung $B \xrightarrow{f} \mathbb{N}$ gibt. Anderfalls heißt sie *überabzählbar*.

Insbesondere ist jede endliche Menge abzählbar.

Abzählbarkeit

\mathbb{N} bezeichnet die unendliche Menge $\{0, 1, 2, \dots\}$ der natürlichen Zahlen.

Definition

Eine Menge B heißt **abzählbar**, wenn es eine injektive Abbildung $B \xrightarrow{f} \mathbb{N}$ gibt. Anderfalls heißt sie *überabzählbar*.

Insbesondere ist jede endliche Menge abzählbar. Um diese auszuschließen, spricht man von **abzählbar unendlichen Mengen**.

Abzählbarkeit

\mathbb{N} bezeichnet die unendliche Menge $\{0, 1, 2, \dots\}$ der natürlichen Zahlen.

Definition

Eine Menge B heißt **abzählbar**, wenn es eine injektive Abbildung $B \xrightarrow{f} \mathbb{N}$ gibt. Anderfalls heißt sie *überabzählbar*.

Insbesondere ist jede endliche Menge abzählbar. Um diese auszuschließen, spricht man von **abzählbar unendlichen Mengen**.

Satz.

Folgende Bedingungen für B sind äquivalent:

Abzählbarkeit

\mathbb{N} bezeichnet die unendliche Menge $\{0, 1, 2, \dots\}$ der natürlichen Zahlen.

Definition

Eine Menge B heißt **abzählbar**, wenn es eine injektive Abbildung $B \xrightarrow{f} \mathbb{N}$ gibt. Anderfalls heißt sie *überabzählbar*.

Insbesondere ist jede endliche Menge abzählbar. Um diese auszuschließen, spricht man von **abzählbar unendlichen Mengen**.

Satz.

Folgende Bedingungen für B sind äquivalent:

- (a) B ist abzählbar.

Abzählbarkeit

\mathbb{N} bezeichnet die unendliche Menge $\{0, 1, 2, \dots\}$ der natürlichen Zahlen.

Definition

Eine Menge B heißt **abzählbar**, wenn es eine injektive Abbildung $B \xrightarrow{f} \mathbb{N}$ gibt. Anderfalls heißt sie *überabzählbar*.

Insbesondere ist jede endliche Menge abzählbar. Um diese auszuschließen, spricht man von **abzählbar unendlichen Mengen**.

Satz.

Folgende Bedingungen für B sind äquivalent:

- (a) B ist abzählbar.
- (b) $B = \emptyset$ oder es gibt eine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \xrightarrow{g} B$.

Abzählbarkeit

\mathbb{N} bezeichnet die unendliche Menge $\{0, 1, 2, \dots\}$ der natürlichen Zahlen.

Definition

Eine Menge B heißt **abzählbar**, wenn es eine injektive Abbildung $B \xrightarrow{f} \mathbb{N}$ gibt. Anderfalls heißt sie *überabzählbar*.

Insbesondere ist jede endliche Menge abzählbar. Um diese auszuschließen, spricht man von **abzählbar unendlichen Mengen**.

Satz.

Folgende Bedingungen für B sind äquivalent:

- (a) B ist abzählbar.
- (b) $B = \emptyset$ oder es gibt eine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \xrightarrow{g} B$.
- (c) Es gibt eine surjektive **partielle** Abbildung $\mathbb{N} \xrightarrow{h} B$. □

Abzählbarkeit

\mathbb{N} bezeichnet die unendliche Menge $\{0, 1, 2, \dots\}$ der natürlichen Zahlen.

Definition

Eine Menge B heißt **abzählbar**, wenn es eine injektive Abbildung $B \xrightarrow{f} \mathbb{N}$ gibt. Anderfalls heißt sie *überabzählbar*.

Insbesondere ist jede endliche Menge abzählbar. Um diese auszuschließen, spricht man von **abzählbar unendlichen Mengen**.

Satz.

Folgende Bedingungen für B sind äquivalent:

- (a) B ist abzählbar.
- (b) $B = \emptyset$ oder es gibt eine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \xrightarrow{g} B$.
- (c) Es gibt eine surjektive **partielle** Abbildung $\mathbb{N} \xrightarrow{h} B$. □

Solch ein g oder h heißt dann **Aufzählung**.

Satz

Teilmengen, endliche cartesische Produkte und abzählbare Vereinigungen abzählbarer Mengen sind wieder abzählbar. Dagegen sind Potenzmengen abzählbar unendlicher Mengen überabzählbar.

Satz

Teilmengen, endliche cartesische Produkte und abzählbare Vereinigungen abzählbarer Mengen sind wieder abzählbar. Dagegen sind Potenzmengen abzählbar unendlicher Mengen überabzählbar.

Beweis.

Teilmengen: Komponiere die injektive Inklusion $C \xrightarrow{\iota} B$ mit $B \xrightarrow{f} \mathbb{N}$.

Satz

Teilmengen, endliche cartesische Produkte und abzählbare Vereinigungen abzählbarer Mengen sind wieder abzählbar. Dagegen sind Potenzmengen abzählbar unendlicher Mengen überabzählbar.

Beweis.

Teilmengen: Komponiere die injektive Inklusion $C \xrightarrow{\iota} B$ mit $B \xrightarrow{f} \mathbb{N}$.

Cartesisches Produkt: Es genügt, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ als abzählbar nachzuweisen.
Eine Injektion ist z.B. gegeben durch

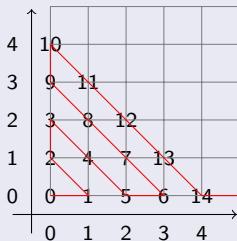
Satz

Teilmengen, endliche cartesische Produkte und abzählbare Vereinigungen abzählbarer Mengen sind wieder abzählbar. Dagegen sind Potenzmengen abzählbar unendlicher Mengen überabzählbar.

Beweis.

Teilmengen: Komponiere die injektive Inklusion $C \xrightarrow{\iota} B$ mit $B \xrightarrow{f} \mathbb{N}$.

Cartesisches Produkt: Es genügt, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ als abzählbar nachzuweisen. Eine Injektion ist z.B. gegeben durch



Beweis (Fortsetzung).

Abzählbare Vereinigungen: Es genügt, die disjunkte Vereinigung von \mathbb{N} Kopien von \mathbb{N} als abzählbar nachzuweisen (warum?).

Beweis (Fortsetzung).

Abzählbare Vereinigungen: Es genügt, die disjunkte Vereinigung von \mathbb{N} Kopien von \mathbb{N} als abzählbar nachzuweisen (warum?). Aber eine derartige Vereinigung ist isomorph zu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Beweis (Fortsetzung).

Abzählbare Vereinigungen: Es genügt, die disjunkte Vereinigung von \mathbb{N} Kopien von \mathbb{N} als abzählbar nachzuweisen (warum?). Aber eine derartige Vereinigung ist isomorph zu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Unendliche Potenzmengen: Es genügt zu zeigen, dass $P(\mathbb{N})$ überabzählbar ist. Wir verfahren indirekt: ist $P(\mathbb{N}) \xrightarrow{g} \mathbb{N}$ injektiv, so betrachten wir die Menge

$$K := \{g(B) : B \subseteq \mathbb{N} \wedge g(B) \notin B\} \subseteq \mathbb{N}$$

Beweis (Fortsetzung).

Abzählbare Vereinigungen: Es genügt, die disjunkte Vereinigung von \mathbb{N} Kopien von \mathbb{N} als abzählbar nachzuweisen (warum?). Aber eine derartige Vereinigung ist isomorph zu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Unendliche Potenzmengen: Es genügt zu zeigen, dass $P(\mathbb{N})$ überabzählbar ist. Wir verfahren indirekt: ist $P(\mathbb{N}) \xrightarrow{g} \mathbb{N}$ injektiv, so betrachten wir die Menge

$$K := \{g(B) : B \subseteq \mathbb{N} \wedge g(B) \notin B\} \subseteq \mathbb{N}$$

Wegen der Injektivität von g ist K das einzige g -Urbild von $g(K)$.

Beweis (Fortsetzung).

Abzählbare Vereinigungen: Es genügt, die disjunkte Vereinigung von \mathbb{N} Kopien von \mathbb{N} als abzählbar nachzuweisen (warum?). Aber eine derartige Vereinigung ist isomorph zu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Unendliche Potenzmengen: Es genügt zu zeigen, dass $P(\mathbb{N})$ überabzählbar ist. Wir verfahren indirekt: ist $P(\mathbb{N}) \xrightarrow{g} \mathbb{N}$ injektiv, so betrachten wir die Menge

$$K := \{g(B) : B \subseteq \mathbb{N} \wedge g(B) \notin B\} \subseteq \mathbb{N}$$

Wegen der Injektivität von g ist K das einzige g -Urbild von $g(K)$. Gilt $g(K) \in K$, muß das aufgrund von $g(K) \notin K$ der Fall sein.

Beweis (Fortsetzung).

Abzählbare Vereinigungen: Es genügt, die disjunkte Vereinigung von \mathbb{N} Kopien von \mathbb{N} als abzählbar nachzuweisen (warum?). Aber eine derartige Vereinigung ist isomorph zu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Unendliche Potenzmengen: Es genügt zu zeigen, dass $P(\mathbb{N})$ überabzählbar ist. Wir verfahren indirekt: ist $P(\mathbb{N}) \xrightarrow{g} \mathbb{N}$ injektiv, so betrachten wir die Menge

$$K := \{g(B) : B \subseteq \mathbb{N} \wedge g(B) \notin B\} \subseteq \mathbb{N}$$

Wegen der Injektivität von g ist K das einzige g -Urbild von $g(K)$. Gilt $g(K) \in K$, muß das aufgrund von $g(K) \notin K$ der Fall sein. Umgekehrt kann $g(K) \notin K$ nur aufgrund von $g(K) \in K$ gelten, Widerspruch.

Beweis (Fortsetzung).

Abzählbare Vereinigungen: Es genügt, die disjunkte Vereinigung von \mathbb{N} Kopien von \mathbb{N} als abzählbar nachzuweisen (warum?). Aber eine derartige Vereinigung ist isomorph zu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Unendliche Potenzmengen: Es genügt zu zeigen, dass $P(\mathbb{N})$ überabzählbar ist. Wir verfahren indirekt: ist $P(\mathbb{N}) \xrightarrow{g} \mathbb{N}$ injektiv, so betrachten wir die Menge

$$K := \{g(B) : B \subseteq \mathbb{N} \wedge g(B) \notin B\} \subseteq \mathbb{N}$$

Wegen der Injektivität von g ist K das einzige g -Urbild von $g(K)$. Gilt $g(K) \in K$, muß das aufgrund von $g(K) \notin K$ der Fall sein. Umgekehrt kann $g(K) \notin K$ nur aufgrund von $g(K) \in K$ gelten, Widerspruch. (Dieses Argument funktioniert für jede unendliche Menge X und zeigt, dass keine injektive Abbildung von $P(X)$ nach X existiert.) □

Lemma

Ist X abzählbar, so auch die Menge aller endlichen Wörter (= Tupel) über X , d.h., die disjunkte Vereinigung

$$X^* := \sum_{i \in \mathbb{N}} X^i = X^0 + X^1 + X^2 + \dots$$

Lemma

Ist X abzählbar, so auch die Menge aller endlichen Wörter (= Tupel) über X , d.h., die disjunkte Vereinigung

$$X^* := \sum_{i \in \mathbb{N}} X^i = X^0 + X^1 + X^2 + \dots$$

Beweis.

Es handelt sich um eine disjunkte Vereinigung endlicher cartesischer Produkte abzählbarer Mengen, und diese ist nach obigem Satz abzählbar. \square

Lemma

Ist X abzählbar, so auch die Menge aller endlichen Wörter (= Tupel) über X , d.h., die disjunkte Vereinigung

$$X^* := \sum_{i \in \mathbb{N}} X^i = X^0 + X^1 + X^2 + \dots$$

Beweis.

Es handelt sich um eine disjunkte Vereinigung endlicher cartesischer Produkte abzählbarer Mengen, und diese ist nach obigem Satz abzählbar. \square

Corollar.

Die Menge $\mathcal{F}[\mathcal{A}]$ aller aussagenlogischen Formeln ist abzählbar.

Lemma

Ist X abzählbar, so auch die Menge aller endlichen Wörter (= Tupel) über X , d.h., die disjunkte Vereinigung

$$X^* := \sum_{i \in \mathbb{N}} X^i = X^0 + X^1 + X^2 + \dots$$

Beweis.

Es handelt sich um eine disjunkte Vereinigung endlicher cartesischer Produkte abzählbarer Mengen, und diese ist nach obigem Satz abzählbar. \square

Corollar.

Die Menge $\mathcal{F}[\mathcal{A}]$ aller aussagenlogischen Formeln ist abzählbar.

Beweis.

Es handelt sich um eine Teilmenge von $(\mathcal{A} + \mathcal{J} + \{\langle \rangle, \mathcal{D}\})^*$. \square

Lemma

Für jede abzählbare Signatur S ist die Menge $\mathbf{FO}(S)$ abzählbar.

Lemma

Für jede abzählbare Signatur S ist die Menge $\mathbf{FO}(S)$ abzählbar.

Beweis.

Da \mathcal{V} abzählbar ist, gilt das auch für $(S + \mathcal{V})^*$ und somit für die Teilmenge $\mathbf{Term}(\mathbf{Fun}, \mathcal{V})$.

Lemma

Für jede abzählbare Signatur S ist die Menge $\mathbf{FO}(S)$ abzählbar.

Beweis.

Da \mathcal{V} abzählbar ist, gilt das auch für $(S + \mathcal{V})^*$ und somit für die Teilmenge $\mathbf{Term}(\mathbf{Fun}, \mathcal{V})$. Die atomaren Formeln sind nun Wörter über den Alphabet $\mathbf{Term}(\mathbf{Fun}, \mathcal{V}) + \mathbf{Pred} + \{(\,)\}$, bilden also auch eine abzählbare Menge.

Lemma

Für jede abzählbare Signatur S ist die Menge $\mathbf{FO}(S)$ abzählbar.

Beweis.

Da \mathcal{V} abzählbar ist, gilt das auch für $(S + \mathcal{V})^*$ und somit für die Teilmenge $\mathbf{Term}(\mathbf{Fun}, \mathcal{V})$. Die atomaren Formeln sind nun Wörter über den Alphabet $\mathbf{Term}(\mathbf{Fun}, \mathcal{V}) + \mathbf{Pred} + \{(\,,\,)\}$, bilden also auch eine abzählbare Menge. Nun greift im Wesentlichen dasselbe Argument, wie für die Aussagenlogik: mittels abzählbar vieler Junktoren lassen sich nur abzählbar viele endliche Formeln erzeugen. □

Anhang C

Mengenlehre

ZFC

Die übliche Zermelo¹⁹-Fraenkel²⁰ Mengenlehre läßt sich z.B. mit der Signatur $\mathcal{S}_{\text{set}} = \{\emptyset/0; \in/2\}$ formulieren und basiert auf 8 Axiom-Schemata:

¹⁹ Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo (1871–1953)

²⁰ Abraham Halevi Fraenkel (1891–1965)

ZFC

Die übliche Zermelo¹⁹-Fraenkel²⁰ Mengenlehre läßt sich z.B. mit der Signatur $\mathcal{S}_{\text{set}} = \{\emptyset/0; \in/2\}$ formulieren und basiert auf 8 Axiom-Schemata:

- **Extensionalität:**

$$\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x \doteq y)$$

¹⁹ Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo (1871–1953)

²⁰ Abraham Halevi Fraenkel (1891–1965)

ZFC

Die übliche Zermelo¹⁹-Fraenkel²⁰ Mengenlehre läßt sich z.B. mit der Signatur $\mathcal{S}_{\text{set}} = \{\emptyset/0; \in/2\}$ formulieren und basiert auf 8 Axiom-Schemata:

- **Extensionalität:**

$$\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x \doteq y)$$

- **Leere Menge:**

$$\forall x \neg(x \in \emptyset)$$

¹⁹ Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo (1871–1953)

²⁰ Abraham Halevi Fraenkel (1891–1965)

ZFC

Die übliche Zermelo¹⁹-Fraenkel²⁰ Mengenlehre läßt sich z.B. mit der Signatur $\mathcal{S}_{\text{set}} = \{\emptyset/0; \in/2\}$ formulieren und basiert auf 8 Axiom-Schemata:

- **Extensionalität:**

$$\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x \doteq y)$$

- **Leere Menge:**

$$\forall x \neg(x \in \emptyset)$$

- **Paarmengen:**

$$\forall x \forall y \exists z \forall w (w \in z \leftrightarrow (w \doteq x \vee w \doteq y))$$

Schreibweise: $z = \{x, y\}$.

¹⁹ Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo (1871–1953)

²⁰ Abraham Halevi Fraenkel (1891–1965)

- Vereinigung:

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \exists w (z \in w \wedge w \in x))$$

Schreibweise: $y = \bigcup x$ oder $y = u \cup v$ falls $x = \{u, v\}$.

- **Vereinigung:**

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \exists w (z \in w \wedge w \in x))$$

Schreibweise: $y = \bigcup x$ oder $y = u \cup v$ falls $x = \{u, v\}$.

- **Unendlichkeit:**

$$\exists x (\emptyset \in x \wedge \forall y (y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x))$$

- Vereinigung:

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \exists w (z \in w \wedge w \in x))$$

Schreibweise: $y = \bigcup x$ oder $y = u \cup v$ falls $x = \{u, v\}$.

- Unendlichkeit:

$$\exists x (\emptyset \in x \wedge \forall y (y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x))$$

- Potenzmengen:

$$\forall x \exists y \forall z (x \in y \leftrightarrow \forall w (w \in z \rightarrow w \in x))$$

- **Vereinigung:**

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \exists w (z \in w \wedge w \in x))$$

Schreibweise: $y = \bigcup x$ oder $y = u \cup v$ falls $x = \{u, v\}$.

- **Unendlichkeit:**

$$\exists x (\emptyset \in x \wedge \forall y (y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x))$$

- **Potenzmengen:**

$$\forall x \exists y \forall z (x \in y \leftrightarrow \forall w (w \in z \rightarrow w \in x))$$

- **Regularität** oder **Fundierung:**

$$\forall x \left(\neg(x \doteq \emptyset) \rightarrow \exists y (y \in x \wedge \neg \exists z (z \in x \wedge z \in y)) \right)$$

- **Aussonderung:** Falls $\mathbf{FV}(A) \subseteq \{x, z\} \cup \{w_i : i < n\}$, dann

$$\forall z \forall w_0 \cdots \forall w_{n-1} \exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge A)$$

Schreibweise: $y = \{x : x \in z \wedge A\}$

- **Aussonderung:** Falls $\mathbf{FV}(A) \subseteq \{x, z\} \cup \{w_i : i < n\}$, dann

$$\forall z \forall w_0 \cdots \forall w_{n-1} \exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge A)$$

Schreibweise: $y = \{x : x \in z \wedge A\}$

- **Auswahl** (Choice), wird von Praktikern oft hinzugenommen:

$$\forall x \left((\emptyset \notin x) \wedge \forall y \forall z (y \in x \wedge z \in x \rightarrow x \dot{=} y \vee \neg \exists w (w \in x \wedge w \in y)) \right. \\ \left. \rightarrow \exists w \forall u (u \in x \rightarrow \exists! v (v \in u \wedge v \in w)) \right)$$

besagt, dass man aus jedem Element u einer Menge x paarweise disjunkter nichtleerer Mengen jeweils genau ein ($\exists!$) Element auswählen kann.

- **Aussonderung**: Falls $\mathbf{FV}(A) \subseteq \{x, z\} \cup \{w_i : i < n\}$, dann

$$\forall z \forall w_0 \cdots \forall w_{n-1} \exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge A)$$

Schreibweise: $y = \{x : x \in z \wedge A\}$

- **Auswahl** (Choice), wird von Praktikern oft hinzugenommen:

$$\forall x \left((\emptyset \notin x) \wedge \forall y \forall z (y \in x \wedge z \in x \rightarrow x \dot{=} y \vee \neg \exists w (w \in x \wedge w \in y)) \right. \\ \left. \rightarrow \exists w \forall u (u \in x \rightarrow \exists! v (v \in u \wedge v \in w)) \right)$$

besagt, dass man aus jedem Element u einer Menge x paarweise disjunkter nichtleerer Mengen jeweils genau ein ($\exists!$) Element auswählen kann.

Ein großer Teil der üblichen Mathematik läßt sich in ZFC formulieren, etwa die Konzepte einer natürlichen Zahl, der Menge \mathbb{N} , einer Funktion, der Injektivität, der Surjektivität, der Abzählbarkeit, etc.