Inhaltsverzeichnis

0.1 Einleitung

[. . .]
  [. . .]
  [. . .]

Teil I

Aussagenlogik

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Syntax

1.1.1 Formeln

[. . .
. . .]

[. . .] Wir werden unsere logische Analyse zunächst auf eine Auswahl von Junktoren beschränken. Darin werden sich jene finden, die für die Anwendungen besonders nützlich sind, aber auch ein paar andere, die technisch bedeutsam sind.

Nun sind Aussagen in unserer Umgangssprache recht unhandlich, vielleicht ergeben sich mitunter auch Interpretationsspielräume durch grammatikalische Spitzfindigkeiten. Wir führen deshalb eine formale Sprache ein und machen diese zum Gegenstand unserer Untersuchungen. In dieser werden atomare Aussagen durch einzelne Symbole ausgedrückt, den sogenannten Aussagevariablen; statt von Aussagen sprechen wir deshalb nur von Aussageformen. Mit den Junktoren verfahren wir ebenso; die betreffenden Symbole sind

$\wedge$ für ‚und',
$\vee$ für ‚oder',
$\neg$ für ‚nicht',
$\rightarrow$ für ‚[wenn . . .], dann' (oder ‚nur, wenn')
$\leftrightarrow$ für ‚genau dann, wenn',
$\top$ für ‚wahr',
$\bot$ für ‚falsch'.

Um bei Verwendung mehrerer Junktoren die Zusammensetzung klarzumachen, bestehen wir (zumindest vorläufig) auf der Verwendung von Klammern. (Die schriftliche Umgangssprache verfügt über kein entsprechendes Mittel; im Mündlichen könnte man sich mit Sprechpausen behelfen.) Es ist zweckmäßig, diese von den Klammern unserer mathematischen Umgangssprache abzuheben; deshalb werden sie als ‚☾' und ‚☽' erscheinen. (Jegliche Ähnlichkeit mit gewissen astronomischen Symbolen ist wohl nicht völlig zufällig.)

Die letzten beiden Einträge in unserer Liste von Junktoren mögen etwas merkwürdig erscheinen. Es soll ‚$\top$' für einen Satz stehen, der unumstößlich wahr ist, und entsprechend soll ‚$\bot$' für einen Satz stehen, der unumstößlich falsch ist.

Die Umgangssprache kennt solche Sätze eigentlich nicht, weshalb wir uns mit der Nennung der Adjektive behelfen. Daß nun ‚wahr' und ‚falsch' dennoch Junktoren sein sollen, kann durch die Theorie gut begründet werden.

Definition 1.1.1. Es sei eine Menge $\mathcal{V}$ gegeben von Symbolen, die allesamt verschieden sind von den im folgenden explizit genannten. Wir betrachten das Alphabet $\Sigma[\mathcal{V}]$, bestehend aus den Elementen von $\mathcal{V}$ sowie

- $\top$, $\bot$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$, genannt die *Junktorsymbole*;
- $\llparenthesis$ und $\rrparenthesis$, genannt die *Hilfssymbole* (Klammern).

Die *Aussageformen* in $\mathcal{V}$ sind die wie folgt induktiv definierten Wörter über $\Sigma[\mathcal{V}]$.

(a) Für jedes $v \in \mathcal{V}$ ist v eine Aussageform in $\mathcal{V}$.

(b)$_0$ Es sind $\llparenthesis\top\rrparenthesis$ und $\llparenthesis\bot\rrparenthesis$ Aussageformen in $\mathcal{V}$.

(b)$_1$ Ist A eine Aussageform in $\mathcal{V}$, so auch $\llparenthesis\neg A\rrparenthesis$.

(b)$_2$ Sind A und B Aussageformen in $\mathcal{V}$, so auch $\llparenthesis A \wedge B\rrparenthesis$, $\llparenthesis A \vee B\rrparenthesis$, $\llparenthesis A \rightarrow B\rrparenthesis$ und $\llparenthesis A \leftrightarrow B\rrparenthesis$.

Die Menge aller Aussageformen in $\mathcal{V}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{F}[\mathcal{V}]$.

Beispiel 1.1.2. Die Wörter $\llparenthesis\llparenthesis p \wedge \llparenthesis\neg q\rrparenthesis\rrparenthesis \vee r\rrparenthesis$, $\llparenthesis r \rightarrow \llparenthesis p \vee \llparenthesis q \wedge p\rrparenthesis\rrparenthesis\rrparenthesis$ und $\llparenthesis\llparenthesis p \vee q\rrparenthesis \rightarrow \llparenthesis\llparenthesis q \leftrightarrow r\rrparenthesis \wedge \llparenthesis\neg\llparenthesis p \vee \neg r\rrparenthesis\rrparenthesis\rrparenthesis\rrparenthesis$ sind Aussageformen in $\{p, q, r\}$; das Wort $\llparenthesis p \vee q \vee r\rrparenthesis$ jedoch nicht.

Aussageformen heißen auch *Formeln der Aussagenlogik*. Da dieser erste Teil der Vorlesung ausdrücklich von Aussagenlogik handelt, dürfen wir auch kurz ‚Formel' sagen.

Wie wir hier schon erahnen können, bezeichnen wir Formeln gerne mit Großbuchstaben aus der Reihe ‚A', ‚B', ‚C', …, also vom Anfang des „richtigen" Alphabets. Für Aussagevariablen hat in der Definition der Buchstabe ‚v' gereicht. Man beachte, daß all diese Bezeichnungen in unserer Umgangssprache gewählt sind. Als konkrete Aussagevariablen, wie in dem Beispiel, bevorzugen wir Kleinbuchstaben aus der Reihe ‚p', ‚q', ‚r', … Auch hierin mag man zur Erlangung angemessener Allgemeinheit umgangssprechliche Bezeichnungen sehen, aber jedenfalls ist dann implizit ausgeschlossen, daß verschiedene Buchstaben für dasselbe Element stehen.

Viele Autoren legen sich auf eine abzählbar unendliche Variablenmenge $\{p_0, p_1, p_2, \ldots\}$ fest. Diese Wahl ist für die Praxis immer zu groß und für die Theorie mitunter unnötig einschränkend. […]

Betrachten wir die Definition von ‚Aussageform' genauer. Einige der angegebenen Bedingungen sind rekursiv, was zu gewissen Sorgen Anlaß geben könnte. Dazu ist der Hinweis gegeben, daß die Definition *induktiv* sein soll. Effektiv ist damit gemeint, daß die zu definierende Teilmenge — hier die Menge der Aussageformen in $\mathcal{V}$ — die kleinstmögliche sein soll, die die Bedingungen erfüllt. (Manche Autoren sagen stattdessen, daß Aussageformen auf keine andere Weise zustandekommen können. Man könnte sich auch jeglichen Hinweises ganz enthalten, insofern es weithin üblich ist, bequemerweise in Definitionen eine Bedingung nur als hinreichend zu kennzeichnen, wenn sie als definierende Bedingung eben auch notwendig sein muß.)

Hier verbirgt sich ein gewisses Problem, das wir aber besser erst dann angehen, wenn es unter allgemeineren Umständen auftritt; diese Gelegenheit wird sich mit Definition **??** ergeben. Für den Moment soll der Hinweis reichen, daß wir aus der Definition das Prinzip der *Induktion über Formeln* (auch *strukturelle Induktion* genannt) ableiten können: um zu zeigen, daß jeder Formel A die Eigenschaft $\mathcal{P}$ zukommt, reicht es zu zeigen:

(a) Für jedes $v \in \mathcal{V}$ hat v die Eigenschaft $\mathcal{P}$.

(b)$_0$ Es haben $\llparenthesis \top \rrparenthesis$ und $\llparenthesis \bot \rrparenthesis$ die Eigenschaft $\mathcal{P}$.

(b)$_1$ Hat A die Eigenschaft $\mathcal{P}$, so auch $\llparenthesis \neg A \rrparenthesis$.

(b)$_2$ Haben A und B die Eigenschaft $\mathcal{P}$, so auch $\llparenthesis A \wedge B \rrparenthesis$, $\llparenthesis A \vee B \rrparenthesis$, $\llparenthesis A \to B \rrparenthesis$ und $\llparenthesis A \leftrightarrow B \rrparenthesis$.

(Freilich hätten wir mit Induktion über Wortlänge oder verwandter Größenmaße deutlich stärkere Beweisprinzipien zur Verfügung. Diese Stärke ist jedoch in den allermeisten nicht vonnöten und verstellt den Blick auf das Wesentliche. Außerdem werden wir darauf hinarbeiten, die Wortstruktur von Formeln in den Hintergrund zu drängen.) In den Beweisen der folgenden Lemmata werden wir Beispiele für die Anwendung dieses Prinzips sehen. Aber zunächst führen wir einige praktische Sprechweisen ein.

Die unter (a) fallenden Formeln heißen *atomar*; entsprechend nennen wir die unter (b) fallenden Formeln *molekular*. Die atomaren Formeln können mit den Variablen identifiziert werden. In jedem der Fälle einer molekularen Formel erscheinen explizit ein Junktorsymbol, das wir das *äußere* nennen, und eine davon abhängige Anzahl kürzerer Formeln, die wir die *Gliedformeln* oder kurz *Glieder* nennen. Besagte Anzahl heißt die *Stelligkeit* des Junktorsymbols. Demnach haben $\top$ und $\bot$ die Stelligkeit 0, hat $\neg$ die Stelligkeit 1 und haben $\wedge$, $\vee$, $\to$ und $\leftrightarrow$ die Stelligkeit 2.

Beispiel 1.1.3. Die Formel $\llparenthesis\llparenthesis p \wedge \llparenthesis \neg q \rrparenthesis\rrparenthesis \vee r \rrparenthesis$ ist molekular mit äußerem Junktor $\vee$ und Gliedformeln $\llparenthesis p \wedge \llparenthesis \neg q \rrparenthesis\rrparenthesis$ (ebenfalls molekular) und r (atomar).

Man beachte, daß wir eine Formel nur insofern durch diese Sprechweisen klassifizieren wollen, wie sie sich auf eine der in der Definition genannten Weisen ergeben. Daß diese Weise eindeutig ist, mag intuitiv klar sein; in der Folge werden wir es auch beweisen.

Lemma 1.1.4. *Jede Formel hat genau so viele öffnende wie schließende Klammern.*

Beweis. Schreiben wir $\delta(X)$ für die Differenz der Anzahlen öffnender und schließender Klammern in einem Wort X. Wir wollen zeigen, daß für jede Formel A gilt: $\delta(A) = 0$. Dies tun wir mittels Induktion über Formeln.

Ist A atomar, also $A = v$ für eine Variable v, so enthält A keinerlei Klammer; das gewünschte Ergebnis folgt unmittelbar. Für molekulare Formeln betrachten wir examplarisch den Fall eines 2-stelligen äußeren Junktors, für den wir $\star$ schreiben; also $\star \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$ und $A = \llparenthesis B \star C \rrparenthesis$ für Formeln B und C. Wir haben offenbar

$$\delta(A) = \delta(\llparenthesis) + \delta(B) + \delta(\star) + \delta(C) + \delta(\rrparenthesis)$$

(wobei wir die betreffende Homomorphieeigenschaft von δ als gegeben hinnehmen). Was die Summanden der rechten Seite betrifft, sehen wir

$$\delta(\llparenthesis) = +1, \qquad \delta(\star) = 0 \qquad \text{und} \qquad \delta(\rrparenthesis) = -1$$

unmittelbar, und die Induktionsvoraussetzung liefert

$$\delta(B) = 0 \qquad \text{und} \qquad \delta(C) = 0.$$

Die Summe ist die gewünschte Zahl. □

Lemma 1.1.5. *Sei A eine Formel. Sei weiterhin eine Zerlegung von A als Verkettung zweier nichtleerer Wörter X_0 und X_1 gegeben: $A = X_0X_1$. Das Wort X_0 hat mehr öffnende als schließende Klammern, und das Wort X_1 hat mehr schließende als öffnende Klammern. Insbesondere sind X_0 und X_1 keine Formeln.*

Beweis. Wir verwenden die Funktion δ aus dem vorangegangenen Beweis. Diesmal sollen die beiden Ungleichungen $\delta(X_0) > 0$ und $\delta(X_1) < 0$ nachgewiesen werden, was wir wieder durch Induktion über Formeln A tun werden. Aufgrund des vorangegangenen Satzes gilt $\delta(X_0) + \delta(X_1) = \delta(A) = 0$, weshalb der Nachweis einer der beiden Ungleichungen ausreichend ist.

Ist A atomar, so hat A als Wort die Länge 1, weshalb es keine Zerlegung wie beschrieben gibt, und damit auch nichts zu zeigen. Sei nun also A molekular. Wieder betrachten wir exemplarisch den Fall eines 2-stelligen äußeren Junktors $\star$; also $A = \llparenthesis B \star C \rrparenthesis$. Für die möglichen Zerlegungen $A = X_0X_1$ lassen sich nun in sechs Fälle unterscheiden:

- $X_0 = \llparenthesis$ und $X_1 = B \star C\rrparenthesis$. Dann haben wir offenbar $\delta(X_0) = +1 > 0$.
- $X_0 = \llparenthesis Y_0$ und $X_1 = Y_1 \star C\rrparenthesis$ für eine Zerlegung $B = Y_0Y_1$ in nichtleere Wörter. Hier liefert unsere Induktionsvoraussetzung, angewendet auf B, daß $\delta(Y_0) > 0$. Also gilt $\delta(X_0) = \delta(\llparenthesis) + \delta(Y_0) > +1 > 0$.
- $X_0 = \llparenthesis B$ und $X_1 = \star C\rrparenthesis$. Der vorangegangene Satz liefert $\delta(B) = 0$. Es gilt also $\delta(X_0) = \delta(\llparenthesis) + \delta(B) = +1 > 0$.

Die Formulierung und Betrachtung der drei übrigen Fälle verbleibt als Übungsaufgabe. □

Lemma 1.1.6. *Jede Formel ist in Definition 1.1.1 auf nur eine Weise beschrieben. Anders gesagt: Jede Formel ist entweder atomar oder molekular (und nicht beides), und im letzteren Falle sind ihr äußerer Junktor sowie ihre Gliedformeln (und deren Reihenfolge) eindeutig bestimmt.*

Beweis. Eine molekulare Formel beginnt mit einer öffnenden Klammer, womit (neben einigen anderen Eigenschaften) sie sich von jeder atomaren Formel unterscheidet. Ein äußeres Junktorsymbol der Stelligkeit 0 oder 1 folgt als nächstes, weshalb ein solcher eindeutig ist. Im Falle der Stelligkeit 1 ist die Eindeutigkeit der Gliedformeln klar. Hat die Formel einen äußeren Junktor der Stelligkeit 2, ist sie also von der Form $\llparenthesis B \star C\rrparenthesis$, so ist das auf die öffnende Klammer am Anfang folgende Zeichen das erste Zeichen der Gliedformel B. Als solches kann es kein Junktorsymbol sein (sondern nur eine Variable oder eine weitere öffnende Klammer).

Damit brauchen wir nur noch den Fall untersuchen, daß eine Formel sich auf zwei verschiedene Weisen mit 2-stelligem äußeren Junktorsymbol lesen läßt. Wir haben also $\llparenthesis B \star C \rrparenthesis = \llparenthesis B' \star' C' \rrparenthesis$ mit Formeln B, C, B' und C' und 2-stelligen Junktorsymbolen $\star$ und $\star'$. Wir müssen zeigen, daß $B = B'$, $C = C'$ und $\star = \star'$ sind. Nach Kürzung der äußeren Klammern haben wir $B \star C = B' \star' C'$. Nun ist entweder B ein initiales Teilwort von B' oder umgekehrt; wir nehmen o. B. d. A. ersteres an. Also $BX = B'$ für ein Wort X. Wäre dieses nichtleer, so hätten wir eine Zerlegung von B' in zwei nichtleere Teilwörter, von denen eines selber eine Formel ist; aber nach dem vorangegangenen Lemma gibt es so etwas nicht. Also ist X leer, und wir haben $B = B'$. Durch weiteres Kürzen erhalten wir $\star C = \star' C'$, woraus wir die verbleibenden beiden Gleichungen ablesen. □

Übungsaufgabe 1.1.7. Ergänzen sie die Beweise der beiden Lemmata um die Fälle äußerer Junktorsymbole der Stelligkeiten 0 und 1 sowie den Beweis des zweiten Lemmas außerdem um die drei nicht explizit genannten Fälle einer Zerlegung der Formel $\llparenthesis B \star C \rrparenthesis$ in nichtleere Teilwörter.

Übungsaufgabe 1.1.8. Geben Sie einen (möglichst effizienten) Algorithmus an, der entscheidet, ob ein gegebenes Wort über $\Sigma[\mathcal{V}]$ eine Formel ist.

Es ist höchste Zeit, unsere albernen Mondklammern zumindest aus unserem Sichtfeld zu verbannen. Zu diesem Zweck führen wir für jedes Junktorsymbol eine entsprechende Operation auf Formeln ein, für die wir sinnigerweise eben dieses Symbol verwenden. So ist etwa $\wedge$ die Operation $(A, B) \mapsto \llparenthesis A \wedge B \rrparenthesis$, und entsprechend schreiben wir für $\llparenthesis A \wedge B \rrparenthesis$ auch einfach $A \wedge B$. Dabei gehört ‚$\wedge$‘ im einen Falle zur formalen Sprache, im andern Falle zur Umgangssprache. Man mag es für besser halten, zwei verschiedene Symbole zu verwenden, aber immerhin hier ist der Pedanterie Einhalt geboten worden.

Oberflächlich betrachtet läuft unsere Konvertion darauf hinaus, die formalsprachlichen Klammern einfach wegzulassen. Das führt aber auf genau die Probleme, deretwegen wir sie überhaupt eingeführt haben. Diese Probleme sind uns aber von Kindesbeinen an aus der Arithmetik bekannt. Gelöst werden sie durch Einführung von Klammern — nur daß wir jetzt die üblichen umgangssprachlichen Klammern setzen werden, und zwar im allgemeinen nur dort, wo sie wirklich nötig sind.

Um diese Nötigkeit sinnvoll zu beschränken, führen wir Vorrangsregeln ein, entsprechend dem bekannten ‚Punkt- vor Strichrechnung‘: in der Reihe

$$\neg; \qquad \wedge, \vee; \qquad \rightarrow, \leftrightarrow$$

haben die Zeichen vor einem Semikolon Vorrang vor jenen dahinter. So steht z. B. ‚$A \wedge B \rightarrow C$‘ für $\llparenthesis\llparenthesis A \wedge B \rrparenthesis \rightarrow C \rrparenthesis$ (und nicht für $\llparenthesis A \wedge \llparenthesis B \rightarrow C \rrparenthesis\rrparenthesis$) und ‚$\neg A \vee B$‘ für $\llparenthesis\llparenthesis \neg A \rrparenthesis \vee B \rrparenthesis$ (und nicht für $\llparenthesis \neg \llparenthesis A \vee B \rrparenthesis\rrparenthesis$). (Einige Autoren räumen zusätzlich $\wedge$ Vorrang vor $\vee$ ein, der Auffassung folgend, daß ersteres einer Art Multiplikation und letzteres einer Art Addition sei. Entscheidend ist jedoch die Typographie, und die stützt diese Auffassung nicht. Deshalb werden wir Ausdrücke wie ‚$A \vee B \wedge C$‘ vermeiden und stattdessen explizit ‚$A \vee (B \wedge C)$‘ oder eben ‚$(A \vee B) \wedge C$‘ schreiben.) Tritt ein zweistelliges Symbol mehrfach in Reihe auf, so soll ‚rechts vor links' gelten (wie im Straßenverkehr, nur daß in diesem Falle wirklich ein Zufall vorliegt); auf die Anwendung dieser Regel wird allerdings bei entsprechenden Gelegenheiten noch gesondert hingewiesen werden.

1.1.2 Definitionen durch Induktion

Nachdem wir bereits einige Eigenschaften von Elementen von $\mathcal{F}[\mathcal{V}]$ durch Induktion bewiesen haben, wollen wir nun auch entsprechend Abbildungen von $\mathcal{F}[\mathcal{V}]$ einführen.

Beispiel 1.1.9. Unter der *Tiefe* $d(A)$ einer Formel A wollen wir ihre maximal Klammerungstiefe verstehen. Formal können wir das unter Rückgriff auf die Abbildung δ aus den vorangegangenen Beweisen schreiben als

$$d(A) = \max_{X_0 X_1 = A} \delta(X_0).$$

Damit ist eine Abbildung d von $\mathcal{F}[\mathcal{V}]$ in die Menge $\mathbf{N}$ der natürlichen Zahlen.

Wie man unschwer feststellt, genügt d den folgenden Bedingungen:

- $d(v) = 0$ für alle $v \in \mathcal{V}$,
- $d(\top)$, $d(\bot) = 1$,
- $d(\neg A) = 1 + d(A)$ für alle $A \in \mathcal{F}[\mathcal{V}]$,
- $d(A \star B) = 1 + \max\{d(A), d(B)\}$ für alle $A, B \in \mathcal{F}[\mathcal{V}]$ und $\star \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.

Diese Liste mag viel umständlicher erscheinen als die vorher gegebene Gleichung. Sie enthält aber genau das, was wir brauchen, um Beweise durch Induktion über Formeln zu führen. Und ganz nebenbei definiert sie d, wie wir anhand des folgenden Satzes leicht feststellen werden.

Übungsaufgabe 1.1.10. Unter der *Größe* $|A|$ von A wollen wir die Anzahl der Auftreten von Zeichen *außer Hilfssymbolen* verstehen. (Zumindest vorläufig — in **??** werden wir ein leichter zu handhabendes Größenmaß verwenden.)

(a) Geben Sie eine Liste von Bedingungen an $|?|$ analog jener aus dem vorangegangenen Beispiel an.

(b) Zeigen Sie, daß für jede Formel A der Ungleichung $|A| < 2^{d(A)+1}$ genügt.

Satz 1.1.11 (Rekursionstheorem). *Es sei X eine Menge. Ferner sei eine Abbildung $\varphi : \mathcal{V} \to X$ sowie Elemente $f_\top$, $f_\bot \in X$ und Operationen $f_\neg : X \to X$ und $f_\wedge$, $f_\vee$, $f_\rightarrow$, $f_\leftrightarrow : X \times X \to X$ gegeben. Es gibt genau eine Abbildung $\hat{\varphi} : \mathcal{F}[\mathcal{V}] \to X$ mit den Eigenschaften*

$$\left.\begin{array}{l}
\bullet\ \hat{\varphi}(v) = \varphi(v) \text{ für alle } v \in \mathcal{V}; \\
\bullet\ \hat{\varphi}(\top) = f_\top \text{ und } \hat{\varphi}(\bot) = f_\bot; \\
\bullet\ \hat{\varphi}(\neg A) = f_\neg(\hat{\varphi}(A)) \text{ für alle } A \in \mathcal{F}[\mathcal{V}]; \\
\bullet\ \hat{\varphi}(A \star B) = f_\star(\hat{\varphi}(A), \hat{\varphi}(B)) \text{ für alle } A,\ B \in \mathcal{F}[\mathcal{V}] \text{ und } \star \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}.
\end{array}\right\}(*)$$

Der *Beweis* ist etwas technisch, gibt uns aber Gelegenheit, auf mehrere wichtige Punkte einzugehen. Die Ausformulierung einiger Details verbleibt als Übungsaufgabe.

Die Eindeutigkeit ist leicht zu zeigen: ist $\hat{\varphi}'$ eine weitere solche Abbildung, so folgt $\hat{\varphi}(A) = \hat{\varphi}'(A)$ für alle $A \in \mathcal{F}[\mathcal{V}]$ durch Induktion über Formeln.

Wir zeigen die Existenz, indem wir $\hat{\varphi}$ als *Relation* zwischen $\mathcal{F}[\mathcal{V}]$ und X einführen, d. h. als Teilmenge von $\mathcal{F}[\mathcal{V}] \times X$. Dabei ersetzen wir $(*)$ durch die Bedingungen

$$\left.\begin{array}{l}
\bullet\ (v, \varphi(v)) \in \hat{\varphi} \text{ für alle } v \in \mathcal{V};\\
\bullet\ (\top, f_\top),\ (\bot, f_\bot) \in \hat{\varphi};\\
\bullet\ \text{wenn } (A, x) \in \hat{\varphi}, \text{ dann auch } (\neg A, f_\neg(x)) \in \hat{\varphi};\\
\bullet\ \text{wenn } (A, x),\ (B, y) \in \hat{\varphi}, \text{ dann auch } (A \star B, f_\star(x, y)) \in \hat{\varphi} \text{ für jedes } \star \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}.
\end{array}\right\}(**)$$

Man bemerke, daß $(*)$ eine vereinfachende Umformulierung von $(**)$ ist für den Fall, daß $\hat{\varphi}$ tatsächlich eine Abbildung ist. Wir verlangen nun, daß $\hat{\varphi}$ durch $(**)$ *induktiv* definiert wird; d. h., $\hat{\varphi}$ soll die minimale Teilmenge von $\mathcal{F}[\mathcal{V}] \times X$ sein, die $(**)$. Wie schon in Definition 1.1.1 (wo es um $\mathcal{F}[\mathcal{V}] \subseteq \Sigma[\mathcal{V}]^*$ ging), kann man sich auf verschiedene Weisen klar machen, daß eine solche Teilmenge tatsächlich existiert.

Damit die Relation $\hat{\varphi}$ eine Abbildung ist, muß sie linkseindeutig und linkstotal sein, d. h. für jedes $C \in \mathcal{F}[\mathcal{V}]$ darf höchstens ein und muß mindestens ein $z \in X$ mit $(C, z) \in \hat{\varphi}$ existieren. Beides kann durch jeweils eine Induktion über Formeln nachgewiesen werden. Was die Linkstotalität betrifft, brauchen wir nur, daß $(**)$ erfüllt ist. Was die Linkseindeutigkeit betrifft, brauchen wir Lemma 1.1.6 und die Minimalität von $\hat{\varphi}$. □

Übungsaufgabe 1.1.12. Führen Sie die Details der drei genannten Teilbeweise durch Induktion über Formeln aus.

Eine Anwendung des Rekursionstheorems wird dadurch angezeigt, daß gesagt wird, die hier $\hat{\varphi}$ genannte Abbildung werde mittels Induktion über Formeln definiert. Statt expliziter Definitionen von φ und der $f_\star$ ($\star \in \{\top, \bot, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$) werden meist nur die rechten Seiten von $(*)$ angegeben.

Beispiel 1.1.13. Die Tiefenabbildung $d : \mathcal{F}[\mathcal{V}] \to \mathbf{N}$ wird mittels Induktion über Formeln durch die im zweiten Absatz von Definition **??** angegebenen Formeln definiert. Für eine explizite Anwendung des Rekursionstheorems setzen wir $X = \mathbf{N}$ und

- $\varphi(v) = 0$,
- $f_\top,\ f_\bot = 1$,
- $f_\neg(n) = 1 + n$ für alle $n \in \mathbf{N}$,
- $f_\star(n, m) = 1 + \max\{n, m\}$ für alle $n,\ m \in \mathbf{N}$ und $\star \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$;

damit ist $d = \hat{\varphi}$.

Wenn die Elemente und Operationen $f_\star$ explizit angegeben werden, so liegt es meist nahe, sie mit den entsprechenden Junktorsymbolen $\star$ zu bezeichnen. Man mag einwenden, daß diese Symbole doch bereits spätestens für gewisse Formeln und Formeloperationen vergeben worden sind; aber solche Mehrfachbenutzung ist in der Algebra gang und gäbe und sollte auch hier nicht zu Verwechslungen führen. Wir verwenden dann selbstverständlich auch dieselben Konventionen für die Notation der Operationen. Die Eigenschaften $(*)$ erscheinen dann als

- $\hat\varphi(v) = \varphi(v)$ für alle $v \in \mathcal{V}$;
- $\hat\varphi(\top) = \top$ und $\hat\varphi(\bot) = \bot$;
- $\hat\varphi(\neg A) = \neg\hat\varphi(A)$ für alle $A \in \mathcal{F}[\mathcal{V}]$;
- $\hat\varphi(A \star B) = \hat\varphi(A) \star \hat\varphi(B)$ für alle A, $B \in \mathcal{F}[\mathcal{V}]$ und $\star \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.

(Diese Eigenschaften lassen sich zusammenfassen, indem man sagt: $\hat\varphi$ setzt die Abbildung φ fort zu einem Homomorphismus $\mathcal{F}[\mathcal{V}] \to X$ von $\{\top, \bot, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$-Strukturen. Das Rekursionstheorem besagt somit, daß $\mathcal{F}[\mathcal{V}]$ die freie $\{\top, \bot, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$-Struktur über der Menge $\mathcal{V}$ ist.)

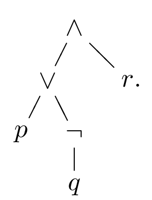
Alles, was wir in der Folge über $\mathcal{F}[\mathcal{V}]$ aussagen werden, können und sollten wir allein aus dem Rekursionstheorem ableiten. Wir hätten also das Rekursionstheorem auch als Axiom ganz an den Anfang der Vorlesung stellen können und uns später Gedanken machen, ob es eine solche Struktur $\mathcal{F}[\mathcal{V}]$ überhaupt gibt. (Die Situation ist sehr ähnlich wie etwa in der linearen Algebra: Entweder man beginnt mit n-gliedrigen Folgen reeller Zahlen und führt darauf Addition und skalare Multiplikation ein. Oder man beginnt mit den Axiomen eines reellen Vektorraums zuzüglich n-Dimensionalität.)

Wenn man sich solche Gedanken macht, wird man vielleicht (hoffentlich?) auf andere, unter gewissen Aspekten bessere Lösungen kommen. Unsere Wahl folgt im wesentlichen der Tradition, die sich an der Umgangssprache orientiert. Die Klammerung von Formeln mit 0- und 1-stelligen äußeren Junktorsymbolen hätten wir uns sparen können. Der Versuch, weitere Klammern einzusparen, führt zu unnötigen Komplikationen. Grundsätzlich andere Möglichkeiten sind

- die polnische Notation und die umgekehrte polnische Notation. Auch hier sind Formeln Wörter. In einer molekularen Formel tritt das äußere Junktorsymbol (oder ein gleichbedeutendes, typographisch geeigneteres) vor bzw. hinter alle Gliedformeln; auf Hilfssymbole wird ganz verzichtet. Z. B. erscheint $(p \vee \neg q) \wedge r$ als

  $$\mathrm{KA}p\mathrm{N}qr \qquad \text{bzw.} \qquad pq\mathrm{NA}r\mathrm{K}.$$

- die Baumdarstellung. Wie der Name schon andeutet, ist eine Formel hier ein Baum, dessen Knoten je ein Junktorsymbol oder eine Variable zugeordnet ist. Die Anzahl der Nachfolgerknoten ist im ersteren Falle die Stelligkeit, im letzteren Falle 0. Z. B. erscheint $(p \vee \neg q) \wedge r$ als



Was die Eignung für menschliche Kommunikation betrifft, haben alle drei nachteile. Die polnische wie die umgekehrte polnische Notation ist unübersichtlich; es fehlt an Redundanz. Die Baumdarstellung dagegen hat der Redundanz zu viel, nämlich in dem zusätlich benötigten vertikalen Platz. Ferner hat sie den

Nachteil, daß Bäume weitaus schwieriger mathematisch zu definieren sind als Wörter; der Logiker wird an dieser Stelle keine mengentheoretischen Spitzfindigkeiten akzeptieren.

In der Folge verwenden wir (meist implizit) das Rekursionstheorem, um einige weitere wichtige Begrifflichkeiten einzuführen. Mitunter hilft es dem Verständnis, daß auch eine direkte Definition über die von uns gewählte Darstellung von Formeln als Wörter schnell zur Hand wäre.

Die Anzahl $\#_w(A)$ der Auftreten einer Variable w in A ist, wiederum mittels Induktion über A, definiert durch

- $\#_w(v) = \delta_{v,w}$ (Kronecker-Symbol),
- $\#_w(\top)$, $\#_w(\bot) = 0$,
- $\#_w(\neg B) = \#_w(B)$,
- $\#_w(B \star C) = \#_w(B) + \#_w(C)$.

Die Menge aller $\mathcal{V}_A$ aller in der Formel A tatsächlich auftretenden Variablen ist mittels Induktion über A definiert durch

- $\mathcal{V}_v = \{v\}$,
- $\mathcal{V}_\top$, $\mathcal{V}_\bot = \varnothing$,
- $\mathcal{V}_{\neg B} = \mathcal{V}_B$,
- $\mathcal{V}_{B\star C} = \mathcal{V}_B \cup \mathcal{V}_C$.

Hierbei können wir $\mathcal{V}_?$ als Abbildung in die Potenzmenge $\mathfrak{P}\mathcal{V}$ von $\mathcal{V}$ auffassen, oder besser in die Menge $\mathfrak{P}_\omega\mathcal{V}$ aller endlichen Teilmengen von $\mathcal{V}$. Selbstredend wäre auch eine direkte Definition durch

$$\mathcal{V}_A = \{\, v \in \mathcal{V} \mid \#_v(A) > 0 \,\}$$

möglich.

Die *Teilformeln* von A (eingefleischte Lateiner dürfen statt ‚Teilformel' ‚Subformel' sagen) sind A selbst sowie die Teilformeln aller Gliedformeln von A. Das ist die kurze Prosaform einer Definition mittels Induktion über A: bezeichnen wir die Menge aller Teilformeln von A mit $S(A)$, so soll

- $S(v) = \{v\}$,
- $S(\top) = \{\top\}$ und $S(\bot) = \{\bot\}$,
- $S(\neg B) = \{\neg B\} \cup S(B)$,
- $S(B \star C) = \{B \star C\} \cup S(B) \cup S(C)$

gelten. Als Bildbereich von S kann $\mathfrak{P}_\omega\mathcal{F}[\mathcal{V}]$ dienen. Die Teilformeln der Gliedformeln heißen übrigens auch *echte* Teilformeln.

Doch hoppla: Was sollen denn hier die Operationen $f_\star$ für $\star \in \{\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$ sein? Für z. B. $\star = \neg$ enthält die rechte Seite der Gleichung ein B, das nicht Argument von S ist. Einige von Ihnen werden nun vielleicht rätseln, wie man B aus $S(B)$ zu rekonstruieren kann (das ist noch recht schmerzlos) und wie man diese Konstruktion zu einer Abbildung $\mathfrak{P}_\omega\mathcal{F}[\mathcal{V}] \to \mathcal{F}[\mathcal{V}]$ erweitern kann (spätestens hier wird es skurril). Doch das alles braucht uns nicht zu interessieren. Statt S werden wir als unmittelbares Ergebnis dem Rekursionstheorem die Abbildung

(id, S) in $\mathcal{F}[\mathcal{V}] \times \mathfrak{P}_\omega \mathcal{F}[\mathcal{V}]$ entnehmen. Dabei ist es sinnig, die Operationen der Zielmenge direkt mit den Junktorsymbolen zu schreiben (also ohne die ‚f'): wir erhalten $(\mathrm{id}, S) = \hat{\varphi}$ für

- $\varphi(v) = \{v\}$,
- $\top = (\top, \{\top\})$ und $\bot = (\bot, \{\bot\})$,
- $\neg(A, \Gamma) = (\neg A, \{\neg A\} \cup \Gamma)$,
- $(A, \Gamma) \star (B, \Delta) = (A \star B, \{A \star B\} \cup S(A) \cup S(B))$.

Übungsaufgabe 1.1.14. Zeigen Sie: Tielformeln von A sind genau solche Formeln, die (gemäß unserer ursprünglichen Definition) als (zusammenhängende) Teilwörter von A auftreten.

[Substitution; *Auftreten* von Teilformeln; *allgemeine* Induktion über Formeln]

1.2 Semantik

1.2.1 Belegungen und Bewertungen

[...
...]

Definition 1.2.1. Eine *Belegung* von $\mathcal{V}$ ist eine Abbildung von $\mathcal{V}$ in die Menge $\mathbf{B} = \{0, 1\}$.

Zur Bezeichnung von Belegungen verwenden wir bevorzugt die griechischen Buchstaben ‚φ' und ‚ψ'. (Daher auch die Benutzung von ‚φ' in der Formulierung des Rekursionstheorems.)

Zu einer Belegung φ gehört eine *Bewertung* $\hat{\varphi}$. Hierbei handelt es sich um eine Abbildung von $\mathcal{F}[\mathcal{V}]$ in $\mathbf{B}$, die [...]

$$\hat{\varphi}(v) = \varphi(v) \qquad \text{für atomare Formeln } v.$$

Was molekulare Formeln angeht, würden wir gerne die Junktorsymbole mittels ihrer umgangssprachlichen entsprechungen übersetzen. Wir würden also gerne sagen:

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}(\top) = 1 &\iff \text{wahr,} \\
\hat{\varphi}(\bot) = 1 &\iff \text{falsch,} \\
\hat{\varphi}(\neg B) = 1 &\iff \text{nicht } \hat{\varphi}(B) = 1, \\
\hat{\varphi}(B \wedge C) = 1 &\iff \hat{\varphi}(B) = 1 \text{ und } \hat{\varphi}(C) = 1, \\
\hat{\varphi}(B \vee C) = 1 &\iff \hat{\varphi}(B) = 1 \text{ oder } \hat{\varphi}(C) = 1, \\
\hat{\varphi}(B \to C) = 1 &\iff \text{wenn } \hat{\varphi}(B) = 1, \text{ dann } \hat{\varphi}(C) = 1, \\
\hat{\varphi}(B \leftrightarrow C) = 1 &\iff \hat{\varphi}(B) = 1 \text{ genau dann, wenn } \hat{\varphi}(C) = 1.
\end{aligned}$$

Für $\neg$, $\wedge$ und $\vee$ ist diese Definition kaum zu beanstanden. [‚oder' einschließend.] Auf das mit $\top$ und $\bot$ verbundene (sprachliche) Problem sind wir bereits eingegangen. Bleibt eine Schwierigkeit der umgangssprachlichen Semantik bezüglich $\to$ und $\leftrightarrow$. Üblicherweise verwenden wir (im Bereich der echten Wissenschaften) einen ‚wenn ..., dann ...'-Satz nur dann, wenn er von etwas Unbestimmten handelt, von dem prinzipiell der Wahrheitsgehalt des ‚wenn'-Satzes abhängt. Das ist hier *nicht* der Fall, denn der Punkt ist ja gerade, daß zur Definition von z. B. $\hat{\varphi}(B \to C)$ die Werte $\hat{\varphi}(B)$ und $\hat{\varphi}(C)$ bereits definiert sein müssen. Was wir meinen ist dies: *Wenn* $\hat{\varphi}(B) = 1$, *dann* ist tatsächlich $\hat{\varphi}(C) = 1$ die Voraussetzung für $\hat{\varphi}(B \to C) = 1$. Andernfalls ist die Bedingung trivialerweise erfüllt, unabhängig davon, ob $\hat{\varphi}(C) = 1$.

Um jedweden Interpretationsspielraum zu beseitigen, werden wir uns in unserer offiziellen Definition an den Formalismus des Rekursionstheorems halten und die benutzten Operationen auf **B** durch explizite Angabe ihrer jeweiligen Werte definieren.

Definition 1.2.2. Sei φ eine Belegung. Die zu φ gehörende *Bewertung* $\hat{\varphi}$ ist die durch Induktion über Formeln definierte Funktion $\hat{\varphi}$ für die Operationen auf **B**, die durch folgende Tabellen definiert sind.

$\top$	$\bot$
1	0

a	$\neg a$
0	1
1	0

a	b	$a \land b$	$a \lor b$	$a \to b$	$a \leftrightarrow b$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Falls $\hat{\varphi}(A) = 1$, so sagen wir, A sei *wahr unter* φ, oder φ *erfülle* A. Falls die Belegung φ jedes Element einer Formelmenge Γ erfüllt, so sagen wir kurz, φ erfülle Γ. Falls $\hat{\varphi}(A) = 0$, so sagen wir, A sei *falsch unter* φ.

Beispiel 1.2.3. Es sei $\mathcal{V} = \{p, q, r\}$; wir betrachten die Formel $A = p \lor q \to (q \leftrightarrow r) \land \neg(p \lor \neg r)$ und die Belegung φ mit $\varphi(p) = 1$, $\varphi(q) = 0$ und $\varphi(r) = 0$. Was ist $\hat{\varphi}(A)$? — Wir wollen den Formalismus gering halten und schreiben die Zwischenergebnisse unter die betreffenden Teilformeln:

$$\underbrace{\underbrace{\underset{1}{p} \lor \underset{0}{q}}_{1} \to \underbrace{(\underbrace{\underset{0}{q} \leftrightarrow \underset{0}{r}}_{1}) \land \underbrace{\neg(\underbrace{\underset{1}{p} \lor \underbrace{\neg \underset{0}{r}}_{1}}_{1})}_{0}}_{0}}_{0}.$$

Der Gesamtformel wird der Wert 0 zugewiesen, sie ist also falsch unter φ.

Der vertikale Platzbedarf dieser Rechnung läßt sich reduzieren, indem man das Zwischenergebnis für jedes Auftreten einer molekularen Teilformel unter dem entsprechenden Auftreten ihres äußersten Junktorsymbols placiert:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} p & \lor & q & \to & (& q & \leftrightarrow & r &) & \land & \neg & (& p & \lor & \neg & r\,). \\ 1 & 1 & 0 & \mathbf{0} & & 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 & & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Der Nachteil ist, daß nicht unmittelbar augenfällig ist, in welcher Reihenfolge diese Zwischenergebnisse erhalten werden. Deshalb ist hier das Endergebnis durch Fettdruck ausgezeichnet.

Wie wir leicht einsehen, ist bei gegebenem $a \in \mathbf{B}$ genau eine der beiden Zahlen a und $\neg a$ die 1. Eine Belegung φ erfüllt also bei gegebenem $A \in \mathcal{F}[\mathcal{V}]$

genau eine der beiden Formeln A und $\neg A$. Gelegentlich ist es praktisch, für diese Formel eine Notation zu haben; wir werden ‚${}^{\varphi}A$' verwenden. Ist Γ eine Formelmenge, so schreiben wir entsprechend ${}^{\varphi}\Gamma$ für die (von φ erfüllte) Menge $\{ {}^{\varphi}A \mid A \in \Gamma \}$.

Speziell können wir $\mathcal{V}$ als die Menge der atomaren Formeln auffassen. Die Formelmenge ${}^{\varphi}\mathcal{V}$ hat offensichtlich sehr spezielle Eigenschaften:

- Sie enthält ausschließlich Formeln der Formen v und $\neg v$ (wobei jeweils $v \in \mathcal{V}$). Solche Formeln werden *Literale* genannt.
- Für jedes $v \in \mathcal{V}$ enthält sie genau eine der beiden Formeln v und $\neg v$.

Wir nennen Formelmengen mit diesen Eigenschaften *maximale erfüllbare Literalmengen* (was das Ergebnis der folgenden Übungsaufgabe vorwegnimmt). Jede maximale erfüllbare Literalmenge Λ wird von genau einer Belegung φ erfüllt, wobei sogar $\Lambda = {}^{\varphi}\mathcal{V}$ gilt: setze

$$\varphi(v) = \begin{cases} 1, & \text{falls } v \in \Lambda, \\ 0, & \text{falls } \neg v \in \Lambda. \end{cases}$$

Belegungen stehen somit in einer natürlichen Bijektion mit maximal erfüllbaren Literalmengen.

Übungsaufgabe 1.2.4.
- Zeigen Sie, daß eine Menge von Literalen genau dann erfüllbar ist, wenn sie für jede Variable v höchstens eine der beiden Formeln v und $\neg v$ enthält.
- Konstruieren Sie eine natürliche Bijektion der Menge erfüllbarer Literalmengen mit der Menge der partiellen Abbildungen von $\mathcal{V}$ in $\mathbf{B}$.

1.2.2 Tautologien und logische Folgerung

Halten wir nun eine Formel A fest und fragen, welche Werte $\hat{\varphi}(A)$ in Abhängigkeit von der Belegung φ durchläuft. Schreiben wir die Menge aller Belegungen als $\mathbf{B}^{\mathcal{V}}$, so erhalten wir eine Abbildung $f_A : \mathbf{B}^{\mathcal{V}} \to \mathbf{B}$. Ist die Variablenmenge $\mathcal{V}$ endlich, so auch die Belegungsmenge $\mathbf{B}^{\mathcal{V}}$ (es gilt dann $|\mathbf{B}^{\mathcal{V}}| = 2^{|\mathcal{V}|}$), und wir können f_A durch eine Wertetabelle angeben.

Beispiel 1.2.5. Was ist f_A für die Formel A aus Beispiel 1.2.3? — Wir legen eine Wertetabelle für f_A an. Die Belegungen φ (und damit die Urbilder von f_A) werden den Zeilen entsprechen. Unserem Vorgehen in Beispiel 1.2.3 entsprechend wollen wir auch alle Zwischenergebnisse festhalten, also die $f_{A'}(\varphi) = \hat{\varphi}(A')$ für alle Teilformeln A' von A. Wir gehabt placieren wir sie unter den jeweiligen äußeren Junktorsymbolen. So erhalten wir

p	q	r	$p \vee q \to (q \leftrightarrow r) \wedge \neg(p \vee \neg r)$
0	0	0	0 **1** 1 0 0 1 1
0	0	1	0 **1** 0 0 1 0 0
0	1	0	1 **0** 0 0 0 1 1
0	1	1	1 **1** 1 1 1 0 0
1	0	0	1 **0** 1 0 0 1 1
1	0	1	1 **0** 0 0 0 1 0
1	1	0	1 **0** 0 0 0 1 1
1	1	1	1 **0** 1 0 0 1 0

Eine Wertetabelle für f_A heißt auch *Wahrheitstafel* für A.

Tautologien

Besonderes Interesse gilt den Formeln A, für die f_A konstant 1 oder konstant 0 ist.

Definition 1.2.6.
- Eine Formel A ist *allgemeingültig* oder eine *Tautologie*, in Zeichen $\models A$, wenn sie von jeder Belegung erfüllt wird.
- Eine Formel oder Formelmenge heißt *erfüllbar*, wenn sie von irgendeiner Belegung erfüllt wird; sonst heißt sie *unerfüllbar*.

Bei diesen Begriffen spielt es keine Rolle, in welcher Variablenmenge die Formel oder Formelmenge betrachtet wird. Insbesondere gilt: eine Formel A (in $\mathcal{V}$) ist genau dann allgemeingültig, wenn sie auch allgemeingültig als Formel in der (endlichen) Menge $\mathcal{V}_A$ jener Variablen ist, die tatsächlich in ihr auftreten. Ist nämlich φ eine Belegung von $\mathcal{V}$, so ergibt die Beschränkung des Definitionsbereichs auf $\mathcal{V}_A$ eine Belegung $\varphi\restriction_{\mathcal{V}_A}$, für die $\widehat{\varphi\restriction_{\mathcal{V}_A}}(A) = \hat{\varphi}(A)$ gilt; und umgekert kann jede Belegung ψ von $\mathcal{V}_A$ zu einer Belegung ψ' von $\mathcal{V}$ erweitert werden (wenn wir konkret sein wollen, setzen wir $\psi'(v) = 0$ für alle $v \notin \mathcal{V}_A$), und es gilt $\hat{\psi}'(A) = \widehat{\psi'\restriction_{\mathcal{V}_A}}(A) = \hat{\psi}(A)$. Wenn also $\hat{\varphi}(A) = 1$ für alle Belegungen φ von $\mathcal{V}$, so $\hat{\psi}(A) = \hat{\psi}'(A) = 1$ für alle Belegungen ψ von $\mathcal{V}_A$; und wenn $\hat{\psi}(A) = 1$ für alle Belegungen ψ von $\mathcal{V}_A$, so $\hat{\varphi}(A) = \widehat{\varphi\restriction_{\mathcal{V}_A}}(A) = 1$ für alle Belegungen φ von $\mathcal{V}$. Entsprechend kann für Erfüllbarkeit argumentiert werden.

Beispiel 1.2.7. Wir überzeugen uns davon, daß $A = (p \to q) \vee (q \to r)$ allgemeingültig ist. Dazu ermitteln wir f_A, als Formel in $\mathcal{V}_A = \{p, q, r\}$ betrachtet:

p	q	r	$(p \to q)$	$\vee$	$(q \to r)$
0	0	0	1	**1**	1
0	0	1	1	**1**	1
0	1	0	1	**1**	0
0	1	1	1	**1**	1
1	0	0	0	**1**	1
1	0	1	0	**1**	1
1	1	0	1	**1**	0
1	1	1	1	**1**	1

Alle Funktionswerte sind 1, mit dem gewünschten Ergebnis.

Es läßt sich auch elegant argumentieren. Für eine Belegung φ gilt entweder $\varphi(q) = 1$ oder $\varphi(q) = 0$. Im ersteren Falle weist $\hat{\varphi}$ dem vorderen Disjunktionsglied von A den Wert 1 zu, im letzteren Falle dem hinteren.

[Allgemeingültigkeit bleibt erhalten unter Substitution; Erfüllbarkeit wird reflektiert.]

Beispiel 1.2.8. In Fortsetzung des vorangegangenen Beispiels finden wir mittels der offensichtlichen Substitution, daß für beliebige Formeln F, G und H die Formel $(F \to G) \vee (G \to H)$ allgemeingültig ist. (Dies könnten wir auch einsehen, indem wir mit derselben Wahrheitstafel argumentieren. Dabei spielt es keine Rolle, daß für konkrete F, G und H gewisse Kombinationen von Wahrheitswerten unmöglich sein könnten.)

Übungsaufgabe 1.2.9. Zeigen Sie, daß die folgenden Formeln allgemeingültig sind.

- $B \to (A \to B)$,
- $(A \to B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$,
- $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$.

Beobachtung 1.2.10. *Eine Formel A ist genau dann allgemeingültig, wenn $\neg A$ unerfüllbar ist.*

Beobachtung 1.2.11. *Ist eine Formelmenge erfüllbar, so auch jede Teilmenge.*

Definition 1.2.12. Eine Formel A *folgt logisch* aus einer Formelmenge Γ, in Zeichen $\Gamma \vDash A$, falls jede Belegung, die Γ erfüllt, auch A erfüllt.

In der hier eingeführten Notation (‚$\Gamma \vDash A$') wie auch in ähnlichen Notationen, zu denen wir noch kommen, gelten für die Angabe der Formelmengen sehr lockere Konventionen. So wird eine Vereinigung gerne durch Kommata angezeigt (‚$\Gamma, \Delta \vDash A$' statt ‚$\Gamma \cup \Delta \vDash A$'), und die Mengenklammern um Einzelelemente werden gerne weggelassen (‚$B \vDash A$' statt ‚$\{B\} \vDash A$'). Im Falle einer endlichen Formelmenge $\{B_1, \ldots, B_n\}$ dürfen wir also statt ‚$\{B_1, \ldots, B_n\} \vDash A$' auch ‚$B_1, \ldots, B_n \vDash A$' schreiben.

Beispiel 1.2.13. Es gelten $p \wedge q \vDash p$ und $p, q \vDash p \wedge q$ und $p \vDash p \vee q$ und $p \vee q, \neg q \vDash p$, aber weder $p \vDash p \wedge q$ noch $p \vee q \vDash p$.

[...]

Beobachtung 1.2.14. *Die folgenden drei Bedingungen an eine Formel A sind äquivalent.*

(i) Es gilt $\vDash A$ (d. h., A ist allgemeingültig).

(ii) Es gilt $\varnothing \vDash A$.

(iii) Es gibt eine Menge Γ allgemeingültiger Formeln mit $\Gamma \vDash A$.

Wir können also in unserer Notation für Allgemeingültigkeit eine weitere Instanz unserer lockeren Konventionen bezüglich ‚$\vDash$' sehen: für die leere Menge dürfen wir *nichts* schreiben.

Die Menge aller logischen Folgen einer Formelmenge Γ bezeichnen wir mit $\Gamma^{\vDash}$. Also

$$\Gamma^{\vDash} = \{\, A \in \mathcal{F}[\mathcal{V}] \mid \Gamma \vDash A \,\}.$$

In dem folgenden Ergebnis sind mehrere Beobachtungen zusammengefaßt.

Lemma 1.2.15. *Die Abbildung $\Gamma \mapsto \Gamma^{\vDash}$ ist ein Hüllenoperator auf $\mathcal{F}[\mathcal{V}]$.*

Erinnern wir uns, daß es sich bei einem *Hüllenoperator* auf einer Menge X um eine Selbstabbildung h von $\mathfrak{P}X$ handelt, die den folgenden drei Bedingungen genügt:

(a) $U \subseteq h(U)$;

(b) $h(h(U)) \subseteq h(U)$;

(c) falls $U' \subseteq U$, dann $h(U') \subseteq h(U)$.

(Hierbei stehen ‚U' und ‚U'' für beliebige Teilmengen von X.)

Beweis. Drücken wir die laut Definition zu zeigenden Inklusionen elementeweise aus:

(a) falls $A \in \Gamma$, dann $\Gamma \vDash A$;

(b) falls $\Gamma^{\vDash} \vDash A$, dann $\Gamma \vDash A$;

(c) falls $\Gamma' \vDash A$ und $\Gamma' \subseteq \Gamma$, dann $\Gamma \vDash A$.

Diese Aussagen gelten mehr oder weniger trivialerweise. Nehmen wir z. B. (b): Erfüllt eine Belegung φ die Menge Γ, dann auch jedes Element von $\Gamma^{\vDash}$ und damit die Menge $\Gamma^{\vDash}$ selber. Mit der Voraussetzung $\Gamma^{\vDash} \vDash A$ folgt weiter, daß φ auch A erfüllt, wie gewünscht. □

Übungsaufgabe 1.2.16. Zeigen Sie, daß die Bedingungen (b) und (c) in der Definition eines Hüllenoperators zusammen ersetzt werden können durch:

(d) falls $U' \subseteq h(U)$, dann $h(U') \subseteq h(U)$.

Die folgenden beiden Lemmata zeigen, daß die Begriffe der Unerfüllbarkeit und der logischen Folgerung durch den jeweils anderen ausgedrückt werden können.

Lemma 1.2.17. *Die folgenden vier Bedingungen an eine Formelmenge Γ sind äquivalent.*

(i) Γ ist unerfüllbar.

(ii) $\Gamma \vDash A$ für alle Formeln A.

(iii) $\Gamma \vDash \bot$.

(iv) Es gibt eine Formel B mit $\Gamma \vDash B$ und $\Gamma \vDash \neg B$.

Beweis. Unter Annahme von (i) gilt (ii) trivialerweise, da keine Belegung den ‚wenn'-Satz in der Definition logischer Folgerung erfüllt; also (i)$\Longrightarrow$(ii). Aus (ii) erhalten wir sofort (iv) (betrachte $A = \bot$) und (iii) (wähle beliebiges B und betrachte $A = B$ und $A = \neg B$); also (ii)$\Longrightarrow$(iii) und (ii)$\Longrightarrow$(iv). Und gilt (iii) oder (iv), so müßte eine Γ erfüllende Bedingung auch $\bot$ bzw. sowohl B als auch $\neg B$ erfüllen, was jeweils unmöglich ist; also (iii)$\Longrightarrow$(i) und (iv)$\Longrightarrow$(i). Damit sind alle betreffenden Implikationen erfaßt. □

Lemma 1.2.18. *Es gilt $\Gamma \vDash A$ genau dann, wenn $\Gamma \cup \{\neg A\}$ unerfüllbar ist.*

Beweis. Notwendigkeit: Es gelte $\Gamma \vDash A$. Wir nehmen an, es gebe eine Belegung φ, die $\Gamma \cup \{\neg A\}$ erfüllt. Dann erfüllt φ insbesondere $\neg A$. Andererseits erfüllt φ auch die Teilmenge Γ, also auch die laut Voraussetzung logisch folgende Formel A. Aber φ kann nicht sowohl $\neg A$ als auch A erfüllen. Wir haben also einen Widerspruch; eine $\Gamma \cup \{\neg A\}$ erfüllende Belegung gibt es nicht.

Hinlänglichkeit: Sei $\Gamma \cup \{\neg A\}$ unerfüllbar. Sei φ eine Belegung, die die Formelmenge Γ erfüllt; wir wollen zeigen, daß φ auch die Formel A erfüllt. Wäre das nicht der Fall, dann würde φ stattdessen die Formel $\neg A$ erfüllen, und damit auch die Vereinigungsmenge $\Gamma \cup \{\neg A\}$; das aber ist laut Voraussetzung unmöglich. □

Das folgende Ergebnis besagt gewissermaßen, daß der Junktor $\to$ die logische Folgerelation $\vDash$ internalisiert.

Lemma 1.2.19 (Deduktionstheorem, semantisch). *Es gilt $\Gamma, B \vDash A$ genau dann, wenn $\Gamma \vDash B \to A$.*

Beweis. Notwendigkeit: Es gelte $\Gamma, B \vDash A$. Weiterhin sei φ eine Belegung, die Γ erfüllt; wir wollen zeigen, daß φ auch $B \to A$ erfüllt. Falls φ die Formel B nicht erfüllt, sind wir sofort fertig (denn $0 \to a$ ist stets 1). Sonst erfüllt φ die Formelmenge $\Gamma \cup \{B\}$, nach Voraussetzung also auch die Formel A, und wir sind ebenfalls fertig (denn $b \to 1$ ist ebenfalls stets 1).

Hinlänglichkeit: Jetzt gelte $\Gamma \vDash B \to A$. Weiterhin sei φ eine Belegung, die $\Gamma \cup \{B\}$ erfüllt; wir wollen zeigen, daß φ auch A erfüllt. Nun erfüllt φ einerseits die Teilmenge Γ von $\Gamma \cup \{B\}$, also nach Voraussetzung auch $B \to A$; andererseits erfüllt φ das Element B. Aus beidem zusammen folgt das Gewünschte (denn $1 \to a = 1$ nur für $a = 1$). □

Korollar 1.2.20. *Es gilt*

$$A, A \to B \vDash B.$$

Beweis. Aufgrund des Lemmas reicht es, die Beziehung $A \to B \vDash A \to B$ nachzuweisen, die trivialerweise besteht (Eigenschaft (a) eines Hüllenoperators). □

Übungsaufgabe 1.2.21. Zeigen Sie, daß $\vDash A \to B$ genau dann, wenn $\{A\}^{\vDash} \supseteq \{B\}^{\vDash}$.

Wir schließen diesen Abschnitt mit dem Hinweis, daß alle hier eingeführten Begriffe entscheidbar sind, solange die betrachteten Formelmengen *endlich* sind. Um etwa zu prüfen, ob eine endliche Formelmenge Γ erfüllbar ist, erstellen wir eine Wahrheitstafel. Wir brauchen Eingabespalten nur für solche Variablen, die tatsächlich in Γ (also in mindestens einem Element von Γ) vorkommen; davon gibt es nur endlich viele. Für jedes Element von Γ richten wir eine Ausgabespalte ein. Entsteht eine Zeile, die in all diesen Spalten den Wert 1 enthält, so ist Γ erfüllbar (und wir können in den Eingangsspalten eine erfüllende Belegung ablesen); sonst nicht.

1.2.3 Der Kompakheitssatz

Wir kommen jetzt zu einem zentralen Satz, der besagt, daß die Betrachtung endlicher Formelmengen in gewisser Weise ausreichend ist.

Satz 1.2.22 (Kompaktheitssatz). *Eine Formelmenge ist genau dann erfüllbar, wenn jede ihrer endlichen Teilmengen erfüllbar ist.*

Den Beweis wird am Ende dieses Abschnitts gegeben. An dieser Stelle folgt eine (etwas profane) Anwendung. Zartbesaitete Gemüter seien gewarnt, daß darin die gesellschaftlichen Verhältnisse finsterster Zeiten zum Ausdruck kommen.

Beispiel 1.2.23. Alle Junggesellen des Ortes sollen heiraten. Jeder von ihnen hat dem koordinierenden Gremium eine Liste derjenigen Mädchen übermittelt, die er als Ehefrau akzeptieren würde. Kann die angestrebte Massenhochzeit arrangiert werden, ohne daß gegen §172 StGB (Verbot der Vielehe) verstoßen wird?

Formal haben wir eine Menge M („Männer“), eine Menge F („Frauen“) und eine Abbildung $T : M \to \mathfrak{P}F$ („Traumfrauen“). Gesucht ist eine injektive Auswahlfunktion für T, also eine Abbildung $e : M \to F$ („Ehefrau“) mit $e(m) \in T(m)$ für alle $m \in M$ und $e(m') \neq e(m)$ für alle $m' \neq m$. Das ist eine spezielle Form von *Matching-Problem*.

Wie eine Lösung für den Einzelfall konkret gefunden werden kann, soll uns hier nicht interessieren. Stattdessen stellen wir uns vor, der Ort ist besonders groß: die Menge M ist vielleicht unendlich. Dennoch sind die Junggesellen bodenständig: jede der Mengen $T(m)$ ist endlich. Unter diesen Umständen ist unser Matching-Problem für M lösbar, *wenn* es für jede endliche Teilmenge von M lösbar ist.

Um dies mit den hier zur Verfügung gestellten Mitteln zu beweisen, wandeln wir die umgangssprachlich angegebenen Bedingungen in Aussageformen um. Als Variablen führen wir für jedes $(m, f) \in M \times F$ ein Symbol $p_{m,f}$ ein („Ehepaar“). Die Bedingungen können dann als

$$\begin{aligned} H_m &= \bigvee_{f \in T(m)} p_{m,f} && \text{(„heiratet Traumfrau“)}, \\ I_{m;f,f'} &= p_{m,f} \to \neg p_{m,f'} && \text{(„[Mann] bleibt monogam“)}, \\ J_{f;m,m'} &= p_{m,f} \to \neg p_{m',f} && \text{(„[Frau] bleibt monogam“)} \end{aligned}$$

widergegeben werden. Schreiben wir Γ für die Gesamtmenge; also

$$\begin{aligned} \Gamma = {} & \{\, H_m \mid m \in M \,\}, \\ & \cup \{\, I_{m;f,f'} \mid m \in M; f, f' \in F \,\}, \\ & \cup \{\, J_{f;m,m'} \mid f \in F; m, m' \in M \,\}. \end{aligned}$$

Gesucht ist eine Γ erfüllende Belegung.

Zur Existenz reicht nach dem Kompaktheitssatz, daß jede endliche Teilmenge Γ_0 erfüllbar ist. Betrachten wir also ein solches Γ_0. Daraus extrahieren wir die Menge M_* all jener Elemente von M, die als Indizes in Γ_0 vorkommen:

$$\begin{aligned} M_* = \{\, m \in M \mid {} & H_m \in \Gamma_0 \\ & \text{oder} \quad \text{es gibt } f, f' \in F \text{ mit } I_{m;f,f'} \in \Gamma_0 \\ & \text{oder} \quad \text{es gibt } f \in F \text{ und } m' \in M \text{ mit } J_{f;m,m'} \in \Gamma_0 \\ & \text{oder} \quad \text{es gibt } f \in F \text{ und } m' \in M \text{ mit } J_{f;m',m} \in \Gamma_0 \,\}. \end{aligned}$$

Mit Γ_0 ist auch M_* endlich. Also ist laut Voraussetzung unser Problem für M_* lösbar.

Betrachten wir nun die Menge Γ_* von Aussageformen, die wie Γ definiert ist, aber mit M_* anstelle von M. Der Lösung unseres Problems für M_* entspricht eine Γ_* erfüllende Belegung. Nun ist Γ_* eine Obermenge von Γ_0; also ist auch Γ_0 erfüllbar.

(Für praktische Zwecke — wenn es denn welche geben kann — hätten wir unsere aussagenlogische Formalisierung auch effizienter gestalten können. So brauchen wir nur solche Variablen $p_{m,f}$ zu verwenden, die auch für den Wahrheitswert 1 in Betracht kommen; d. h. mit $f \in T(m)$. Die Bedingungen $I_{m;f,f'}$ werden zur Sicherstellung der Lösbarkeit überhaupt nicht benötigt: eine Lösung mit möglicherweise polygamen Männern kann leicht auf eine gesetzeskonforme Lösung reduziert werden.)

Zurück zur grauen Theorie.

Korollar 1.2.24. *Sei A eine Formel, und sei Γ eine Formelmenge. Es gilt $\Gamma \models A$ genau dann, wenn $\Gamma_0 \models A$ für eine endliche Teilmenge von Γ_0 von Γ.*

(Auch dieses Ergebnis läuft unter dem Namen ‚Kompaktheitssatz'.)

Beweis. Wir haben

$$
\begin{aligned}
& \Gamma \models A \\
\iff\; & \Gamma \cup \{\neg A\} \text{ ist unerfüllbar} \\
\iff\; & \Gamma_1 \text{ ist unerfüllbar für eine endliche Teilmenge } \Gamma_1 \text{ von } \Gamma \cup \{\neg A\} \quad \text{(Komp.)} \\
\iff\; & \Gamma_0 \cup \{\neg A\} \text{ ist unerfüllbar für eine endliche Teilmenge } \Gamma_0 \text{ von } \Gamma \\
\iff\; & \Gamma_0 \models A \text{ für eine endliche Teilmenge } \Gamma_0 \text{ von } \Gamma,
\end{aligned}
$$

wobei in der ‚$\Longrightarrow$'-Richtung $\Gamma_0 = \Gamma_1 \cap \Gamma$ gewählt werden kann, womit $\Gamma_0 \cup \{\neg A\}$ zumindest eine Obermenge der unerfüllbaren Menge Γ_1 und deshalb selber unerfüllbar ist. □

Hier ist eine weitere Variation des Themas.

Korollar 1.2.25. *Sei Γ eine Formelmenge. Die folgenden beiden Aussagen sind äquivalent.*

(i) Jede Bewertung wird von einem $A \in \Gamma$ erfüllt.

(ii) Es gibt $A_1, \ldots, A_n \in \Gamma$, für die $A_1 \vee \cdots \vee A_n$ allgemeingültig ist.

Beweis. Offenbar ist $A_1 \vee \cdots \vee A_n$ genau dann allgemeingültig, wenn jede Bewertung von einem Element der Menge $\{A_1, \ldots, A_n\} \subseteq \Gamma$ erfüllt wird. Nun ist (i) äquivalent zur Unerfüllbarkeit der Formelmenge $\neg\Gamma = \{\, \neg A \mid A \in \Gamma \,\}$. Entsprechend ist, nach dem vorher Gesagten, (ii) äquivalent zur Unerfüllbarkeit einer endlichen Teilmenge von $\neg\Gamma$. Damit erhalten wir die gewünschte Äquivalenz, indem wir den Kompaktheitssatz auf $\neg\Gamma$ anwenden. □

Als eine im weistesten Sinne praktische Konsequenz des Kompaktheitssatzes ist es halbentscheidbar, ob eine durch effektive Aufzählung gegebene Menge von Formeln *un*erfüllbar ist: Man teste für $n = 1, 2, 3, \ldots$ die Teilmenge der ersten n Formeln auf Unerfüllbarkeit. Ist diese gegeben, so brechen wir ab mit dem Ergebnis, daß auch die Gesamtmenge unerfüllbar ist. Kommt ein solcher Abbruch nicht zustande, so ist die Gesamtmenge erfüllbar.

Dieses Verfahren läßt sich verfeinern, indem man jeweils die bei der Behandlung von n gefundenen Details bei der Behandlung von $n + 1$ weiterverwendet. Im Zusammenhang mit der Tableau-Methode werden wir uns explizit mit dieser Möglichkeit beschäftigen.

Kommen wir endlich zum Beweis des Kompaktheitssatzes. Dabei erweist es sich als praktisch, der dort genannten Bedingung einen Namen zu geben. Nennen wir deshalb eine Formelmenge *endlich erfüllbar*, falls jede ihrer endlichen Teilmengen erfüllbar ist.

Der entscheidende Punkt ist das folgende Ergebnis.

Lemma 1.2.26. *Sei $\mathit{\Gamma}$ eine Formelmenge, und sei A eine Formel. Ist $\mathit{\Gamma}$ endlich erfüllbar, so auch $\mathit{\Gamma} \cup \{A\}$ oder $\mathit{\Gamma} \cup \{\neg A\}$.*

Beweis. Sei $\mathit{\Gamma}$ endlich erfüllbar. Damit muß eine unerfüllbare endliche Teilmenge von $\mathit{\Gamma} \cup \{A\}$ oder $\mathit{\Gamma} \cup \{\neg A\}$ das Element A bzw. $\neg A$ enthalten, was wir im folgenden automatisch berücksichtigen. Wir nehmen an, daß $\mathit{\Gamma} \cup \{A\}$ nicht endlich erfüllbar ist, daß also für eine endliche Teilmenge $\mathit{\Gamma}_0$ von $\mathit{\Gamma}$ die Menge $\mathit{\Gamma}_0 \cup \{A\}$ unerfüllbar ist. Daraus wollen wir schließen, daß $\mathit{\Gamma} \cup \{\neg A\}$ endlich erfüllbar ist. Sei also $\mathit{\Gamma}_1$ eine weitere endliche Teilmenge von $\mathit{\Gamma}$; wir wollen zeigen, daß $\mathit{\Gamma}_1 \cup \{\neg A\}$ erfüllbar ist. Zu diesem Zwecke betrachten wir die Vereinigungsmenge $\mathit{\Gamma}_0 \cup \mathit{\Gamma}_1$. Diese ist eine endliche Teilmenge von $\mathit{\Gamma}$, hat also eine erfüllende Belegung φ. Da $\mathit{\Gamma}_0 \cup \{A\}$ unerfüllbar ist, kann φ nicht A erfüllen, erfüllt also stattdessen $\neg A$ und damit die Menge $\mathit{\Gamma}_1 \cup \{\neg A\}$. □

Beweis des Kompaktheitssatzes. Die Notwendigkeit der Bedingung ist klar.

Hinlänglichkeit: Sei $\mathit{\Gamma}$ eine endlich erfüllbare Formelmenge; wir wollen zeigen, daß $\mathit{\Gamma}$ erfüllbar ist. Zu diesem Zwecke wollen wir eine maximale erfüllbare Menge $\mathit{\Lambda}_*$ von Literalen finden, für die $\mathit{\Gamma} \cup \mathit{\Lambda}_*$ endlich erfüllbar ist.

Wir zeigen zunächst, daß die zu einem solchen $\mathit{\Lambda}_*$ gehörende Belegung φ_* (definiert durch ${}^{\varphi_*}\mathcal{V} = \mathit{\Lambda}_*$) die Menge $\mathit{\Gamma}$ erfüllt. Betrachte dazu eine Formel A aus $\mathit{\Gamma}$. Da $\mathit{\Gamma} \cup \mathit{\Lambda}_*$ endlich erfüllbar ist, hat die endliche Teilmenge $\{A\} \cup {}^{\varphi_*}\mathcal{V}_A$ (wobei $\mathcal{V}_A$ die Menge der in A auftretenden Variablen ist) eine erfüllende Belegung φ_A. Nun ist $\varphi_* \restriction_{\mathcal{V}_A}$ die einzige Belegung von $\mathcal{V}_A$, die ${}^{\varphi_*}\mathcal{V}_A$ erfüllt; also gilt $\varphi_A \restriction_{\mathcal{V}_A} = \varphi \restriction_{\mathcal{V}_A}$. Damit gilt auch $\hat{\varphi_A}(A) = \hat{\varphi}(A)$, weshalb die Formel A auch von φ erfüllt wird.

Kommen wir nun zur Konstruktion von $\mathit{\Lambda}_*$. Betrachten wir zunächst den typischen Fall, daß $\mathcal{V}$ abzählbar unendlich ist: $\mathcal{V} = \{p_0, p_1, \ldots\}$. (Für endliches $\mathcal{V}$ haben wir ein direkteres Argument: ist $\mathit{\Gamma}$ unerfüllbar, wähle für jede der endlich vielen Belegungen ein nicht erfüllendes Element.) Wir definieren induktiv eine aufsteigende Kette erfüllbarer Literalmengen $\mathit{\Lambda}_0 \subseteq \mathit{\Lambda}_1 \subseteq \cdots$ wie folgt:

$$\mathit{\Lambda}_0 = \varnothing; \qquad \mathit{\Lambda}_{n+1} = \begin{cases} \mathit{\Lambda}_n \cup \{p_n\}, & \text{falls } \mathit{\Gamma} \cup \mathit{\Lambda}_n \cup \{p_n\} \text{ endlich erfüllbar ist,} \\ \mathit{\Lambda}_n \cup \{\neg p_n\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit Hilfe des Lemmas sehen wir, daß jede der Mengen $\mathit{\Gamma} \cup \mathit{\Lambda}_n$ endlich erfüllbar ist. Sodann setzen wir

$$\mathit{\Lambda}_* = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \mathit{\Lambda}_n.$$

Dann ist auch $\mathit{\Gamma} \cup \mathit{\Lambda}_*$ endlich erfüllbar, denn jede endliche Teilmenge ist in einer der Mengen $\mathit{\Gamma} \cup \mathit{\Lambda}_n$ enthalten. Ferner tritt jede Variable p_n in $\mathit{\Lambda}_*$ auf, da sie bereits in $\mathit{\Lambda}_{n+1}$ auftritt. Kurzum sind alle gewünschten Bedingungen erfüllt.

Für überabzählbares $\mathcal{V}$ funktioniert praktisch dieselbe Konstruktion, ins Transfinite erweitert. Die Details sollen uns hier nicht interessieren. (Alternativ können wir den Anspruch, eine Konstruktion zu liefern, überhaupt aufgeben, und uns auf das Zornsche Lemma berufen. Wir erhalten dann Λ_* als ein maximales Element in der Menge aller erfüllbaren Literalmengen Λ, für die $\Gamma \cup \Lambda$ endlich erfüllbar ist.) □

Der Name ‚Kompaktheitssatz' bezeugt einen Bezug zur Topologie. Die Menge $\mathbf{B}^{\mathcal{V}}$ aller Belegungen wird zu einem topologischen Raum, indem wir als abgeschlossen die Teilmengen der Form $\operatorname{Mod}\Gamma = \{\varphi \in \mathbf{B}^{\mathcal{V}} \mid \varphi \text{ erfüllt } \Gamma\}$ für eine Formelmenge Γ erklären. Der Kompaktheitssatz besagt nun gerade, daß dieser Raum kompakt ist. Ein alternativer Beweis des Kompaktheitssatzes kann dadurch geführt werden, daß man die beschriebene Topologie als die Produkttopologie von $\mathbf{B}^{\mathcal{V}} = \prod_{v\in\mathcal{V}} \mathbf{B}$ erkennt, wobei jeder Faktorraum $\mathbf{B}$ mit der diskreten Topolgie ausgestattet ist, und darauf den Satz von Tychonoff anwendet.

1.2.4 Logische Äquivalenzen

Definition 1.2.27. Zwei Formeln A und B heißen *logisch äquivalent*, in Zeichen $A \vDash\Dashv B$, falls für jede Belegung φ gilt: $\hat{\varphi}(A) = \hat{\varphi}(B)$.

Eine Vielzahl an Beispielen logischer Äquivalenz sind in dem folgenden Satz zusammengefaßt.

Satz 1.2.28. *Für jeweils beliebige Formeln gilt*

$$
\begin{array}{rlrll}
A \wedge A & \vDash\Dashv A, & A \vee A & \vDash\Dashv A & (\text{Idempotenz}),\\
B \wedge A & \vDash\Dashv A \wedge B, & B \vee A & \vDash\Dashv A \vee B & (\text{Kommutativität}),\\
(A \wedge B) \wedge C & \vDash\Dashv A \wedge (B \wedge C), & (A \vee B) \vee C & \vDash\Dashv A \vee (B \vee C) & (\text{Assoziativität}),\\
A \wedge \top & \vDash\Dashv A, & A \vee \bot & \vDash\Dashv A & (\text{Neutralität}),\\
A \wedge (A \vee B) & \vDash\Dashv A, & A \vee (A \wedge B) & \vDash\Dashv A & (\text{Absorption}),\\
A \vee (B \wedge C) & \vDash\Dashv (A \vee B) \wedge (A \vee C), & A \wedge (B \vee C) & \vDash\Dashv (A \wedge B) \vee (A \wedge C) & (\text{Distributivität}),\\
A \vee \top & \vDash\Dashv \top, & A \wedge \bot & \vDash\Dashv \bot & (\quad\text{''}\quad),\\
A \wedge \neg A & \vDash\Dashv \bot, & A \vee \neg A & \vDash\Dashv \top & (\text{Komplementarität}),\\
\neg(A \wedge B) & \vDash\Dashv \neg A \vee \neg B, & \neg(A \vee B) & \vDash\Dashv \neg A \wedge \neg B & (\text{Morgansche Gesetze}),\\
 & \neg\neg A \vDash\Dashv A & & & (\text{Involutivität}).
\end{array}
$$

Beweis. Kann durch erstellen der Wahrheitstafeln erfolgen. Nehmen wir als Beispiel den linken Eintrag in der oberen der beiden mit der Bezeichnung ‚Distributivität' beschriebenen Zeilen. (Hier handelt es sich genauer um Distributivität *von* $\wedge$ *über* $\vee$.) Wir betrachten alle im allgemeinen möglichen Kombinationen von Wahrheitswerten, die eine Bewertung auf A, B und C annehmen kann:

A	B	C	$A \vee (B \wedge C)$		$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$		
0	0	0	**0**	0	0	**0**	0
0	0	1	**0**	0	0	**0**	1
0	1	0	**0**	0	1	**0**	0
0	1	1	**1**	1	1	**1**	1
1	0	0	**1**	0	1	**1**	1
1	0	1	**1**	0	1	**1**	1
1	1	0	**1**	0	1	**1**	1
1	1	1	**1**	1	1	**1**	1

In jeder Zeile stimmen die beiden fettgedruckten Einträge überein. □

[. . .]
[. . .]
[. . .]
[. . .]
[. . .]

1.2.5 Boolesche Funktionen

Wie wir gesehen haben, bestimmt jede Formel A eine Abbildung f_A der Menge $\mathbf{B}^{\mathcal{V}}$ der Belegungen in die Menge $\mathbf{B}$ der Wahrheitswerte, nämlich $\varphi \mapsto \hat{\varphi}(A)$. Liegt eine endliche Variablenmenge mit gegebener Aufzählung zugrunde, sagen wir $\mathcal{V} = \{p_1, \ldots, p_n\}$ (wobei jede Variable nur einmal genannt sein soll), dann steht $\mathbf{B}^{\mathcal{V}}$ auf natürliche Weise mit der Menge $\mathbf{B}^n$ der n-Tupeln von Wahrheitswerten in Bijektion: $\varphi \in \mathbf{B}^{\mathcal{V}}$ und $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{B}^n$ entsprechen einander, wenn $\varphi(p_i) = a_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Wir sparen uns hierfür eine eigene Notation und identifizieren einander entsprechende Elemente. Auf diese Weise wird f_A zu einer Abbildung von $\mathbf{B}^n$ in $\mathbf{B}$.

Eine Abbildung $\mathbf{B}^n \to \mathbf{B}$ wird auch n-stellige *boolesche Funktion* genannt, wobei $n \in \mathbf{N}$ beliebig ist. [. . .] Wie gerade beschrieben können viele boolesche Funktionen über Formeln konstruiert werden. Ist das vielleicht sogar für alle möglich? Wie wir sogleich sehen werden, lautet die Antwort: ‚Ja (und sogar recht spezielle).‘

Betrachten wir das Problem zunächst für kleine n. Die 0-stelligen booleschen Funktionen können mit ihren jeweiligen Funktionswerten identifiziert werden; es handelt sich also schlicht um die Wahrheitswerte 0 und 1. Wir haben die den Junktorsymbolen $\perp$ und $\top$ zugeordnet, und entsprechend werden sie dargestellt. Die 1-stelligen booleschen Funktionen sind zwei konstante, die wie die 0-stelligen behandelt werden können, die Identität, die durch die atomare Formel p_1 dargestellt wird, und die Transposition der beiden Elemente. Letztgenannte haben wir dem Junktorsymbol $\neg$ zugeordnet; deshalb wird sie durch $\neg p_1$ dargestellt. Die 2-stelligen booleschen Funktionen sind in der folgenden Wahrheitstafel zusammengefaßt und mit (möglichst kleinen) darstellenden Formeln versehen, wobei wir statt p_1 und p_2 eleganter p und q schreiben.

p	q	$\perp$	$p\wedge q$	$\neg(p\to q)$	p	$\neg(q\to p)$	q	$\neg(p\leftrightarrow q)$	$p\vee q$	$\neg(p\vee q)$	$p\leftrightarrow q$	$\neg q$	$q\to p$	$\neg p$	$p\to q$	$\neg(p\wedge q)$	$\top$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Satz 1.2.29. *Zu jeder booleschen Funktion $f : \mathbf{B}^n \to \mathbf{B}$ gibt es eine Formel A in $\mathcal{V} = \{p_1, \ldots, p_n\}$ mit $f_A = f$.*

Beweis. [Induktion: $A_f = (\neg p_n \wedge A_{f(\ ,0)}) \vee (p_n \wedge A_{f(\ ,1)})$.] □

Beispiel 1.2.30. Wenden wir die sich aus dem Beweis ergebende Konstruktion auf die Funktion mit der Wertetabelle

0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

an, erhalten wir die Formel [. . .]

Übungsaufgabe 1.2.31. Finden Sie für die Funktion aus dem vorangegangenen Beispiel eine darstellende Formel, die höchstens die Größe 9 hat.

Der Beweis des Satzes zeigt sogar noch mehr: Es gibt sogar eine darstellende Formel, die die Junktorsymbole $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$ nicht enthält. Die Junktoren $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\top$, $\bot$ reichen also aus, um alle booleschen Funktionen darzustellen. Sie bilden deshalb, was wir eine funktional vollständige Junktorenmenge nennen werden. Aber bevor wir zu diesem Begriff kommen, wollen wir erst letztgültig klären, was ein Junktor ist.

[. . .]

[. . .]

[. . .]

[. . .]

[. . .]

Kapitel 2

Deduktion

[. . .]

2.1 Deduktive Systeme

[. . .
. . .
. . .]

2.1.1 Schlußregeln und Theoreme

Definition 2.1.1. Ein *deduktives System* $\mathcal{K} = (\mathcal{F}, \mathcal{R})$ besteht aus

- einer Menge $\mathcal{F}$, deren Elemente wir *Formeln* nennen,
- einer Teilmenge $\mathcal{R}$ von $\mathcal{F}^* \times \mathcal{F}$, deren Elemente wir *Schlußregeln* oder kurz *Regeln* nennen.

Ist ein Element $(A_1, \ldots, A_k; B) \in \mathcal{F}^* \times \mathcal{F}$ eine Schlußregel, so schreibt man dafür auch

$$\frac{A_1 \qquad \cdots \qquad A_k}{B};$$

ferner nennt man A_1, . . . , A_k die *Prämissen* und B die *Konklusion*. Schlußregeln ohne Prämissen (der Fall $k = 0$) können mit ihren jeweiligen Konklusionen identifiziert werden; diese heißen auch *Axiome*. Gelegentlich werden wir Schlußregeln mit Prämissen (der Fall $k > 0$) *echte* Schlußregeln nennen.

In der Literatur wird meist verlangt, daß Formeln Wörter über einem ebenfalls gegebenen Alphabet sind. Das ist zwar häufig (und insbesondere in unseren wichtigsten Beispielen) der Fall oder kann zumindest leicht eingerichtet werden, und es ist unabdingbar für komplexitätstheoretische Betrachtungen. Aber für unsere Zwecke ist diese Einschränkung unnötig.

Ferner ist es weithin üblich (aber letztlich unpraktisch), Axiome nicht als Schlußregeln zu betrachten.

Die Schlußregeln sind üblicherweise in endlich vielen *Schemata* zusammengefaßt, meistens parametrisiert von Formeln. Statt von „Regelschemata“ und „Regeln“ würde man landläufig eher von „Regeln“ und ihren „Instanzen“ sprechen. (Würde die hiesige Vorstellung von einer Regel im allseits beliebten Sport

Fußball Anwendung finden, so gäbe es z. B. unendlich viele Abseitsregeln; eine für jede betreffende Konstellation der Spieler und des Balles.) Für unsere theoretischen Betrachtungen spielen diese Schemata jedoch keine Rolle, so daß unsere Verwendung des Wortes ‚Regel' (und ‚Axiom') angemessen ist. Dessenungeachtet sind einige der Regelschemata, denen wir begegnen werden, unter Namen bekannt, die schlicht auf ‚-Regel' (oder ‚-Axiom') lauten, was historisch auch gerechtfertigt ist.

In der Folge sei, sofern nichts anderes gesagt ist, ein deduktives System $\mathcal{K} = (\mathcal{F}, \mathcal{R})$ fest gegeben. Begriffe wie ‚Formel', ‚Regel' und ‚Axiom' werden sich dann automatisch auf $\mathcal{K}$ beziehen.

[...]

[...]

[...]

Aus dieser Beschreibung können wir sofort ein Induktionsprinzip ableiten: Um zu zeigen, daß alle Theoreme eine gewisse Eigenschaft $\mathcal{E}$ haben, reicht es zu zeigen, daß die Menge aller Formeln mit Eigenschaft $\mathcal{E}$ deduktiv abgeschlossen ist. Mit anderen Worten: [...] Tun wir dies, so sagen wir, wir verwenden *Induktion über Theoreme*.

Beispiel 2.1.2. Entsprechend Definition 1.1.1 bilden wir ein Alphabet $\varSigma[\mathcal{V}]$ aus einem gegebenen Alphabet $\mathcal{V}$ sowie den Symbolen ‚$\rightarrow$', ‚$\neg$', ‚⟬' und ‚⟭'. Damit definieren wir ein deduktives System $\mathcal{K}_{\text{Syn}} = (\mathcal{F}_{\text{Syn}}, \mathcal{R}_{\text{Syn}})$ wie folgt. Die Formeln von $\mathcal{K}_{\text{Syn}}$ sollen *alle* Wörter über $\varSigma[\mathcal{V}]$ sein; in Zeichen $\mathcal{F}_{\text{Syn}} = \varSigma[\mathcal{V}]^*$. Als Menge der Regeln nehmen wir

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\text{Syn}} = {} & \{\, v \mid v \in \mathcal{V} \,\} \\ & \cup \{\, (A; ⟬\neg A⟭) \mid A \in \varSigma[\mathcal{V}]^* \,\} \\ & \cup \{\, (A, B; ⟬A \rightarrow B⟭) \mid A, B \in \varSigma[\mathcal{V}]^* \,\}. \end{aligned}$$

Nun, im richtigen Leben werden wir die Regeln nicht derart explizit als Mengen aufschreiben. Stattdessen werden wir sagen, daß wir drei Regelschemata haben, nämlich

$$\frac{}{v}\ {\scriptstyle(\mathcal{V})}\ \ (v \in \mathcal{V}), \qquad \frac{A}{⟬\neg A⟭}\ {\scriptstyle(\neg)} \qquad \text{und} \qquad \frac{A \quad B}{⟬A \rightarrow B⟭}\ {\scriptstyle(\rightarrow)},$$

hier sogleich mit Kurzbezeichnungen versehen. Das erste ist ein Axiomenschema, die anderen beiden sind echte Regelschemata. Der Parameter v legt bereits seiner Form nach nahe, daß er Elemente von $\mathcal{V}$ durchlaufen soll; trotzdem haben wir dies explizit vermerkt. Die übrigen Parameter sollen wie üblich alle Formeln des deduktiven Systems durchlaufen, hier also alle Wörter über $\varSigma[\mathcal{V}]$. Man erkennt unschwer, daß die Theoreme von $\mathcal{K}_{\text{Syn}}$ genau die Aussageformen (also Formeln im vorher betrachteten Sinne) in $\mathcal{V}$ über $\{\neg, \rightarrow\}$ sind. Weiterhin stellt man fest, daß auch die betreffenden Induktionsprinzipien übereinstimmen. (Statt $\{\neg, \rightarrow\}$ funktioniert selbstverständlich auch jede andere Junktorenmenge. Die vorliegende Wahl hat aber einen gewissen Hintersinn, wie bald klar wird.)

Das nun folgende Beispiel mag etwas verwegen erscheinen.

Beispiel 2.1.3. Wir setzen $\mathcal{F}_{\text{Ar}} = \mathbf{Q}$; unsere „Formeln" sollen also rationale Zahlen sein. Die Menge $\mathcal{R}_{\text{Ar}}$ der Schlußregeln soll aus den folgenden drei Schemata aufgebaut sein:

$$\frac{}{1}\ {\scriptstyle(1)}, \qquad \frac{x \quad y}{xy}\ {\scriptstyle(\times)} \qquad \text{und} \qquad \frac{x \quad y}{x - y}\ {\scriptstyle(-)},$$

wobei gemäß der Standardvereinbarung x und y für beliebige rationale Zahlen stehen. (Es handelt sich bei den hervorgehobenen Ausdrücken nicht um Brüche; also keine Angst, es kann nicht durch 0 geteilt werden.) Man mache sich klar, daß die „Theoreme“ von $\mathcal{K}_{\mathrm{Ar}}$ genau die ganzen Zahlen sind.

2.1.2 Herleitungen

Kommen wir nun zu dem Begriff eines Beweises, oder, wie wir bevorzugt sagen werden, einer Herleitung.

Definition 2.1.4. Eine *Herleitung* einer Formel A ist eine nichtleere endliche Folge $(A_1, \ldots, A_n)$ von Formeln, die folgenden beiden Bedingungen genügt:

- $A_n = A$.
- Für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ gibt es $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, j-1\}$ derart, daß $(A_{i_1}, \ldots, A_{i_n}; A_j)$ eine Schlußregel ist.

Dabei nennen wir die Folge $(i_1, \ldots, i_k)$ eine *Begründung* für j. Gibt es eine Herleitung von A, so nennen wir A *herleitbar*.

Beispiel 2.1.5. Eine mögliche Herleitung von -42 im deduktiven System $\mathcal{K}_{\mathrm{Ar}}$ von Beispiel 2.1.3 ist $(1, 0, -1, -2, 4, -6, 36, -42)$.

Lemma 2.1.6. *Eine Formel ist genau dann ein Theorem, wenn sie herleitbar ist.*

Beweis. Die Hinlänglichkeit zeigen wir durch Induktion über die Länge von Herleitungen. Sei $(B_1, \ldots, B_n)$ eine Herleitung von B. Es ist klar, daß auch jede nichtleere initiale Teilfolge $(B_1, \ldots, B_i)$ eine Herleitung (mit denselben Begründungen) ist, nämlich des letzten Gliedes B_i. Für $i < n$ folgt daraus nach Induktionsvoraussetzung, daß B_i ein Theorem ist. Für n selbst gibt es eine Regel $\frac{B_{i_1} \quad \cdots \quad B_{i_k}}{B_n}$ mit $i_1, \ldots, i_k < n$. Wie gezeigt sind $B_{i_1}, \ldots, B_{i_k}$ Theoreme, also auch B_n.

Die Notwendigkeit zeigen wir durch Induktion über Theoreme. Gegeben ist eine Regel $\frac{A_1 \quad \cdots \quad A_k}{B}$. Wir nehmen an, daß es Herleitungen $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ von $A_1, \ldots, A_k$ gibt, und wollen eine Herleitung von B konstruieren. Dies tun wir, indem wir die α_i hintereinenderschreiben und am Ende B anfügen, also etwa

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_k, B.$$

Die Begründungen innerhalb von α_i bleiben dieselben, bis auf die Verschiebung der Indizes um die Länge von $\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}$. Die Begründung des letzten Glieds der neuen Folge werden von den neuen Indizes der letzten Glieder von $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ gebildet. $\square$

Man beachte, daß die erste Formel in einer Herleitung ein Axiom sein muß. Hat also das deduktive System keine Axiome, so hat es keine Herleitungen, und damit auch keine Theoreme.

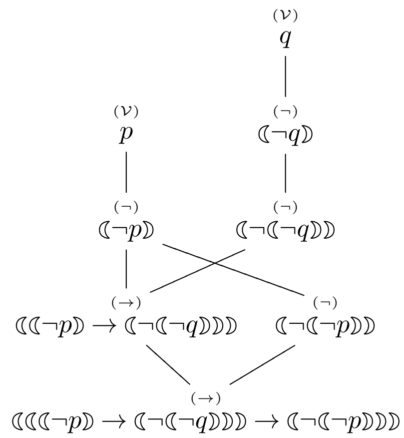
Im Rahmen dieser Vorlesung wird häufig nach Angabe einer *expliziten* Herleitung gefragt werden. Damit ist gemeint, daß die Folgenglieder mit ihrer laufenden Nummer und ihrer Begründung inklusive Kurznamen der benutzten Schlußregel versehen werden sollen.

Beispiel 2.1.7. Wir betrachten das deduktive System $\mathcal{K}_{\mathrm{Syn}}$ von Beispiel 2.1.2. Es soll eine explizite Herleitung von $\llparenthesis\llparenthesis\llparenthesis\neg p\rrparenthesis\to\llparenthesis\neg\llparenthesis\neg q\rrparenthesis\rrparenthesis\rrparenthesis\to\llparenthesis\neg\llparenthesis\neg p\rrparenthesis\rrparenthesis\rrparenthesis$ angegeben werden. Hier ist eine Möglichkeit:

1.	p	$(\mathcal{V})$
2.	$\llparenthesis\neg p\rrparenthesis$	$(\neg), 1$
3.	q	$(\mathcal{V})$
4.	$\llparenthesis\neg q\rrparenthesis$	$(\neg), 3$
5.	$\llparenthesis\neg\llparenthesis\neg q\rrparenthesis\rrparenthesis$	$(\neg), 4$
6.	$\llparenthesis\llparenthesis\neg p\rrparenthesis \to \llparenthesis\neg\llparenthesis\neg q\rrparenthesis\rrparenthesis\rrparenthesis$	$(\to), 2, 5$
7.	$\llparenthesis\neg\llparenthesis\neg p\rrparenthesis\rrparenthesis$	$(\neg), 2$
8.	$\llparenthesis\llparenthesis\llparenthesis\neg p\rrparenthesis \to \llparenthesis\neg\llparenthesis\neg q\rrparenthesis\rrparenthesis\rrparenthesis \to \llparenthesis\neg\llparenthesis\neg p\rrparenthesis\rrparenthesis\rrparenthesis$	$(\to), 6, 7.$

Herleitungen können graphisch aufbereitet werden, indem die Begründungen durch Linien angezeigt werden, nämlich jeweils eine von jeder benutzten Prämisse zur Konklusion. Auf diese Weise entsteht ein gerichteter Graph. Die Numerierung der Herleitungsschritte kann entfallen; an ihre Stelle treten zwei Bedingungen. Zum einen muß der Graph azyklisch sein (d. h., er darf keine nichttrivialen Kreise haben). Zum anderen muß der Knoten mit der hergeleiteten Formel eine Senke sein (d. h., von ihm dürfen gehen keine Kanten ausgehen). Wir wollen diese Befunde nicht weiter analysieren und belassen es deshalb bei dieser Beschreibung.

Beispiel 2.1.8. Die Herleitung von Beispiel 2.1.7 können wir als gerichteten Graphen



schreiben (wobei die Kanten abwärts zeigen sollen).

In einem Spezialfall ist dieser Graph ein planarer Baum, nämlich genau dann, wenn jeder Herleitungsschritt bis auf den letzten genau einmal in einer Begründung verwendet wird. Man kann jede Herleitung auf diese Form bringen, indem man von jedem Knoten so viele Kopien nimmt, wie von ihm Wege zum Zielknoten ausgehen. Diese Bäume nun können aufgeschrieben werden, indem die verwendeten Schlußregeln in Querstrich-Notation zusammengesetzt werden.

Beispiel 2.1.9. Machen wir den Herleitungsgraphen aus dem vorherigen Beispiel zu einem Baum, erhalten wir

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p}\,(\mathcal{V})}{(\!(\neg p)\!)}\,(\neg) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{q}\,(\mathcal{V})}{(\!(\neg q)\!)}\,(\neg)}{(\!(\neg(\!(\neg q)\!))\!)}\,(\neg)}{(\!((\!(\neg p)\!) \to (\!(\neg(\!(\neg q)\!))\!))\!)}\,(\to) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p}\,(\mathcal{V})}{(\!(\neg p)\!)}\,(\neg)}{(\!(\neg(\!(\neg p)\!))\!)}\,(\neg)}{(\!((\!((\!(\neg p)\!) \to (\!(\neg(\!(\neg q)\!))\!))\!) \to (\!(\neg(\!(\neg p)\!))\!))\!).}\,(\to)$$

[. . .]
[. . .]

Ein Herleitungsbaum kann zwar auf die genannte Weise sehr kompakt dargestellt werden, hat aber im allgemeinen deutlich mehr Knoten als der ursprüngliche Herleitungsgraph. Deshalb ist die Baumnotation nicht uneingeschränkt zu empfehlen.

Beispiel 2.1.10. Die als Beispiel 2.1.5 genannte Herleitung von -42 hat acht Schritte; der daraus resultierende Herleitungsbaum hat einundsiebzig Knoten. Der Teilbaum

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{1}\,(1) \quad \dfrac{}{1}\,(1)}{0}\,(-) \quad \dfrac{}{1}\,(1)}{-1}\,(-) \quad \dfrac{}{1}\,(1)}{-2}\,(-)$$

tritt darin neunmal auf.

2.1.3 Ableitungen

[. . .
. . .
. . .
. . .
. . .]

Für die Notation der linken Seite von ‚$\vdash_{\mathcal{K}}$' sind dieselben vereinfachenden Schreibweisen wie schon bei ‚$\models$' erlaubt. Also ‚$\Gamma, \Delta \vdash_{\mathcal{K}} A$' statt ‚$\Gamma \cup \Delta \vdash_{\mathcal{K}} A$' und ‚$B \vdash_{\mathcal{K}} A$' statt ‚$\{B\} \vdash_{\mathcal{K}} A$'; ferner kann ‚$\vdash_{\mathcal{K}} A$' als Abkürzung für ‚$\varnothing \vdash_{\mathcal{K}} A$' gesehen werden.

Beispiel 2.1.11. Wir betrachten wieder das deduktive System $\mathcal{K}_{\mathrm{Ar}}$ von Beispiel 2.1.3. Was die Frage betrifft, welche „Formeln" „Theoreme" sind, erweist sich das Regelschema $(\times)$ als überflüssig: jedes $n \in \mathbf{Z}$ hat eine Herleitung der Länge $|n| + 2$, in der $(\times)$ nicht benutzt wird. Allerdings hat $(\times)$ Einfluß auf die Ableitbarkeitsrelation: so gilt z. B. $1/2 \vdash_{\mathcal{K}_{\mathrm{Ar}}} 1/4$, aber eine Ableitung ohne $(\times)$ ist nicht möglich. Die Menge der aus $\Gamma \subseteq \mathcal{F}_{\mathrm{Ar}} = \mathbf{Q}$ ableitbaren „Formeln" ist genau der von Γ erzeugte Teilring von $\mathbf{Q}$; ohne $(\times)$ wäre es die von $\Gamma \cup \{1\}$ erzeugte (additive) Untergruppe.

[. . .]
Die Menge aller aus Γ ableitbaren Formeln bezeichnen wir mit $\Gamma^{\vdash_{\mathcal{K}}}$.

Lemma 2.1.12. *Die Menge $\Gamma^{\vdash_{\mathcal{K}}}$ ist deduktiv abgeschlossen.*

[...]

Lemma 2.1.13. *Seien $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}'$ zwei deduktive Systeme mit denselben Formeln: $\mathcal{K} = (\mathcal{F}, \mathcal{R})$ und $\mathcal{K}' = (\mathcal{F}, \mathcal{R}')$. Die folgenden drei Bedingungen sind äquivalent.*

(i) Für jedes $(B_1, \ldots, B_k; A) \in \mathcal{R}'$ gilt $B_1, \ldots, B_k \vdash_{\mathcal{K}} A$.

(ii) Jede bzgl. $\mathcal{K}$ deduktiv abgeschlossene Formelmenge ist auch bzgl. $\mathcal{K}'$ deduktiv abgeschlossen.

(iii) Für jede Formelmenge Γ gilt $\Gamma^{\vdash_{\mathcal{K}'}} \subseteq \Gamma^{\vdash_{\mathcal{K}}}$.

[...]
[...
...]
Halten wir noch eine Äquivalenz fest, deren wesentliche Hälfte darauf beruht, daß in einem Beweis nur endlich viele Annahmen auftreten können.

Beobachtung 2.1.14 (Kompaktheitssatz, syntaktisch). *Eine Formel ist genau dann aus einer Formelmenge ableitbar, wenn sie aus einer endlichen Teilmenge ableitbar ist.*

Wir wollen noch kurz auf einen praktischen Aspekt eingehen. Ist Herleitbarkeit entscheidbar? Mit anderen Worten, ist die Menge der Theorem von $\mathcal{K}$ berechenbar? Eine Herleitung einer Formel A zu finden ist das eine. Aber was tun, wenn keine Herleitung existiert? Im allgemeinen gibt es unendlich viele Herleitungen, eine erschöpfende Suche ist dann nicht möglich. Wie wir sehen werden, läßt sich tatsächlich im allgemeinen kein Verfahren zum Nachweis der Nichtherleitbarkeit finden.

Beispiel 2.1.15. Herleitbarkeit im deduktiven System $\mathcal{K}_{\mathrm{Syn}}$ von Beispiel 2.1.2 ist entscheidbar, wie Sie im Prinzip mit Übungsaufgabe 1.1.8 gezeigt haben.

In den von uns betrachteten deduktiven Systemen ist die Menge $\mathcal{R}$ der Schlußregeln berechenbar. Daraus folgt zwar, daß auch die Menge der Herleitungen berechenbar ist; für die Menge der Theoreme folgt aber nur effektive Aufzählbarkeit. Immerhin läßt sich dieses Ergebnis verallgemeinern:

Satz 2.1.16. *Ist die Menge der Schlußregeln effektiv aufzählbar, so auch die Menge der Herleitungen und die Menge der Theoreme.*

Beweis. Aus einer effektiven Aufzählung aller Herleitungen erhalten wir sofort eine effektive Aufzählung ihrer jeweils letzten Glieder und damit aller Theoreme. Haben wir nun ein Verfahren, das alle Schlußregeln aufzählt, sagen wir als R_1, R_2, R_3, ..., so können wir es benutzen, indem wir nacheineinder für $n = 1$, 2, 3, ... jeweils alle Herleitungungen bilden lassen, deren Längen $< n$ sind und die ausschließlich die endlich vielen Regeln R_i mit $i < n$ benutzen. (Wenn wir nur an den Theoremen interessiert sind, so können wir Herleitungen mit mehrmaliger Verwendung derselben Regel aus unserer Aufzählung verbannen, was die Längenbeschränkung überflüssig macht.) □

Entsprechend gilt für eine Formelmenge Γ: Sind $\mathcal{R}$ und Γ effektiv aufzählbar, so auch die Menge $\Gamma^{\vdash_{\mathcal{K}}}$ der aus Γ ableitbaren Formeln.

Wir werden im Rahmen der Prädikatenlogik auf ein (berechenbares) deduktives System stoßen, für das Herleitbarkeit nicht entscheidbar ist. Für den Moment muß folgendes Beispiel genügen.

Übungsaufgabe 2.1.17. Sei X eine Teilmenge von $\mathbf{N}$ mit einer effektiven Aufzählung $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$. Wir betrachten das deduktive System $\mathcal{K}_X$ mit Formelmenge $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ und den beiden Regelschemata

$$\frac{}{(k, x_k)} \qquad \text{und} \qquad \frac{(k+1, n)}{(k, n)}.$$

- Zeigen Sie, daß die Regelmenge von $\mathcal{K}_X$ berechenbar ist.
- Zeigen Sie, daß Herleitbarkeit in $\mathcal{K}_X$ genau dann entscheidbar ist, wenn X berechenbar ist.

2.2 Ein deduktives System für die Aussagenlogik

Bei der Untersuchung der Ableitbarkeitsrelation $\vdash_{\mathcal{K}}$ sind wir bereits auf einige Parallelen mit der logischen Folgerelation $\vDash$ gestoßen. Im vorliegenden Abschnitt wollen wir ein deduktives System $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0$ einführen, für das $\vdash_{\mathcal{K}}$ als Relation sogar mit $\vDash$ übereinstimmt. Insbesondere hätten wir damit einen geeigneten Beweisbegriff für die Aussagenlogik.

[...]

Für unser $\mathcal{K}_0$ wollen wir uns auf eine gewisse Junktorenmenge $\mathcal{J} = \mathcal{J}_0$ festlegen. Diese sollte funktional vollständig sein (so daß wir andere Junktoren gegebenfalls als Abkürkungen lesen können) und minimal mit dieser Eigenschaft (um das System nicht zu überfrachten). Unsere Wahl fällt auf zwei Junktoren, denen bei unseren Betrachtungen zur Folgerelation $\vDash$ besondere Bedeutung zugekommen ist: $\rightarrow$ und $\neg$. Es sei also $\mathcal{F}_0$ die Menge aller Aussageformen in $\mathcal{J}_0 = \{\rightarrow, \neg\}$ über einer fest gegebenen Variablenmenge $\mathcal{V}$, die weiterhin beliebig sein darf, die wir aber aus der Notation heraushalten wollen.

Kommen wir nun zu den Regeln. Unsere Regelmenge $\mathcal{R}_0$ zerfällt in vier Schemata. Das wichtigste ist die *Abtrennungsregel*, weithin bekannt unter ihrem lateinischen Namen *modus ponens*:

$$\frac{A \qquad A \rightarrow B}{B}\ \text{MP}.$$

Die übrigen drei Schemata liefern Axiome:

$$\frac{}{B \rightarrow A \rightarrow B}\ \text{Ax1}, \qquad \frac{}{(A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow A \rightarrow C}\ \text{Ax2},$$

$$\frac{}{(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow A \rightarrow B}\ \text{Ax3}.$$

Sie sind weniger wichtig in dem Sinne, daß sie eher ersetzbar sind; siehe Übungsaufgabe **??**. Ihre geringere Bedeutung zeigt sich auch in den hier benutzten unspezifischen Kurzbezeichnungen.

An dieser Stelle machen wir von unserer ‚rechts vor links'-Konvention Gebrauch. Als Wörter gemäß Definition geschrieben sind unsere Axiomenschemata $\frac{}{\llparenthesis B\rightarrow\llparenthesis A\rightarrow B\rrparenthesis\rrparenthesis}$, $\frac{}{\llparenthesis\llparenthesis A\rightarrow\llparenthesis B\rightarrow C\rrparenthesis\rrparenthesis\rightarrow\llparenthesis\llparenthesis A\rightarrow B\rrparenthesis\rightarrow\llparenthesis A\rightarrow C\rrparenthesis\rrparenthesis\rrparenthesis}$ und $\frac{}{\llparenthesis\llparenthesis\neg B\rightarrow\neg A\rrparenthesis\rightarrow\llparenthesis A\rightarrow B\rrparenthesis\rrparenthesis}$.

Übungsaufgabe 2.2.1. Zeigen Sie, daß die drei durch Ax1, Ax2 und Ax3 beschriebenen Formelmengen disjunkt sind.

Da im Rest dieses Abschnitts $\mathcal{K}_0$ fast das einzige betrachtete deduktive System sein wird, schreiben wir statt ‚$\vdash_{\mathcal{K}_0}$' kurz ‚$\vdash$'.

Wir bemerken bereits hier, daß $\mathcal{K}_0$ korrekt ist. Zum Nachweis reicht es zu zeigen, daß die Menge der logischen Folgen einer Formelmenge diese enthält, was trivialerweise der Fall ist, und deduktiv abgeschlossen ist, was wir wie folgt einsehen: die Axiome von $\mathcal{K}_0$ sind (nicht zufällig) die Tautologien von Übungsaufgabe 1.2.9, und bezüglich der Abtrennungsregel haben wir Korollar 1.2.20.

2.2.1 Das Deduktionstheorem

Die Nützlichkeit unseres deduktiven Systems beruht wesentlich auf dem folgenden Ergebnis.

Satz 2.2.2 (Deduktionstheorem). *Sei Γ eine Formelmenge, und seien A und B Formeln. Es gilt $\Gamma \vdash A \to B$ genau dann, wenn $\Gamma, A \vdash B$.*

Beweis. Wenn $\Gamma \vdash A \to B$, so sind aus $\Gamma \cup \{A\}$ sowohl A als auch $A \to B$ ableitbar, mittels der Abtrennungsregel also auch B; damit haben wir die Notwendigkeit der Bedingung. Der Beweis der Hinlänglichkeit erfolgt durch Induktion über alle aus $\Gamma \cup \{A\}$ ableitbare Formeln B. Dabei ergeben sich folgende Fälle.

- B ist ein Axiom von $\mathcal{K}_0$ oder ein Element von Γ. Dann erhalten wir $A \to B$ durch Anwedung der Abtrennungsregel auf B und das Axiom $B \to A \to B$.
- B ist Konklusion einer Instanz der Abtrennungsregel über aus $\Gamma \cup \{A\}$ abgeleitbaren Prämissen B' und $B' \to B$. Dann sind nach Induktionsvorausstezung $A \to B'$ und $A \to B' \to B$ aus Γ ableitbar. Wir erhalten $A \to B$ durch zweimalige Anwendung der Abtrennungsregel, beginnend mit dem Axiom $(A \to B' \to B) \to (A \to B') \to A \to B$.
- $B = A$. Überraschenderweise ist das der schwierigste Fall. Wir müssen zeigen, daß $A \to A$ aus Γ ableitbar ist. Es gilt sogar:

Lemma 2.2.3. *Für jede Formel A gilt*

$$\vdash A \to A. \qquad \text{Th1}$$

Beweis. Eine Herleitung ist

1.	$A \to A \to A$	Ax1
2.	$A \to (A \to A) \to A$	Ax1
3.	$(A \to (A \to A) \to A) \to (A \to A \to A) \to A \to A$	Ax2
4.	$(A \to A \to A) \to A \to A$	MP, 2, 3
5.	$A \to A$	MP, 1, 4.

□

Damit ist auch der Beweis des Deduktionstheorems abgeschlossen. □

Wir haben das Deduktionstheorem als Äquivalenz formuliert. Wie jedoch der Beweis zeigt, haben die beiden Implikationsrichtungen sehr unterschiedliches Gewicht. Die Hin-Richung besagt praktisch nur, daß die Abtrennungsregel herleitbar ist; angesichts der Tatsache, daß sie als Regelschema vorgegeben ist, ist das natürlich trivialerweise der Fall. Das eigentlich interessante Ergebnis ist die Rück-Richtung. In der Folge werden wir unter Verweis auf das Deduktionstheorem meist ausschließlich diese Implikation meinen. (Ähnliches läßt sich für einige andere unserer Sätze sagen.)

Der folgende Beweis liefert ein erstes Anwendungsbeispiel.

Lemma 2.2.4.

$$\vdash \neg\neg A \to A. \qquad \text{Th2}$$

Beweis. Aufgrund des Deduktionstheorems können wir stattdessen $\neg\neg A \vdash A$ zeigen. Hier ist eine mögliche Ableitung:

1.	$\neg\neg A$	geg.
2.	$\neg\neg A \to \neg\neg\neg\neg A \to \neg\neg A$	Ax1
3.	$\neg\neg\neg\neg A \to \neg\neg A$	MP, 1, 2
4.	$(\neg\neg\neg\neg A \to \neg\neg A) \to \neg A \to \neg\neg\neg A$	Ax3
5.	$\neg A \to \neg\neg\neg A$	MP, 3, 4
6.	$(\neg A \to \neg\neg\neg A) \to \neg\neg A \to A$	Ax3
7.	$\neg\neg A \to A$	MP, 5, 6
8.	A	MP, 1, 7.

□

Beispiel 2.2.5. Die Herleitbarkeit von $\neg\neg A \to A$ haben wir nachgewiesen. Stellen wir uns nun aber die Aufgabe, eine Herleitung von $\neg\neg A \to A$ auch explizit anzugeben. Das ist jetzt reine Fleißarbeit, denn der Beweis des Deduktionstheorems ist konstruktiv, und erlaubt so, die in obigem Beweis angegebene Ableitung in das Gewünschte umzuwandeln. Zeile 1 (Annahme) wird ersetzt durch

1.	$\neg\neg A \to \neg\neg A \to \neg\neg A$	Ax1
2.	$\neg\neg A \to (\neg\neg A \to \neg\neg A) \to \neg\neg A$	Ax1
3.	$(\neg\neg A \to (\neg\neg A \to \neg\neg A) \to \neg\neg A) \to$ $(\neg\neg A \to \neg\neg A \to \neg\neg A) \to \neg\neg A \to \neg\neg A$	Ax2
4.	$(\neg\neg A \to \neg\neg A \to \neg\neg A) \to \neg\neg A \to \neg\neg A$	MP, 2, 3
5.	$\neg\neg A \to \neg\neg A$	MP, 1, 4.

Zeile 2 (Axiom) wird ersetzt durch

6.	$\neg\neg A \to \neg\neg\neg\neg A \to \neg\neg A$	Ax1
7.	$(\neg\neg A \to \neg\neg\neg\neg A \to \neg\neg A) \to$ $\neg\neg A \to \neg\neg A \to \neg\neg\neg\neg A \to \neg\neg A$	Ax1
8.	$\neg\neg A \to \neg\neg A \to \neg\neg\neg\neg A \to \neg\neg A$	MP, 6, 7

und Zeile 3 (*modus ponens*) durch

9.	$(\neg\neg A \to \neg\neg A \to \neg\neg\neg\neg A \to \neg\neg A) \to$ $(\neg\neg A \to \neg\neg A) \to \neg\neg A \to \neg\neg\neg\neg A \to \neg\neg A$	Ax2
10.	$(\neg\neg A \to \neg\neg A) \to \neg\neg A \to \neg\neg\neg\neg A \to \neg\neg A$	MP, 8, 9
11.	$\neg\neg A \to \neg\neg\neg\neg A \to \neg\neg A$	MP, 5, 10.

(Wir erkennen beiläufig, daß die in den neuen Zeilen 6 und 11 hergeleiteten Formeln übereinstimmen. Da im weiteren nicht auf die Zeilen 6 bis 10 verwiesen wird, könnten diese entfallen, nachdem die Begründung für Zeile 11 aus Zeile 6 übernommen worden ist.) Wir fahren mit derselben Methode fort und erhalten so den Rest der Ableitung als

12.	$(\neg\neg\neg\neg A \to \neg\neg A) \to \neg A \to \neg\neg\neg A$	Ax3
13.	$((\neg\neg\neg\neg A \to \neg\neg A) \to \neg A \to \neg\neg\neg A) \to$ $\neg\neg A \to (\neg\neg\neg\neg A \to \neg\neg A) \to \neg A \to \neg\neg\neg A$	Ax1
14.	$\neg\neg A \to (\neg\neg\neg\neg A \to \neg\neg A) \to \neg A \to \neg\neg\neg A$	MP, 12, 13
15.	$(\neg\neg A \to (\neg\neg\neg\neg A \to \neg\neg A) \to \neg A \to \neg\neg\neg A) \to$ $(\neg\neg A \to \neg\neg\neg\neg A \to \neg\neg A) \to \neg\neg A \to \neg A \to \neg\neg\neg A$	Ax2
16.	$(\neg\neg A \to \neg\neg\neg\neg A \to \neg\neg A) \to \neg\neg A \to \neg A \to \neg\neg\neg A$	MP, 14, 15
17.	$\neg\neg A \to \neg A \to \neg\neg\neg A$	MP, 11, 16
18.	$(\neg A \to \neg\neg\neg A) \to \neg\neg A \to A$	Ax3
19.	$((\neg A \to \neg\neg\neg A) \to \neg\neg A \to A) \to$ $\neg\neg A \to (\neg A \to \neg\neg\neg A) \to \neg\neg A \to A$	Ax1
20.	$\neg\neg A \to (\neg A \to \neg\neg\neg A) \to \neg\neg A \to A$	MP, 18, 19
21.	$(\neg\neg A \to (\neg A \to \neg\neg\neg A) \to \neg\neg A \to A) \to$ $(\neg\neg A \to \neg A \to \neg\neg\neg A) \to \neg\neg A \to \neg\neg A \to A$	Ax2
22.	$(\neg\neg A \to \neg A \to \neg\neg\neg A) \to \neg\neg A \to \neg\neg A \to A$	MP, 20, 21
23.	$\neg\neg A \to \neg\neg A \to A$	MP, 17, 22
24.	$(\neg\neg A \to \neg\neg A \to A) \to (\neg\neg A \to \neg\neg A) \to \neg\neg A \to A$	Ax2
25.	$(\neg\neg A \to \neg\neg A) \to \neg\neg A \to A$	MP, 23, 24
26.	$\neg\neg A \to A$	MP, 5, 25.

2.2.2 Einige Lemmata

Wir wollen nun darauf hinarbeiten, die Vollständigkeit unseres Kalküls $\mathcal{K}_0$ nachzuweisen. Dazu ist es hilfreich, gewisse kritische Tautologie-Schemata bereits als Theorem-Schemata erkannt zu haben (wie es zum Beweis des Deduktionstheorems für Th1 der Fall war). Dies tun wir in der folgenden Serie von Lemmata. Deren Beweise werden ganz nebenbei als weitere Beispiele für das Her- und Ableiten in $\mathcal{K}_0$ dienen, wobei wir bereits hergeleitete Theorem-Schemata sofort gemäß [...] als neue Axiom-Schemata einsetzen.

Lemma 2.2.6.

$$\vdash \neg B \to B \to A. \qquad \text{Th3}$$

Beweis. Aufgrund des Deduktionstheorems dürfen wir stattdessen $\neg B \vdash B \to A$ zeigen. Das kann wie folgt geschehen:

1.	$\neg B$	geg.
2.	$\neg B \to \neg A \to \neg B$	Ax1
3.	$\neg A \to \neg B$	MP, 1, 2
4.	$(\neg A \to \neg B) \to B \to A$	Ax3
5.	$B \to A$	MP, 3, 4.

□

Lemma 2.2.7.

$$\vdash B \to \neg\neg B. \tag{Th4}$$

Beweis.

1.	$\neg\neg\neg B \to \neg B$	Th2
2.	$(\neg\neg\neg B \to \neg B) \to B \to \neg\neg B$	Ax2
3.	$B \to \neg\neg B$	MP, 1, 2.

□

Lemma 2.2.8.

$$\vdash (A \to B) \to \neg B \to \neg A. \tag{Th5}$$

Beweis. Aufgrund des Deduktionstheorems dürfen wir stattdessen $A \to B \vdash \neg B \to \neg A$ zeigen. Dazu zeigen wir zunächst

$$A \to B \vdash \neg\neg A \to \neg\neg B; \tag{$*$}$$

denn damit als Hilfsregel ergibt sich das gewünschte Ergebnis mit der Ableitung

1.	$A \to B$	geg.
2.	$\neg\neg A \to \neg\neg B$	$(*)$, 1
3.	$(\neg\neg A \to \neg\neg B) \to \neg B \to \neg A$	Ax3
4.	$\neg B \to \neg A$	MP, 2, 3.

Um nun $(*)$ zu zeigen, wenden wir auch vorher schon das Deduktionstheorem an: wir dürfen stattdessen $A \to B, \neg\neg A \vdash \neg\neg B$ zeigen, was wie folgt möglich ist.

1.	$\neg\neg A$	geg.
2.	$\neg\neg A \to A$	Th2
3.	A	MP, 1, 2
4.	$A \to B$	geg.
5.	B	MP, 3, 4
6.	$B \to \neg\neg B$	Th4
7.	$\neg\neg B$	MP, 5, 6.

□

Es ist etwas unbefriedigend, daß wir den Herleitungsfluß unterbrechen müssen, um das Deduktionstheorem auf ein Hilfsergebnis anwenden zu können. Im vorliegenden Falle hätten wir natürlich $(*)$, oder im Sinne der Normierung auf annahmefreie Ergebnisse besser

$$\vdash (A \to B) \to \neg\neg A \to \neg\neg B,$$

als ein weiteres Lemma formulieren können. Aber wir wollen diesem relativ unbedeutenden Ergebnis keine zu große Prominenz geben, zumal es mit dem vorliegenden Lemma praktisch sofort überflüssig wird (denn daraus ergibt sich mit dem Deduktionstheorem $A \to B \vdash \neg B \to \neg A \vdash \neg\neg A \to \neg\neg B$).

Wir schaffen Abhilfe, indem wir den Begriff einer (expliziten) Herleitung entsprechend erweitern. Ab jetzt dürfen in einer Herleitung Bereiche abgegrenzt werden (geschiet hier durch einer Art eckiger Klammer und Einrückung). Jeder solche Bereich darf mit einer beliebigen Formel beginnen, die als *Annahme* (kurz ‚Ann.'‘) gekennzeichnet wird, während alle anderen Einträge der üblichen Begründungspflicht unterliegen. Von außerhalb eines solchen Abschnitts darf nicht nach innerhalb verweisen werden. Einzige Ausnahme ist eine neuartige Begründung, gekennzeichnet als Anwendung des Deduktionstheorems (kurz ‚DT‘). Hier darf eine Formel $B \to A$ hingeschrieben werden, unter Verweis auf einen vorherigen Eintrag A, der in einem abgegrenzten Bereich liegen darf. In diesem Fall muß B die Annahme dieses Bereichs sein; sonst ist B beliebig. (Fast immer wird der erstere Fall eintreten, mit A als letztem Eintrag.)

Statt einer formal einwandfreien Definition geben wir lediglich Beispiele solcher Herleitungen im weiteren Sinne.

Beispiel 2.2.9. Den Beweis des vorangegangenen Lemmas dürfen wir jetzt ganz ohne Prosa wie folgt fassen:

1.	$A \to B$	Ann.
2.	$\neg\neg A$	Ann.
3.	$\neg\neg A \to A$	Th2
4.	A	MP, 2, 3
5.	B	MP, 4, 1
6.	$B \to \neg\neg B$	Th4
7.	$\neg\neg B$	MP, 5, 6
8.	$\neg\neg A \to \neg\neg B$	DT, 7
9.	$(\neg\neg A \to \neg\neg B) \to \neg B \to \neg A$	Ax1
10.	$\neg B \to \neg A$	MP, 8, 9
11.	$(A \to B) \to \neg B \to \neg A$	DT, 10.

Lemma 2.2.10.

$$\vdash A \to \neg B \to \neg(A \to B). \qquad \text{Th6}$$

Beweis.

1.	A	Ann.
2.	$A \to B$	Ann.
3.	B	MP, 1, 2
4.	$(A \to B) \to B$	DT, 3
5.	$((A \to B) \to B) \to \neg B \to \neg(A \to B)$	Th5
6.	$\neg B \to \neg(A \to B)$	MP, 4, 5
7.	$A \to \neg B \to \neg(A \to B)$	DT, 6.

□

Lemma 2.2.11.

$$\vdash (A \to B) \to (A \to \neg B) \to \neg A. \qquad \text{Th7}$$

Beweis.

1.	$A \to B$	Ann.
2.	$A \to \neg B$	Ann.

3.	A	Ann.
4.	B	MP, 3, 1
5.	$\neg B$	MP, 3, 2
6.	$\neg B \to B \to \neg(A \to A)$	Th3
7.	$B \to \neg(A \to A)$	MP, 5, 6
8.	$\neg(A \to A)$	MP, 4, 7
9.	$A \to \neg(A \to A)$	DT, 8
10.	$A \to A$	Th1
11.	$(A \to A) \to \neg\neg(A \to A)$	Th4
12.	$\neg\neg(A \to A)$	MP, 10, 11
13.	$(A \to \neg(A \to A)) \to (\neg\neg(A \to A) \to \neg A)$	Th5
14.	$\neg\neg(A \to A) \to \neg A$	MP, 9, 13
15.	$\neg A$	MP, 12, 14
16.	$(A \to \neg B) \to \neg A$	DT, 15
17.	$(A \to B) \to (A \to \neg B) \to \neg A$	DT, 16.

□

Hier war es naheliegend, die neue Annahme A zu machen, um die gegebenen Annahmen $A \to B$ und $A \to \neg B$ zu verwerten. Dabei haben wir als Hilfsergebnis $A \to B, A \to \neg B \vdash A \to \neg(A \to A)$ erhalten. Statt $A \to A$ hätten wir natürlich auch jede andere Formel benutzen können, die vorher den Status eines Axioms hatte.

Lemma 2.2.12.

$$\vdash (B \to A) \to (\neg B \to A) \to A. \qquad \text{Th8}$$

Beweis.

1.	$B \to A$	Ann.
2.	$(B \to A) \to \neg A \to \neg B$	Th5
3.	$\neg A \to \neg B$	MP, 1, 2
4.	$\neg B \to A$	Ann.
5.	$(\neg B \to A) \to \neg A \to \neg\neg B$	Th5
6.	$\neg A \to \neg\neg B$	MP, 4, 5
7.	$(\neg A \to \neg B) \to (\neg A \to \neg\neg B) \to \neg\neg A$	Th7
8.	$(\neg A \to \neg\neg B) \to \neg\neg A$	MP, 3, 7
9.	$\neg\neg A$	MP, 6, 8
10.	$\neg\neg A \to A$	Th2
11.	A	MP, 9, 10
12.	$(\neg B \to A) \to A$	DT, 11
13.	$(B \to A) \to (\neg B \to A) \to A$	DT, 12.

□

Übungsaufgabe 2.2.13. Wir nennen eine Formelmenge Γ *widersprüchlich*, falls es eine Formel B gibt, für die sowohl B selbst als auch $\neg B$ aus Γ ableitbar sind. Zeigen Sie:

- Γ ist genau dann widersprüchlich, wenn eine endliche Teilmenge von Γ widersprüchlich ist.
- Es gilt $\Gamma \vdash \neg A$ genau dann, wenn $\Gamma \cup \{A\}$ widersprüchlich ist.

2.2.3 Korrektheit und Vollständigkeit

Endlich kommen wir zu unserem Hauptergebnis, der Vollständigkeit von $\mathcal{K}_0$. Wir beschäftigen uns zunächst mit dem Fall der leeren Annahmemenge.

Satz 2.2.14. *Eine Formel ist genau dann ein Theorem von $\mathcal{K}_0$, wenn sie eine Tautologie ist.*

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingung haben wir bereits bemerkt. Zum Beweis der Hinlänglichkeit stellen wir zunächst ein paar weitere Hilfsmittel zur Verfügung.

Lemma 2.2.15. *Sei $\mathcal{V}_0$ eine Menge von Variablen, sei A eine Formel (in $\{\to, \neg\}$) über $\mathcal{V}_0$, und sei φ eine Belegung. Es gilt*

$$^{\varphi}\mathcal{V}_0 \vdash {}^{\varphi}A.$$

(Zur Erinnerung: Für eine Formel A bezeichnen wir mit $^{\varphi}A$ diejenige der beiden Formeln A und $\neg A$, die φ erfüllt, und für eine Formelmenge Γ setzen wir $^{\varphi}\Gamma = \{\, ^{\varphi}A \mid A \in \Gamma \,\}$.)

Beweis. Durch strukturelle Induktion über A.

- Ist die Formel A atomar, so ist sie eine der Variablen $v \in \mathcal{V}_0$. Daher ist $^{\varphi}A = {}^{\varphi}v$ eines der Elemente von $^{\varphi}\mathcal{V}_0$ und somit trivialerweise ableitbar.
- Ist $A = \neg B$, so haben wir nach Induktionsvoraussetzung die Ableitbarkeit von $^{\varphi}B$. Wir unterscheiden nun zwei Fälle: Gilt $\varphi(B) = 0$, so haben wir $^{\varphi}B = \neg B = A = {}^{\varphi}A$ und sind sofort fertig. Gilt $\varphi(B) = 1$, so haben wir $^{\varphi}B = B$ und $^{\varphi}A = \neg A = \neg\neg B$. Es reicht also, $B \vdash \neg\neg B$ zu zeigen, und das folgt (mit *modus ponens*) aus Th4.
- Ist $A = B \to C$, so haben wir nach Induktionsvoraussetzung die Ableitbarkeit von $^{\varphi}B$ und $^{\varphi}C$. Hier unterscheiden wir drei Fälle: Gilt $\varphi(C) = 1$, so haben wir $^{\varphi}C = C$ und $^{\varphi}A = B \to C$; nun reicht $C \vdash B \to C$, und das folgt aus Ax1. Gilt $\varphi(B) = 0$, so haben wir $^{\varphi}B = \neg B$ und $^{\varphi}A = B \to C$; nun reicht $\neg B \vdash B \to C$, und das folgt mit Th3. Gelten schließlich $\varphi(C) = 0$ und $\varphi(B) = 1$, so haben wir $^{\varphi}C = \neg C$, $^{\varphi}B = B$ und $^{\varphi}A = \neg(B \to C)$. Es reicht nun, $B, \neg C \vdash \neg(B \to C)$ zu zeigen, und das folgt aus Th6.

□

Lemma 2.2.16. *Sei Γ eine Formelmenge, und seien A und B zwei Formeln. Gelten $\Gamma, B \vdash A$ und $\Gamma, \neg B \vdash A$, dann gilt auch $\Gamma \vdash A$.*

Beweis. Aus den Annahmen folgt mit dem Deduktionstheorem $\Gamma \vdash B \to A$ und $\Gamma \vdash \neg B \to A$. Um daraus $\Gamma \vdash A$ zu folgern, brauchen wir nur $B \to A, \neg B \to A \vdash A$, und das erhalten wir mit zweimaliger Anwendung von *modus ponens* aus Th8. □

Kommen wir zurück zu unserem Satz. Gegeben ist eine Tautologie A über der Junktorenmenge $\{\to, \neg\}$; wir wollen zeigen, daß A in $\mathcal{K}_0$ herleitbar ist, daß also gilt: $\varnothing \vdash A$.

Bezeichnen wir die in A auftretenden Variablen mit $p_1, \ldots, p_n$. Wir zeigen nun, durch Induktion über $k \in \{0, \ldots, n\}$: sind $l_{k+1}, \ldots, l_n$ Literale mit den entsprechend indizierten Variablen, also $l_i = p_i$ oder $l_i = \neg p_i$, so gilt $l_{k+1}, \ldots, l_n \vdash A$. Für $k = n$ ist das das gewünschte Ergebnis.

Da A eine Tautologie ist, gilt ${}^{\varphi}A = A$ für jede Belegung φ. Der Induktionsanfang ($k = 0$) wird somit durch das erste Lemma erledigt. Für den Induktionsschritt (Schluß von $k - 1$ auf k) wenden wir das zweite Lemma mit $B = p_k$ und $\Gamma = \{l_{k+1}, \ldots, l_n\}$ an. □

[...]

Theorem 2.2.17 (Korrektheit und Vollständigkeit von $\mathcal{K}_0$). *Sei Γ eine Formelmenge. Eine Formel ist genau dann in $\mathcal{K}_0$ aus Γ ableitbar, wenn sie aus Γ logisch folgt.*

Beweis.

$$
\begin{array}{lll}
& \Gamma \vdash B & \\
\iff & \text{es gibt } A_1, \ldots, A_n \in \Gamma \text{ mit } A_1, \ldots, A_n \vdash B & \text{(Beobachtung 2.1.14)} \\
\iff & \text{es gibt } A_1, \ldots, A_n \in \Gamma \text{ mit } \vdash A_1 \to \ldots \to A_n \to B & \text{(Deduktionstheorem)} \\
\iff & \text{es gibt } A_1, \ldots, A_n \in \Gamma \text{ mit } \vDash A_1 \to \ldots \to A_n \to B & \text{(Satz 2.2.14)} \\
\iff & \text{es gibt } A_1, \ldots, A_n \in \Gamma \text{ mit } A_1, \ldots, A_n \vDash B & \text{(Lemma 1.2.19)} \\
\iff & \Gamma \vDash B & \text{(Kompaktheitssatz).}
\end{array}
$$

□

[...]

2.2.4 Andere Kalküle

Nennen wir ein aussagenlogisches deduktives System 0-korrekt, wenn jedes Theorem eine Tautologie ist, und 0-vollständig, wenn jede Tautologie ein Theorem ist. Wir sehen jetzt leicht ein, daß ein aussagenlogisches deduktives System $\mathcal{K}$ mit $\to$ genau dann korrekt und vollständig ist, wenn es 0-korrekt und 0-vollständig ist und das Deduktionstheorem (beide Richtungen, also $\Gamma \vdash_{\mathcal{K}} A \to B \iff \Gamma, A \vdash_{\mathcal{K}} B$) erfüllt: die Hinlänglichkeit dieser Bedingung wird gerade im Beweis von Theorem 2.2.17 gezeigt.

Übungsaufgabe 2.2.18. Finden Sie je ein aussagenlogisches deduktives System, das

- korrekt und 0-vollständig, aber nicht vollständig ist;
- vollständig und 0-korrekt, aber nicht korrekt ist.

Übungsaufgabe 2.2.19. Wir betrachten das deduktive System $\mathcal{K}_0'$, das wie $\mathcal{K}_0$ definiert ist mit dem einzigen Unterschied, daß Ax3 fehlt und stattdessen Th2 und Th7 als Axiomenschemata fungieren. Zeigen Sie, daß mit $\mathcal{K}_0$ auch $\mathcal{K}_0'$ korrekt und vollständig ist.

Übungsaufgabe 2.2.20. Es sei $\mathcal{K}$ ein aussagenlogisches deduktives System mit $\to$. Zeigen Sie: Gilt für $\mathcal{K}$ das Deduktionstheorem, so sind in $\mathcal{K}$ die Regelschemata MP sowie Ax1 und Ax2 herleitbar.

[...], obwohl diese in der großen Mehrzahl der Anwendungen größere Umstände mit sich bringen (nämlich k Anwendungen der Abtrennungsregel). Übrigens läßt sich entsprechendes schon für das Axiomen Ax3 sagen, was ja in den Beweis des Deduktionstheorems nicht eingegangen ist, und an dessen Stelle wir deshalb auch das an den *modus ponens* erinnernde Schlußregelschema $\frac{B \quad \neg A \to \neg B}{A}$ (eine Variante des *modus tollens*) hätten setzen können.

Deduktive Systeme der Logik, die wie $\mathcal{K}_0$ (und seine Erweiterungen durch zusätzliche Axiomenschemata) mit möglichst wenigen echten Schlußregeln auskommen (nämlich nur mit der Abtrennungsregel), werden *Hilbert*[1]*-Kalküle* genannt. Das konkrete System mit Junktormenge $\{\to, \neg\}$ und unseren drei Axiomenschemata geht auf Łukasiewicz[2] zurück. Es brachte eine Verbesserung gegenüber der bahnbrechenden Arbeit Freges[3], in der für denselben Zweck sechs Axiomenschemata Verwendung fanden: Ax1, Ax2, Th2, Th5, Th7 sowie das bei uns namenlose $\frac{}{(A \to B \to C) \to B \to A \to C}$. (Das System $\mathcal{K}_0'$ aus Übungsaufgabe 2.2.19 wurde von Kleene formuliert.)

Die Beschränkung auf die Junktorenmenge $\{\to, \neg\}$ ist sicherlich ein Nachteil unseres Systems $\mathcal{K}_0$. [...]

Nehmen wir an, wir wollen $\mathcal{K}_0$ um einen Junktor j erweitern. Bezeichnen wir die Stelligkeit von j mit n. Wir nehmen $n > 0$ an. (Im Falle $n = 0$ gehen wir zur entsprechenden konstanten einstelligen Funktion über.) Wegen der funktionalen Vollständigkeit gibt es eine zu $j(p_1, \dots, p_n)$ logisch äquivalente Formel E_j in $\{p_1, \dots, p_n\}$ über $\{\to, \neg\}$. Nun bilde ein neues deduktives System $\mathcal{K}_j = (\mathcal{F}_j, \mathcal{R}_j)$ wie folgt: Formeln sind die Aussageformen in $\mathcal{V}$ über $\{\to, \neg, j\}$. Regelschemata sind dieselben wie für $\mathcal{K}_0$, und zusätzlich

$$\frac{}{j(A_1, \dots, A_n) \to E_j\{p_1/A_1, \dots, p_n/A_n\}} \ (j\to)$$

und

$$\frac{}{E_j\{p_1/A_1, \dots, p_n/A_n\} \to j(A_1, \dots, A_n)} \ (\to j).$$

Ist dieses $\mathcal{K}_j$ ebenfalls korrekt und vollständig? Nun, ein großer Teil dessen, was wir über $\mathcal{K}_0$ gesagt haben, überträgt sich auf $\mathcal{K}_j$. So haben wir auch hier das Deduktionstheorem und alle als Lemmata formulierten Theoremschemata. Das Argument zur Korrektheit muß nur um die Betrachtung der beiden zusätzlichen Axiomenschemata ergänzt werden. Das einzige Problem begegnet uns im Argument zur Vollständigkeit, und hier insbesondere beim Beweis einer Entsprechung des ersten Lemmas zu Satz 2.2.14. Eine mögliche Lösung sieht vor, den bestehenden Beweis in eine zusätzliche Induktion über die Anzahl aller j-Teilformeln (ohne Vielfachheit!) einzubetten.

Beispiel 2.2.21. Wollen wir $\mathcal{K}_0$ um den Junktor $\wedge$ erweitern, so können wir zwei zusätzliche Axiomenschemata

$$\frac{}{A \wedge B \to \neg(A \to \neg B)} \ (\wedge\to) \qquad \text{und} \qquad \frac{}{\neg(A \to \neg B) \to A \wedge B} \ (\to\wedge)$$

benutzen. In dem so entstehenden deduktiven System $\mathcal{K}_\wedge$ können wir $A \wedge B \to A$ unter Benutzung des Deduktionstheorems wie folgt herleiten:

1. $\ulcorner \ A \wedge B$ Ann.

[1] David Hilbert (1862–1943)
[2] Jan Łukasiewicz (1878–1956)
[3] Gottlob Frege (1848–1925)

2.	$A \wedge B \to \neg(A \to \neg B)$	$(\wedge{\to})$
3.	$\neg(A \to \neg B)$	$\mathrm{MP}, 1, 2$
4.	$\neg A$	Ann.
5.	$\neg A \to A \to \neg B$	Th3
6.	$A \to \neg B$	$\mathrm{MP}, 4, 5$
7.	$\neg(A \to \neg B) \to (A \to \neg B) \to A$	Th3
8.	$(A \to \neg B) \to A$	$\mathrm{MP}, 3, 7$
9.	A	$\mathrm{MP}, 6, 8$
10.	$\neg A \to A$	$\mathrm{DT}, 9$
11.	$\neg A \to \neg A$	Th1
12.	$(\neg A \to A) \to (\neg A \to \neg A) \to \neg\neg A$	Th7
13.	$(\neg A \to \neg A) \to \neg\neg A$	$\mathrm{MP}, 10, 12$
14.	$\neg\neg A$	$\mathrm{MP}, 11, 13$
15.	$\neg\neg A \to A$	Th2
16.	A	$\mathrm{MP}, 14, 15$
17.	$A \wedge B \to A$	$\mathrm{DT}, 16.$

Übungsaufgabe 2.2.22. Zeigen Sie

- $\vdash_{\mathcal{K}_\wedge} A \wedge B \to B$ und
- $\vdash_{\mathcal{K}_\wedge} A \to B \to A \wedge B$

für das deduktive System $\mathcal{K}_\wedge$ aus dem vorangegangenen Beispiel.

Übungsaufgabe 2.2.23. Führen Sie den angedeuteten Beweis des ersten Lemmas von Satz 2.2.14 für $\mathcal{K}_j$ aus.

Der Hauptnachteil von Hilbert-Kalkülen der Aussagenlogik ist, daß die Wahl der Axiomenschemata, wenn sie nicht sehr umfangreich ausfällt, dann doch etwas Unnatürliches hat. Eigentlich sollte es sich bei den Axiomen um die fundamentalen Wahrheiten handeln. Man kann schon Fragen, warum einerseits dem Formelschema $(A \to B \to C) \to (A \to B) \to A \to C$ diese Rolle zukommen soll, während wir andererseits schon etwas kämpfen müssen, um das Formelschema $A \to A$ herzuleiten. Ein weiterer Nachteil ist die Sonderrolle des Junktors $\to$, ohne den das einzige echte Regelschema nicht formuliert werden kann.

Der Gegenentwurf sind Kalküle des *natürlichen Schließens*. Ihre Regelschemata geben fundamentale Wahrheiten über einzelne Junktoren wieder und ermöglichen so unmittelbar die Anwendung der Beweisstrategien, die Ende des vorangegangenen Unterabschnitts aufgeführt sind. Genauer sind jedem Junktor j Regelschemata der *Einführung* und der *Beseitigung* (oder *Elimination*) zugeordnet. Erstere beschreiben, wie man üblicherweise eine j-Formel herleitet; letztere ermöglichen, aus einer j-Formel andere abzuleiten.

So dient zur Beseitigung von $\to$ das Regelschema, das wir als Abtrennungsregel kennengelernt haben. Zur Einführung von $\to$ gibt es das Regelschema

$$\begin{array}{c} [B] \\ \vdots \\ A \\ \hline B \to A. \end{array}$$

Hierbei ist die Prämisse eine *Ableitung* von A aus der (zusätzlichen) Annahme B. Wir haben insgeheim auch dieses Regelschema bereits kennengelernt und angewendet, nämlich als die nichttriviale Hälfte des Deduktionstheorems.

Nun sind Ableitungen selbstverständlich keine Formeln, weshalb dieses Einführungsschema in einem deduktiven System gemäß unserer Definition eigentlich nicht auftreten darf. Wollen wir einen Kalkül natürlichen Schließens als deduktives System $\mathcal{K}_{\text{nat}}$ anlegen, müssen wir die Formelmenge erweitern werden auf alle relevanten potentiellen Ableitbarkeitsbeziehungen üblicher Formeln. Diese werden in der Form $B_1, \ldots, B_k \vdash A$ geschrieben und *Sequenzen* genannt. Das Ableitbarkeitssymbol ‚$\vdash$' hat dabei seine ursprüngliche Bedeutung eingebüßt. Wenn wir sagen, A sei aus B_1, ..., B_k ableitbar, so meinen wir, daß $B_1, \ldots, B_k \vdash A$ ein Theorem von $\mathcal{K}_{\text{nat}}$ ist.

Am Anfang der Liste von Regelschemata stehen die rein buchhalterischen

$$\frac{}{A \vdash A} \qquad \text{und} \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A},$$

mit deren Hilfe grundlegende Eigenschaften der Ableitbarkeitsrelation nachvollzogen werden können. Die Regelschemata zur Beseitigung und Einführung von $\rightarrow$ erscheinen nun als

$$\frac{\Gamma \vdash B \qquad \Gamma \vdash B \rightarrow A}{\Gamma \vdash A} \qquad \text{und} \qquad \frac{\Gamma, B \vdash A}{\Gamma \vdash B \rightarrow A}.$$

Zur Beseitigung und Einführung von $\neg$ sollten üblicherweise die Regelschemata

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash B} \qquad \text{und} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B \qquad \Gamma, A \vdash \neg B}{\Gamma \vdash \neg A}$$

dienen. (Steht der Junktor $\perp$ zur Verfügung, so könnte er die Rolle von B übernehmen, so daß ‚$\neg A$' ganz genau wie ‚$A \rightarrow \perp$' behandelt wird.) In der von uns angestrebten klassischen Logik ist ein weiteres der Beseitigung dienendes Regelschema nötig:

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A}.$$

Man vergleiche diese drei mit den Theoremschemata Th3, Th7 und Th2 unseres Hilbert-Kalküls. Für den Junktor $\wedge$ würden wir im Sinne des natürlichen Schließens die Regelschemata

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}, \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B} \qquad \text{und} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}$$

(zwei beseitigende und ein einführendes) verwenden.

2.3 Gentzen-Kalkül

Mit etwas anderen Sequenzen arbeitet das System von Gentzen[4]. Hierbei darf nicht nur links, sondern auch rechts des Ableitungssymbols eine beliebige (endliche) Zahl von Formeln stehen: während links wie gehabt Annahmen gesammelt werden, findet rechts eine Fallunterscheidung statt. Die Symmetrie bei der Bildung von Sequenzen setzt sich fort auf das zugehörige System von Schlußregeln, das so die Dualität der klassischen Logik (siehe **??**) widergespiegelt.

Eine *Formel* soll in diesem Abschnitt ausschließlich die Junktorensymbole $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\top$, $\perp$ und $\rightarrow$ enthalten.

[4]Gerhard Gentzen (1909–1945)

Definition 2.3.1. Eine *Gentzen-Sequenz*, in der Folge kurz Sequenz genannt, besteht aus zwei endlichen „Multimengen“ von Formeln Γ und Δ und wird geschrieben als $\Gamma \vdash \Delta$. (Eine Multimenge funktioniert wie eine Menge, außer daß Elemente mehrfach enthalten sein dürfen.) Die Elemente von Γ heißen die *Antezedensen*, die Elemente von Δ die *Sukzedensen* der Sequenz.

In der Literatur werden statt Multimengen meist schlicht Mengen benutzt, aber das Vermeiden von Mehrfachnennungen macht weder die theoretischen Argumente noch die praktischen Verfahren unbedingt besser und auf keinen Fall eleganter.

Eine Sequenz $\Gamma \vdash \Delta$ heißt *korrekt*, wenn es für jede Belegung φ eine Formel $C \in \Gamma$ mit $\varphi(C) = 0$ oder eine Formel $D \in \Delta$ mit $\varphi(D) = 1$ gibt. Mit anderen Worten, $\Gamma \vdash \Delta$ heißt korrekt, wenn die Formel $\bigwedge \Gamma \to \bigvee \Delta$ allgemeingültig ist.

Wir wollen nun einen Kalkül auf der Menge aller Sequenzen angeben, in dem genau die korrekten Sequenzen herleitbar sind. Entsprechend benutzen wir die Begriffe ‚korrekt‘ (*nur* korrekte Sequenzen sind herleitbar) und ‚vollständig‘ (*alle* korrekten Sequenzen sind herleitbar). Wir werden aus naheliegenden Gründen darauf verzichten, für Herleitbarkeit das Symbol ‚$\vdash$‘ zu verwenden.

Definition 2.3.2. Der *Gentzen-Kalkül* ist das deduktive System, dessen Formeln die Gentzen-Sequenzen sind und deren Regeln durch folgende Schemata gegeben sind.

$$\frac{}{\Gamma, v \vdash v, \Delta}\ (0)$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ (\wedge\vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}\ (\vdash\wedge)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ (\vee\vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ (\vdash\vee)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\ (\to\vdash) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\ (\vdash\to)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ (\neg\vdash) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ (\vdash\neg)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \top \vdash \Delta}\ (\top\vdash) \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \top, \Delta}\ (\vdash\top)$$

$$\frac{}{\Gamma, \bot \vdash \Delta}\ (\bot\vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \bot, \Delta}\ (\vdash\bot)$$

Dabei steht ‚v‘ in (0) für eine beliebige atomare Formel.

[...]

Herleitungen im Gentzen-Kalkül werden besonders gerne als Bäume notiert.

Beispiel 2.3.3. Es soll im Gentzen-Kalkül die Sequenz $p \vee q, \neg p \vee r \vdash q \vee r$ hergeleitet werden. Hier ist eine Möglichkeit, aufgeschrieben als Folge:

1.	$p \vdash p, q, r$	(0)
2.	$p, \neg p \vdash q, r$	$(\neg\vdash), 1$
3.	$p, r \vdash q, r$	(0)
4.	$p, \neg p \vee r \vdash q, r$	$(\vee\vdash), 2, 3$
5.	$q, \neg p \vee r \vdash q, r$	(0)
6.	$p \vee q, \neg p \vee r \vdash q, r$	$(\vee\vdash), 4, 5$
7.	$p \vee q, \neg p \vee r \vdash q \vee r$	$(\vdash\vee), 6.$

Der zugehörende Herleitungsbaum ist

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{(0)}
\UnaryInfC{$p \vdash p, q, r$}
\RightLabel{($\neg\vdash$)}
\UnaryInfC{$p, \neg p \vdash q, r$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(0)}
\UnaryInfC{$p, r \vdash q, r$}
\RightLabel{($\vee\vdash$)}
\BinaryInfC{$p, \neg p \vee r \vdash q, r$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(0)}
\UnaryInfC{$q, \neg p \vee r \vdash q, r$}
\RightLabel{($\vee\vdash$)}
\BinaryInfC{$p \vee q, \neg p \vee r \vdash q, r$}
\RightLabel{($\vdash\vee$)}
\UnaryInfC{$p \vee q, \neg p \vee r \vdash q \vee r.$}
\end{prooftree}
$$

Zum Beweis der Korrektheit des Gentzen-Kalküls wird es reichen zu zeigen, daß in jeder Regel, deren Prämissen korrekt sind, auch die Konklusion korrekt ist. Zum Beweis der Vollständigkeit werden wir als wichtiges Hilfsergebnis die Umkehrung brauchen: ist die Konklusion korrekt, dann auch die Prämissen. (Man beachte, daß entsprechendes für den Hilbert-Kalkül überhaupt nicht gilt: ist in der Abtrennungsregel B allgemeingültig, dann zwar auch $A \to B$, aber nicht notwendigerweise A.) Wir wollen beide Richtungen zusammen als Lemma formulieren.

Für praktische Anwendungen erweist es sich als nützlich, die Aussage noch zu verfeinern, indem wir eine Semantik von Sequenzen wie jene von Formeln definieren. Wir sagen also, eine Belegung φ *erfülle* $\Gamma \vdash \Delta$, falls $\varphi(C) = 0$ für ein $C \in \Gamma$ oder $\varphi(D) = 1$ für ein $D \in \Delta$. Dann ist klar, unter welchen Bedingungen wir eine Sequenz *erfüllbar* oder *allgemeingültig* nennen; für ‚allgemeingültig' haben wir bereits die Bezeichnung ‚korrekt'.

Lemma 2.3.4. *Für jede Regel im Gentzen-Kalkül gilt: Eine Belegung erfüllt die Konklusion genau dann, wenn sie alle Prämissen erfüllt. Also ist die Konklusion genau dann korrekt, wenn alle Prämissen korrekt sind.*

Beweis. Sei φ eine Belegung. Wir betrachten alle Regeln mit fest gegebenen Formelmengen Γ und Δ. In allen auftretenden Sequenzen ist Γ Teil des Antezedens und ist Δ Teil des Sukzedens; gilt also $\varphi(C) = 0$ für ein $C \in \Gamma$ oder $\varphi(D) = 1$ für ein $D \in \Delta$, so sind sie erfüllt und es ist nichts weiter zu zeigen. Wir dürfen für den Rest des Beweises also annehmen, daß $\varphi(C) = 1$ für alle $C \in \Gamma$ und $\varphi(D) = 0$ für alle $D \in \Delta$.

Betrachten wir nun (0) genauer. Da keine Prämisse vorhanden ist, müssen wir zeigen, daß φ die Konklusion (nämlich $\Gamma, v \vdash v, \Delta$) erfüllt. Zu diesem Zweck unterscheiden wir die Fälle $\varphi(v) = 0$ und $\varphi(v) = 1$ und stellen fest, daß die geforderte Bedingung jeweils eintritt, im ersteren Falle im Antezedens, im letzteren Falle im Sukzedens.

Die Argumente für die übrigen Regelschemata folgen im wesentlichen zwei Mustern, die wir hier anhand des Junktors $\to$ exemplarisch ausführen. Betrachten wir zunächst ($\vdash\to$). Aufgrund unserer Annahmen bezüglich Γ und Δ erfüllt φ die Konklusion (nämlich $\Gamma \vdash A \to B, \Delta$) genau dann, wenn $\varphi(A \to B) = 1$, und die Prämisse (nämlich $\Gamma, A \vdash B, \Delta$) genau dann, wenn $\varphi(A) = 0$ oder $\varphi(B) = 1$. Wie wir wissen, sind diese beiden Bedingungen äquivalent. Nun betrachten wir ($\to\vdash$). Hier erfüllt φ die Konklusion (nämlich $\Gamma, A \to B \vdash \Delta$) genau dann, wenn $\varphi(A \to B) = 0$, was genau dann gilt, wenn $\varphi(A) = 1$ und $\varphi(B) = 0$. Ersteres gilt genau dann, wenn φ die erste Prämisse (nämlich $\Gamma \vdash A, \Delta$) erfüllt, und letzteres gilt genau dann, wenn φ die zweite Prämisse (nämlich $\Gamma, B \vdash \Delta$) erfüllt. □

Satz 2.3.5. *Im Gentzen-Kalkül sind genau die korrekten Sequenzen herleitbar.*

Beweis. Daß jede herleitbare Sequenz korrekt ist, zeigen wir durch Induktion über herleitbare Sequenzen, unter Verwendung des Lemmas (Hinlänglichkeit).

Um umgekehrt zu zeigen, daß jede korrekte Sequenz herleitbar ist, brauchen wir eine etwas andere Induktion. Definieren wir zu diesem Zwecke die Komplexität einer Sequenz als die Anzahl der Auftreten von Junktoren; also $\kappa(\Gamma \vdash \Delta) = \sum_{C \in \Gamma} \kappa(C) +$

$\sum_{D \in \Delta} \kappa(D)$, wobei $\kappa(A)$ die Anzahl der Auftreten von Junktoren in A ist. Der Beweis wird nun durch Induktion über die Komplexität der korrekten Sequenz $\Gamma \vdash \Delta$ geführt.

Betrachten wir zunächst den Fall, daß alle Formeln in Γ und Δ atomar sind (Komplexität 0), daß Γ und Δ also Multimengen von Variablen sind. Betrachten wir die Belegung φ mit

$$\varphi(v) = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \in \Gamma, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da $\Gamma \vdash \Delta$ korrekt ist und φ alle Formeln in Γ erfüllt, muß φ auch eine Formel p_1 in Δ erfüllen, was aber nur dann der Fall ist, wenn p_1 auch zu Γ gehört. Damit gibt es eine Variable, die zu beiden Multimengen gehört. Die Sequenz $\Gamma \vdash \Delta$ ist also eine Instanz des Schemas (0) und somit herleitbar.

Gibt es einen Junktor in $\Gamma \vdash \Delta$, so steht die betreffende Formel auf einer beiden Seiten des ‚$\vdash$' und hat einen äußersten Junktor. Diese beiden Informationen zusammen bestimmen ein Regelschema, für das $\Gamma \vdash \Delta$ die Konklusion einer Instanz ist. Die zugehörigen Prämissen haben kleinere Komplexität (für die einzigen Prämissen von ($\wedge\vdash$), ($\vdash\vee$), ($\vdash\to$), ($\neg\vdash$), ($\vdash\neg$), ($\top\vdash$) und ($\vdash\bot$) ist die Differenz 1; für die beiden Prämissen von ($\vdash\wedge$), ($\vee\vdash$) und ($\to\vdash$) sind die Differenzen $\kappa(B) + 1$ und $\kappa(A) + 1$) und sind nach dem Lemma (Notwendigkeit) ebenfalls korrekt. Also sind sie nach Induktionsvoraussetzung herleitbar, womit auch $\Gamma \vdash \Delta$ herleitbar ist. □

Aus dem Beweis geht hervor, daß ein Herleitungsbaum einer korrekten Sequenz sich von unten nach oben konstruieren läßt, indem beliebige passende Regeln angefügt werden. Allerdings könnte die jeweilige Auswahl an Regeln durch Effizienzerwägungen eingeschränkt werden. So ist im allgemeinen eine Regel mit möglichst wenig Prämissen zu bevorzugen. (Dies ist auch in Beispiel 2.3.3 geschehen.)

Das Verfahren läßt sich auf eine beliebige Sequenz anwenden. Stoßen wir dabei auf eine Sequenz, die nicht Konklusion einer Regel ist (weil Antezedens und Sukzedens disjunkte Multimengen von Variablen sind), so können wir schließen, daß die ursprüngliche Sequenz nicht korrekt ist.

Beispiel 2.3.6. Wir sollen herausfinden, ob die Sequenz $p \vee q, \neg p \to r \vdash q \vee r$ korrekt ist. Zu diesem Zwecke versuchen wir, einen Herleitungsbaum zu konstruieren, und erhalten

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\lightning}{p, p \vdash q, r}}{p \vdash \neg p, q, r}{\scriptstyle(\vdash\neg)} \quad \dfrac{}{p, r \vdash q, r}{\scriptstyle(0)}}{p, \neg p \to r \vdash q, r}{\scriptstyle(\to\vdash)} \quad \dfrac{}{q, \neg p \to r \vdash q, r}{\scriptstyle(0)}}{\dfrac{p \vee q, \neg p \to r \vdash q, r}{p \vee q, \neg p \to r \vdash q \vee r.}{\scriptstyle(\vdash\vee)}}{\scriptstyle(\vee\vdash)}$$

Die durch ‚$\lightning$' markierte Sequenz ist nicht Konklusion einer Regel; somit ist die Ausgangssequenz nicht korrekt. Wir können auch direkt ablesen, wie eine nicht erfüllende Belegung φ aussehen muß: es müssen $\varphi(p) = 1$ und $\varphi(q)$, $\varphi(r) = 0$ gelten.

Insbesondere haben wir damit einen recht guten Algorithmus, um herauszufinden, ob eine gegebene Formel A (oder auch allgemeiner eine endliche Formelmenge Γ) erfüllbar ist: das ist nämlich genau dann der Fall, wenn die Gentzen-Sequenz $A \vdash$ (bzw. $\Gamma \vdash$), deren Sukzedens leer ist, *nicht* korrekt ist.

Beispiel 2.3.7. Ist $A = \neg(p \vee (q \wedge r) \to (p \vee q) \wedge (p \vee r))$ erfüllbar? — Anhand der

Herleitung

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{(0)}
\UnaryInfC{$p \vdash p, q$}
\RightLabel{$(\vdash\lor)$}
\UnaryInfC{$p \vdash p \lor q$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(0)}
\UnaryInfC{$p \vdash p, r$}
\RightLabel{$(\vdash\lor)$}
\UnaryInfC{$p \vdash p \lor r$}
\RightLabel{$(\vdash\land)$}
\BinaryInfC{$p \vdash (p \lor q) \land (p \lor r)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(0)}
\UnaryInfC{$q, r \vdash p, q$}
\RightLabel{$(\vdash\lor)$}
\UnaryInfC{$q, r \vdash p \lor q$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(0)}
\UnaryInfC{$q, r \vdash p, r$}
\RightLabel{$(\vdash\lor)$}
\UnaryInfC{$q, r \vdash p \lor r$}
\RightLabel{$(\vdash\land)$}
\BinaryInfC{$q, r \vdash (p \lor q) \land (p \lor r)$}
\RightLabel{$(\land\vdash)$}
\UnaryInfC{$q \land r \vdash (p \lor q) \land (p \lor r)$}
\RightLabel{$(\lor\vdash)$}
\BinaryInfC{$p \lor (q \land r) \vdash (p \lor q) \land (p \lor r)$}
\RightLabel{$(\vdash\to)$}
\UnaryInfC{$\vdash p \lor (q \land r) \to (p \lor q) \land (p \lor r)$}
\RightLabel{$(\neg\vdash)$}
\UnaryInfC{$\neg(p \lor (q \land r) \to (p \lor q) \land (p \lor r)) \vdash$}
\end{prooftree}
$$

sehen wir, daß $A \vdash$ korrekt ist. Also lautet die Antwort auf die Frage: „Nein.“

Was auffällt, sind die ständigen Wiederholungen, wobei erschwerend hinzukommt, daß wir auf dem Papier eine Formel (wie im Beispiel etwa $(p \lor q) \land (p \lor r)$) nicht einfach als Zeiger kopieren, sondern jedesmal neu ausschreiben. Abhilfe könnte durch die Möglichkeit geschaffen werden, an den Astenden nur die jeweils neuen individuallen Formeln aufschreiben zu müssen und für die übrigen den Ast herabblicken zu dürfen. Weiterhin sind die $\neg$-Schritte recht unproduktiv; man könnte sie in die Schritte zu den zweistelligen Junktoren einbauen und so gleich die Unterscheidung zwischen Antezedens und Sukzedens überflüssig machen. Was bei diesen Modifikationen herauskommt, ist die Tableau-Methode, der wir uns im folgenden Kapitel noch ausführlich widmen werden.

Wir haben für Sequenzen weder einen Begriff logischer Folgerung eingeführt noch den Begriff einer Ableitung im Kalkül betrachtet. Das ist auch prinzipiell nicht nötig, da etwaige Prämissen, wie sie uns für gewöhnlich interessieren, in die Sequenzen eingebaut werden können. Entsprechend sind bei der Frage nach Korrektheit und Vollständigkeit Prämissen außen vor. Was passiert, wenn wir dennoch Prämissen zulassen, beleuchtet die folgende Übungsaufgabe.

Übungsaufgabe 2.3.8. Wie für Formeln sagen wir, eine Sequenz $\Gamma \vdash \Delta$ folge aus einer Menge $\mathfrak{S}$ von Sequenzen, falls jede Belegung, die jede Sequenz in $\mathfrak{S}$ erfüllt, auch $\Gamma \vdash \Delta$ erfüllt. Zeigen Sie:

- Das Gentzen-Kalkül ist $+$-korrekt in dem Sinne, daß, wenn $\Gamma \vdash \Delta$ aus $\mathfrak{S}$ ableitbar ist, auch $\Gamma \vdash \Delta$ aus $\mathfrak{S}$ folgt.
- Das Gentzen-Kalkül ist *nicht* $+$-vollständig in dem Sinne, daß, wenn $\Gamma \vdash \Delta$ aus $\mathfrak{S}$ folgt, auch $\Gamma \vdash \Delta$ aus $\mathfrak{S}$ ableitbar ist.
- Fügt man dem Gentzen-Kalkül das Regelschema

  $$\frac{\Gamma_0, A \vdash \Delta_0 \qquad \Gamma_1 \vdash A, \Delta_1}{\Gamma_0, \Gamma_1 \vdash \Delta_0, \Delta_1}$$

  (die *Schnittregel*) hinzu, so ist das entstehende Kalkül $+$-korrekt und $+$-vollständig.

Kapitel 3

Algorithmen

[. . .
. . .]

3.1 Tableau-Methode

[. . .]

[. . .]

Bevor wir zu einer genauen Beschreibung kommen, sehen wir uns zwei Beispiele an.

Beispiel 3.1.1. Ist $\neg(p \vee (q \wedge r) \rightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r))$ erfüllbar? — Wir erstellen das zugehörige Tableau:

*1	$\neg(p \vee (q \wedge r) \rightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r))$	2
2a	$p \vee (q \wedge r)$	3
2b	$\neg((p \vee q) \wedge (p \vee r))$	5

Linker Ast:

3a	p	

5a	$\neg(p \vee q)$	6	5b	$\neg(p \vee r)$	7
6a	$\neg p$		7a	$\neg p$	
6b	$\neg q$		7b	$\neg r$	
	$\lightning$ 3a, 6a			$\lightning$ 3a, 7a	

Rechter Ast:

3b	$q \wedge r$	4
4a	q	
4b	r	

5a	$\neg(p \vee q)$	8	5b	$\neg(p \vee r)$	9
8a	$\neg p$		9a	$\neg p$	
8b	$\neg q$		9b	$\neg r$	
	$\lightning$ 4a, 8b			$\lightning$ 4b, 9b.	

Auf jedem der Äste ergeben sich widersprüchliche Bedingungen. Also lautet die Antwort auf die Frage: „Nein."

Beispiel 3.1.2. Ist die Formelmenge $\{p \vee q, \neg p \rightarrow r, \neg(q \vee r)\}$ erfüllbar? — Auch hier erstellen wir das Tableau:

$$
\begin{array}{clc}
*1 & p \vee q & 5 \\
*2 & \neg p \to r & 6 \\
*3 & \neg(q \vee r) & 4 \\
4a & \neg q & \\
4b & \neg r &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
5a & p \\
\quad
\begin{array}{lll}
6a & \neg\neg p & 7 \\
7 & p &
\end{array}
&
\begin{array}{ll}
6b & r \\
 & \lightning\ 6b, 4b
\end{array}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ll}
5b & q \\
 & \lightning\ 5b, 4a.
\end{array}
$$

Es verbleibt ein Ast, entlang dessen wir keine widersprüchlichen Bedingungen finden. Wir lesen eine erfüllende Belegung ab: den Variablen p, q, r müssen die Werte 1, 0, 0 zugewiesen werden (Einträge 7, 4a, 4b).

Die Zerlegungsschritte sind syntaktisch definiert. Dabei findet eine Notation ähnlich jener für die Schlußregeln deduktiver Systeme Verwendung, mit der ursprünglichen Formel über einem horizontalen Strich und den sich ergebenden kleineren Formeln, den sogenannten Komponenten, darunter. Es werden zwei Arten zu zerlegender Formeln unterschieden. Bei den einen, den sogenannten α-Formeln, landen die Komponenten in demselben Knoten des Baums. In der Schlußregel-Notation erscheinen sie untereinander:

$$
\frac{A \wedge B,}{\begin{array}{c}A\\B\end{array}} \quad \frac{\neg(A \vee B),}{\begin{array}{c}\neg A\\\neg B\end{array}} \quad \frac{\neg(A \to B),}{\begin{array}{c}A\\\neg B\end{array}} \quad \frac{\neg\neg A.}{A}
$$

Bei den anderen, den sogenannten β-Formeln, wird an den Enden jeden Astes, der durch ihren Knoten verläuft, eine neue Verzweigung eingeführt, und die neuen Komponenten landen in je einem der neuen Endknoten. In der Schlußregel-Notation werden sie durch einen vertikalen Strich voneinander getrennt:

$$
\frac{\neg(A \wedge B),}{\neg A \mid \neg B} \quad \frac{A \vee B,}{A \mid B} \quad \frac{A \to B.}{\neg A \mid B}
$$