Übungen zur Vorlesung
Einführung in die Logik
Blatt 3

Prof. Dr. Roland Meyer,
Sören van der Wall Abgabe bis Do, 02. Juli 2020 um 23:59

Aufgabe 3.1 (Modellierung: Syntax der Prädikatenlogik — **10 Pkt**)
Drücken Sie die folgenden Aussagen in Prädikatenlogik erster Stufe aus. Spezifizieren Sie dabei die verwendeten Funktions- und Prädikatssymbole und ihre Stelligkeit. Geben Sie die intendierte Bedeutung der Symbole an oder wählen Sie aussagekräftige Namen. Dabei soll sich möglichst viel Struktur der Aussage in der Struktur der Formel wiederfinden: Die Aussage „Alle Vögel sind schon da“ soll also nicht mit der Formel ausgedrückt, die nur aus dem nullstelligen Prädikat alleVoegelSindSchonDa besteht, sondern z.B. mit

$$\forall x\colon\ (\mathsf{istVogel}(x) \to \mathsf{schonDa}(x))\ ,$$

wobei $S = (Fun, Pred)$ mit $Fun = \varnothing$, $Pred = \{\mathsf{istVogel}_{/1}, \mathsf{schonDa}_{/1}\}$.

a) Alle Jahre wieder kommt die Grippe.

b) Es gibt immer jemanden, der kann das besser.

c) Wenn du nichts mehr hast, kannst du nichts verlieren.

d) Am Ende der Zeit wird alles gut.

e) Die Zeit hat kein Ende.

Aufgabe 3.2 (Modellierung: Semantik der Prädikatenlogik — **8 Pkt**)
Nehmen Sie an, die Signatur S enthalte die einstelligen Prädikate istVogel und kannFliegen. Gegeben sei die Formel

$$A \equiv \forall x\colon\ (\mathsf{kannFliegen}(x) \to \mathsf{istVogel}(x))\ .$$

(Beachten Sie, dass diese Formel keine freien Variablen enthält.)

a) Geben Sie eine Struktur $\mathcal{M} = (D, I)$ der Signatur S an mit $\mathcal{M}[\![A]\!] = 1$. Es soll dabei mindestens ein $d \in D$ geben mit $\mathsf{kannFliegen}^{\mathcal{M}}(d) = 0$.

b) Geben Sie eine Struktur $\mathcal{M} = (D, I)$ der Signatur S an mit $\mathcal{M}[\![A]\!] = 1$, wobei $\{\mathsf{Amsel}, \mathsf{Schwein}, \mathsf{Airbus\ A380}\} \subseteq D$.

Aufgabe 3.3 (Auswerten von prädikatenlogischen Formeln — **14 Pkt**)
Gegeben sei die Signatur $S = (Fun, Pred)$ mit

$$\begin{array}{lcll} Fun & = & \{\mathsf{or}_{/2}, & \mathsf{not}_{/1}\} \\ Pred & = & \{\mathsf{might}_{/1}, & \mathsf{is}_{/1}\} \end{array}$$

und die S-Stuktur $\mathcal{M} = (D, I)$ mit

$$D = \{\mathfrak{t}, \mathfrak{f}, \mathfrak{m}\},$$

wobei

$$\begin{array}{llcllll} is^{\mathcal{M}} & (d) & = & 1 & \text{gdw.} & d = \mathfrak{t} & \text{(und 0 sonst)} \\ \mathsf{might}^{\mathcal{M}} & (d) & = & 1 & \text{gdw.} & d \in \{\mathfrak{t}, \mathfrak{m}\} & \end{array}$$

und

$$\mathsf{not}^{\mathcal{M}}(d) \quad = \quad \begin{cases} \mathfrak{f} & d = \mathfrak{t}, \\ \mathfrak{m} & d = \mathfrak{m}, \\ \mathfrak{t} & d = \mathfrak{f}, \end{cases} \qquad \mathsf{or}^{\mathcal{M}}(d, e) \quad = \quad \begin{cases} \mathfrak{t} & d = \mathfrak{t} \text{ oder } e = \mathfrak{t}, \\ \mathfrak{f} & d = \mathfrak{f} \text{ und } e = \mathfrak{f}, \\ \mathfrak{m} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie den Wahrheitswert $\mathcal{M}[\![A]\!]$ für die folgende Formel A Schritt für Schritt.

$$A \equiv \exists x\colon \; [(\mathsf{is}(x) \lor \mathsf{is}(\mathsf{not}(x))) \land \forall y\colon \; (\mathsf{might}\,(\mathsf{or}(y, x)) \to \mathsf{is}\,(\mathsf{or}(x, y)))] \; .$$

Hinweis: A hat keine freien Variablen, d.h. insbesondere spielt es keine Rolle, welche Belegung σ man initial wählt .

Aufgabe 3.4 (Formeln der Prädikatenlogik — **5 + 5 + 8 = 18Pkt**)
Geben Sie zu Ihrer Antwort auf die folgenden Fragen jeweils einen Beweis an (bzw. ein Gegenbeispiel).

a) Seien

$$A \equiv \exists x \forall y\colon p(x, y) \; ,$$

$$B \equiv \forall y \exists x\colon p(x, y) \; .$$

Welche der folgenden Beziehungen gelten?

- Jede Struktur, die A erfüllt, erfüllt auch B
- Jede Struktur, die B erfüllt, erfüllt auch A

b) Wird die Formel

$$C \equiv \big(\forall x\colon p(x)\big) \to \big(\exists x\colon p(x)\big)$$

von jeder Struktur erfüllt?

Abgabe bis Do, 02. Juli 2020 um 23:59 per Mail an Ihren Gruppenleiter.